Теор. движ.
Луны

№ 488.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XLI-го Семестра № 8-й.

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1909.

XLI Сем. № 8.

Вѣстникъ Опытной Физики и элементарной математики.

№ 488.

О нѣкоторыхъ замѣчательныхъ плоскихъ кривыхъ.

Э. Наннэи.

(*Продолженіе* *).

3. Атрифталоида. Эту кривую нашелъ Гаутонъ (Haughton), изучая форму, которую должно принять море, покрывающее шаръ, обладающій притягательной силой; главныя свойства ея найдены Таунзендомъ (Townsend) и Лоншаномъ (Longchamps).

Для того, чтобы построить кривую, надо изъ начала координатъ, какъ изъ центра, описать окружность произвольнымъ радіусомъ ϱ, затѣмъ провести четыре прямыхъ, параллельныхъ оси ординатъ имѣющихъ слѣдующія уравненія:

$$x=\pm k\sqrt{\frac{k}{h+\varrho}},\; x=\pm k\sqrt{\frac{k}{h-\varrho}},$$

гдѣ h и k, нѣкоторыя числа. Восемь точекъ пересѣченія этихъ прямыхъ съ окружностью дадутъ восемь точекъ атрифталоиды. Мѣняя радіусъ окружности, можно получить сколько угодно точекъ и такимъ образомъ начертить кривую.

Когда $h^3>\frac{27}{4}k^3$, кривая состоитъ изъ двухъ безконечныхъ вѣтвей, похожихъ на аньезіану и симметричныхъ относительно оси y,

*) См. № 482 „Вѣстника“.

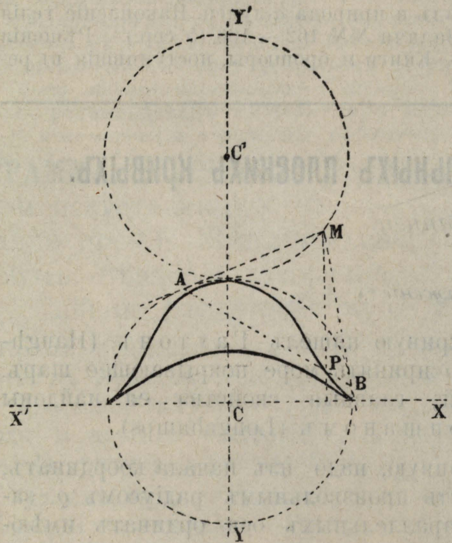
ихъ общей ассимптоты, и изъ двухъ другихъ замкнутыхъ вѣтвей, имѣющихъ видъ оваловъ, расположенныхъ по обѣ стороны отъ двухъ первыхъ вѣтвей. Въ этомъ случаѣ ось x'овъ пересѣкаетъ кривую въ шести точкахъ.

Если $h^3 = \frac{27}{4} k^3$, то кривая состоитъ изъ двухъ безконечныхъ вѣтвей: замкнутыя вѣтви сводятся къ изолированнымъ точкамъ.

Если $h^3 < \frac{27}{4} k^3$, то кривая состоитъ только изъ безконечныхъ вѣтвей.

Такъ какъ точки кривой суть общія точки окружностей $x^2 + y^2 = \varrho^2$ и прямыхъ $x = \pm k \sqrt{\frac{k}{h \pm \varrho}}$, то мы получимъ уравненіе атрифталоиды, если исключимъ изъ этихъ двухъ уравненій ϱ; дѣлая это, получаемъ уравненіе шестой степени

$$x^4 (x^2 + y^2) = (hx^2 - k^3)^2.$$



Фиг. 3.

4. Двурогая кривая. Слѣдующее построеніе принадлежитъ г-жѣ Шарлоттѣ Скоттъ (Scott).

Проведемъ два круга c и c', касающихся извнѣ и имѣющихъ одинъ и тотъ же радіусъ a. Одинъ изъ центровъ C примемъ за начало координатъ, а линію центровъ за ось ординатъ.

Изъ произвольной точки M окружности c' проводимъ обѣ касательныя къ окружности c и соединяемъ точки касанія хордой AB. Кривую, представляющую собою геометрическое мѣсто пересѣченія этой хорды съ ординатой точки M, называютъ, благодаря ея формѣ и по предложенію Брокара, двурогой. Англичане называютъ ее cocked hat (треуголка) (фиг. 3).

Уравненіе кривой можно вывести изъ предыдущаго построенія. Уравненія окружностей будутъ:

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ и } x^2 + (y - 2a)^2 = a^2.$$

Если черезъ x', y' обозначить координаты точки M, то уравненіе прямой AB будетъ: $xx' + yy' = a^2$, и поэтому координатами точки

P будутъ рѣшенія системы уравненій:

$$x = x'; \quad xy' + yy' = a^2; \quad x'^2 + (y' - 2a)^2 = a^2,$$

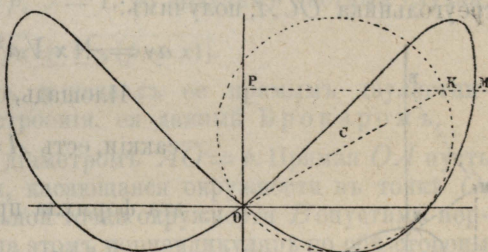
откуда

$$y = \frac{a^2 - x^2}{2a \pm \sqrt{a^2 - x^2}};$$

это и есть искомое уравненіе.

Ясно видно, что каждому значенію x соотвѣтствуютъ два значенія y, и что дѣйствительныя точки получатся только для $-a \leq x \leq a$. При $x = a$ и $x = -a$ кривая имѣетъ точки возврата. Въ этихъ точкахъ обѣ вѣтви имѣютъ общія касательныя, которыя образуютъ уголъ въ 45^0 съ осью абсциссъ. Верхняя вѣтвь кривой имѣетъ двѣ точки перегиба, координаты которыхъ $x = \pm \frac{a}{3}\sqrt{5}$; $y = \frac{a}{3}$.

5. Биссаккія. Изъ точки $C\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b\right)$, какъ изъ центра, опишемъ окружность проходящую черезъ начало координатъ. Черезъ точку O проведемъ перемѣнную хорду OK, а черезъ K прямую, параллельную оси абсциссъ; на этой прямой отложимъ отрѣзокъ $\overline{PM} = \overline{OK}$. Будемъ разсматривать кривую, представляющую собою геометрическое мѣсто построенныхъ такимъ образомъ точекъ M, соотвѣтствующихъ всѣмъ возможнымъ хордамъ OK. Эту кривую открылъ Сентъ-Венсенъ (G. Saint-Vincent, 1647) и назвалъ ее виртуальной параболой. Крамеръ (Cramer), которому принадлежитъ вышеизложенное построеніе, назвалъ ее биссаккіей (bis-saccus, двойной мѣшокъ) (фиг. 4).



Фиг. 4.

Обозначая координаты точки M черезъ x, y, координаты точки K черезъ x', y' и замѣчая, что $x = \overline{PM} = \overline{OK}$: имѣемъ:

$$x^2 = x'^2 + y'^2, \quad y = y'.$$

Выражая затѣмъ, что K лежитъ на окружности, получимъ*)

$$x'^2 + y'^2 - ax' - by' = 0.$$

---

*) Уравненіе окружности съ центромъ въ точкѣ $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$, какъ извѣстно, имѣетъ видъ: $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = r^2$; такъ какъ начало координатъ лежитъ на окружности, то уравненіе должно удовлетворяться при $x = 0$, $y = 0$; слѣдовательно,

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = r^2.$$

Примѣч. перев.

Если исключимъ x' и y' изъ этихъ трехъ уравненій, то найдемъ:

$$(x^2 - by)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

Это уравненіе биссаккіи.

Когда $b = 0$, т. е. центръ окружности лежитъ на оси x-овъ, то уравненіе принимаетъ видъ:

$$a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2);$$

кривую получающуюся въ этомъ случаѣ Маріэ (Marie) назвалъ лемнискатой Герона, а Обри (Aubry) восьмеркой (по ея формѣ).

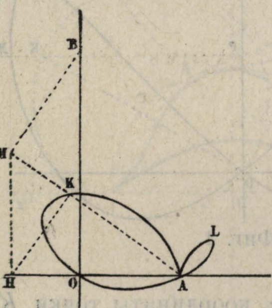
Для восьмерки можно еще указать слѣдующее построеніе по точкамъ.

Пусть $OA = a$ есть діаметръ нѣкоторой окружности, а OC—перемѣнная хорда въ ней; на OA отложимъ отрѣзокъ OP, равный отрѣзку AC, и обозначимъ черезъ M точку пересѣченія прямой, параллельной къ OA и проходящей черезъ C, съ перпендикуляромъ, возставленнымъ къ OA въ точкѣ P. Геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ M есть восьмерка.

Дѣйствительно. Примемъ прямую OA за ось абсциссъ, а перпендикуляръ, возставленный къ ней въ точкѣ O за ось ординатъ. Приравнивая другъ къ другу два выраженія для площади прямоугольнаго треугольника OCA, получимъ:

$$ay = \pm x \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{или} \quad a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2).$$

Площадь, ограниченная одной вѣтвью биссаккіи, есть $A = \frac{1}{3} a \sqrt{a^2 + b^2}$; для восьмерки эта формула принимаетъ видъ: $A = \frac{1}{3} a^2$.



Фиг. 5.

6. Двулистникъ (bifolium, folium duplex).—Данъ прямой уголъ AOB (фиг. 5) и точки A и B на его сторонахъ на разстояніяхъ $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ отъ вершины. Черезъ A проводимъ произвольную прямую AM, изъ точки B опускаемъ на нее перпендикуляръ BM, изъ M опять опускаемъ перпендикуляръ MH на AO и, наконецъ, изъ H—перпендикуляръ HK на AM, основаніе этого послѣдняго перпендикуляра есть точка K. Геометрическое мѣсто точекъ K, построенныхъ такимъ образомъ для всевозможныхъ прямыхъ AM, представляетъ собою кривую, которую Лоншанъ нашелъ въ 1869 году и которую онъ назвалъ наклоннымъ двулистникомъ.

Легко найти уравненіе этой кривой въ полярныхъ координатахъ, если принять точку A за начало координатъ, а прямую AO за полярную ось. Изъ прямоугольнаго треугольника AKH имѣемъ: $\overline{AK} = \varrho = \overline{AH} \cos \omega$, а изъ прямоугольнаго треугольнника AHM получаемъ: $\overline{AH} = \overline{AM} \cos \omega$; значитъ, $\varrho = \overline{AM} \cos^2 \omega$. Замѣчая затѣмъ, что отрѣзокъ AM есть проекція ломанной линіи $AOBM$ на прямую AM, находимъ, что $\overline{AM} = a \cos \omega + b \sin \omega$. Такимъ образомъ, мы имѣемъ уравненіе:

$$\varrho = \cos^2 \omega \,(a \cos \omega + b \sin \omega).$$

Перейдемъ къ Декартовымъ координатамъ. Пусть A будетъ началомъ координатъ, а прямая AO осью абсциссъ. Пользуясь извѣстными формулами $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg} \omega = \frac{y}{x}$, $\varrho \cos \omega = x$, $\varrho \sin \omega = y$, получимъ изъ предыдущаго уравненія:

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 (ax + by);$$

значитъ, двулистникъ есть также кривая четвертаго порядка. Въ началѣ координатъ онъ имѣетъ тройную точку, эта же точка служитъ точкой возврата для вѣтвей его KA и LA, которыя касаются въ ней оси ординатъ.

Двулистниками называются также кривыя, опредѣляемыя уравненіями вида:

$$y = \pm \sqrt{x}[\sqrt{p - ax} \pm \sqrt{r - bx}],$$

гдѣ a, b, r и p суть нѣкоторыя данныя числа.

Если положить $a = 0$, $r = p$, $b = 1$, то получимъ частный случай:

$$y = \pm [\sqrt{px} \pm \sqrt{x(p - x)}].$$

Эту кривую изучалъ Крамеръ и назвалъ ее прямымъ двулистникомъ. Вотъ простой способъ построенія, ея данный Брокаромъ.

Построимъ окружность съ діаметромъ $\overline{AO} = p$. Прямая OA пусть будетъ осью абсциссъ, а прямая, касающаяся окружности въ точкѣ O, — осью ординатъ. Изъ произвольной точки окружности B опустимъ перпендикуляръ BP на діаметръ, и на этомъ перпендикулярѣ по обѣ стороны отъ точки B отложимъ по отрѣзку ($\overline{BM}$ и $\overline{BM'}$), равному $\overline{OB}$. Геометрическое мѣсто точекъ M и M' и есть прямой двулистникъ. Въ самомъ дѣлѣ:

$$x = OP, \quad y = \pm [PB \pm OB];$$

но PB, какъ высота прямоугольнаго треугольника OBA, есть средняя пропорціональная между отрѣзками его гипотенузы $OP = x$ и $PA = p - x$; OB, какъ катетъ, есть средняя пропорціональная между гипотенузой $PA = p$ и прилежащимъ къ нему отрѣзкомъ $OP = x$; слѣдовательно,

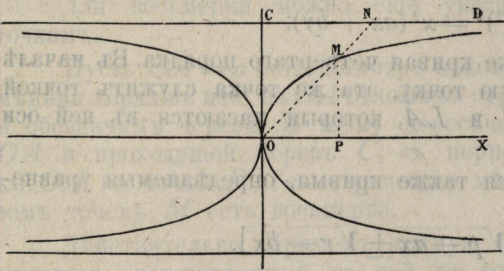
$$y = \pm [\sqrt{x(p - x)} \pm \sqrt{px}].$$

7. Каппа. На разстояніи $\overline{OC} = a$ отъ оси абсциссъ проведемъ прямую CD, ей параллельную. На CD отложимъ произвольный отрѣзокъ CN, а на ON отрѣзокъ $\overline{OM} = \overline{CN}$. Будемъ разсматривать кривую, представляющую собой геометрическое мѣсто построенныхъ такимъ образомъ точекъ M; изученіемъ ея занимался Барроу (Barrow, 1669); вслѣдствіе ея сходства съ буквой K, Обри назвалъ ее каппой.

Легко видѣть, что прямая CD и прямая, симметричная съ ней относительно оси x-овъ, являются ассимптотами кривой; кривая проходитъ черезъ начало координатъ и симметрична относительно оси y-овъ.

Упомянемъ еще о слѣдующемъ построеніи каппы, принадлежащемъ Бернулли.

Изъ конца O діаметра OA круга радіуса a проведемъ произвольную хорду OB. Черезъ середину дуги OB проведемъ прямую параллельную діаметру OA. Геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія этой прямой съ хордой OB есть вѣтвь каппы.



Фиг. 6.

Уравненіе разсматриваемой кривой въ полярныхъ координатахъ получается очень просто. Въ самомъ дѣлѣ (фиг. 6):

$$\varrho = \overline{OM} = \overline{CN} = a \,.\, ctg\, \theta.$$

Уравненіе въ Декартовыхъ координатахъ можно получить изъ разсмотрѣнія подобныхъ треугольниковъ OMP и ONC, изъ которыхъ имѣемъ: $\overline{OP} : \overline{NC} = \overline{MP} : \overline{CO}$, откуда:

$$y^2 (x^2 + y^2) = a^2 x^2.$$

Какъ видно, каппа кривая четвертаго порядка. Изъ свойствъ ея приведемъ слѣдующее.

Площадь, ограниченная кривой, осью ординатъ и одной изъ ассимптотъ, въ четыре раза меньше площади круга, съ радіусомъ, равнымъ разстоянію между осью абсциссъ и ассимптотой, т. е. $A = \frac{1}{4} \pi a^2$.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Теорія движенія луны.

(Исторія и современное состояніе этого вопроса).

С. Ньюкома.

Докладъ, прочитанный въ общемъ собраніи IV-го международнаго конгресса въ Римѣ.

Среди проблемъ небесной механики задача о движеніи луны занимаетъ особенно важное мѣсто какъ вслѣдствіе своей трудности, такъ и благодаря тѣмъ многочисленнымъ интереснымъ вопросамъ, къ которымъ она иногда приводитъ. Здѣсь мы имѣемъ передъ собой прекрасный примѣръ тѣхъ общихъ методовъ науки, посредствомъ которыхъ мы можемъ предсказывать явленія природы. Для достиженія этой цѣли нужно сначала путемъ наблюденій установить законы природы, а затѣмъ разобрать тѣ отдѣльныя условія, при которыхъ эти законы проявляются; наконецъ, путемъ разсужденія, посредствомъ дедукціи, нужно предсказывать результаты этихъ законовъ. Мы всегда находимся въ поискахъ истины. Послѣ того, какъ мы сдѣлаемъ тѣ или иныя предсказанія, мы должны, при помощи новыхъ наблюденій, провѣрить, были ли они вѣрны. Если окажется различіе между результатами наблюденій и тѣмъ, что мы предсказали на основаніи теоріи, то нужно видоизмѣнить либо форму законовъ, либо тѣ данныя, на которыхъ мы основывали наше предсказаніе.

Въ небесной механикѣ эти методы изслѣдованія находятъ себѣ наиболѣе совершенное примѣненіе. Основнымъ закономъ здѣсь является законъ всемірнаго тяготѣнія, выражающійся формулой Ньютона; фактами, точнѣе говоря данными, являются элементы орбитъ планетъ, ихъ массы и всѣ тѣ условія, которыя могутъ измѣнять ихъ движенія. Послѣ того, какъ былъ провозглашенъ законъ Ньютона, рядъ великихъ геометровъ, какъ Даламберъ (D'Alembert), Клеро (Clairaut), Лапласъ (Laplace), Лагранжъ (Lagrange), Эйлеръ (Euler), Плана (Plana), Дамуазо (Damoiseau), Ганзенъ (Hansen) — я не говорю о живыхъ — расширили и усовершенствовали методы дедукціи; въ то же время корифеи чистой астрономіи безпрерывно исправляли астрономическіе элементы при помощи наблюденій. Можно сказать, что общимъ результатомъ всѣхъ этихъ трудовъ является полное согласіе опыта съ теоріей, за исключеніемъ двухъ только случаевъ. Тѣ небольшія различія, которыя еще существуютъ между наблюденіями и выводами теоріи, будутъ, безъ сомнѣнія, уничтожены небольшими исправленіями элементовъ.

Исключенія, о которыхъ я только-что говорилъ, суть движенія планеты Меркурія и луны. Что касается Меркурія, то для объясненія этого уклоненія приходится только допустить существованіе неизвѣстныхъ массъ между Меркуріемъ и солнцемъ. Вопросъ о существованіи такихъ массъ не относится къ предмету настоящаго доклада. Что же касается луны, то здѣсь мы стоимъ лицомъ къ лицу съ настоящей загадкой, — явленіемъ, которое какъ бы указываетъ намъ на дѣйствіе неизвѣстной причины, достаточно могущественной для того, чтобы измѣнить либо движеніе луны, либо вращеніе земли вокругъ своей оси. Чтобы дать нѣкоторое понятіе о трудности и важности вопросовъ, затронутыхъ этимъ различіемъ между вычисленнымъ и наблюдаемымъ движеніемъ луны, нужно вкратцѣ дать общій очеркъ современнаго состоянія теоріи движенія нашего спутника.

I.

Цѣлью всякой теоріи небесныхъ движеній является построеніе алгебраическихъ формулъ, выражающихъ координаты тѣла въ функціяхъ времени. При помощи этихъ формулъ является возможность вычислить упомянутыя координаты въ любой данный моментъ. Общимъ закономъ является законъ всемірнаго тяготѣнія; онъ выражается въ формѣ трехъ дифференціальныхъ уравненій, въ которыхъ время вводится, какъ независимая перемѣнная. Весь ходъ дедукціи состоитъ въ интегрированіи этихъ уравненій, которое приводитъ къ выраженію трехъ координатъ тѣла въ функціяхъ времени и шести произвольныхъ постоянныхъ величинъ, которыя вводятся процессомъ интегрированія. Этими послѣдними величинами являются элементы орбиты, проходимой тѣломъ. Онѣ не даны a priori; ихъ нужно опредѣлить способомъ, опирающимся на наблюденія.

Полное интегрированіе оказывается, однако, невозможнымъ, за исключеніемъ тѣхъ случаевъ, когда идетъ вопросъ только о двухъ тѣлахъ, изъ которыхъ одно служитъ центромъ притяженія, а координаты другого требуется опредѣлить. Тогда рѣшеніе даетъ движеніе по эллипсу, происходящее по законамъ Кеплера. Если же мы присоединимъ третье тѣло, то нужно слѣдовать методу послѣдовательныхъ приближеній.

Когда дѣло касается луны, то главнымъ тѣломъ, по отношенію къ которому мы разсматриваемъ движеніе, является земля; ея центръ принимается за начало координатъ. Если бы никакая возмущающая сила не оказывала на луну и на землю различнаго дѣйствія, то орбита луны была бы эллипсомъ Кеплера. Но возмущающее дѣйствіе солнца настолько велико и проблема опредѣленія результатовъ его дѣйствія на положеніе луны такъ сложна и трудна, что генія всѣхъ великихъ геометровъ прошлаго не было достаточно для того, чтобы найти болѣе или менѣе точное рѣшеніе вопроса, которое удовлетворило бы потребностямъ современной астрономіи. Чтобы имѣть возможность оцѣнить уже найденныя рѣшенія, замѣтимъ, что они могутъ быть двухъ родовъ: одни — алгебраическаго, общаго характера, другія — численныя. Въ первомъ случаѣ координаты выражаются, какъ явныя функціи элементовъ, во второмъ — численныя значенія элементовъ вводятся до интегрированія.

Алгебраическаго рѣшенія въ конечномъ видѣ не существуетъ; малая величина нѣкоторыхъ элементовъ позволяетъ для луны дать рѣшеніе, которое можно развернуть въ безконечный рядъ членовъ, расположенныхъ по степенямъ и произведеніямъ этихъ малыхъ элементовъ. За эти элементы можно принять: e, e' — эксцентриситеты двухъ орбитъ; $\gamma = sin\, {}^1/_2\, I$ (наклоненіе орбиты луны къ эклиптикѣ); m — отношеніе періода луны къ періоду земли.

Коэффиціенты этого ряда суть періодическія функціи времени; задача будетъ рѣшена, если мы вычислимъ эти коэффиціенты съ достаточной степенью точности. Среди геометровъ прошлаго, занимавшихся разрѣшеніемъ этой проблемы, можно назвать Лапласа, Эйлера, Плана, де Понтекулапа (de Pontécoulape), Лёббока (Lubbock), Делонэ (Delaunay). Ни одинъ изъ нихъ не довелъ задачу до конца, такъ какъ представляется врядъ ли возможнымъ, въ продолженіе человѣческой жизни, вычислить всѣ коэффиціенты этого ряда съ тою точностью, которую требуетъ наша астрономія.

Въ числѣ работъ этихъ ученыхъ работа Делонэ заслуживаетъ нашего особеннаго вниманія. Его методъ является развитіемъ метода, который былъ предложенъ Лагранжемъ, а именно—варіаціи произвольныхъ постоянныхъ. Этотъ методъ Делонэ можетъ быть охарактеризованъ, какъ такое преобразованіе дифференціальныхъ уравненій, при которомъ произвольныя постоянныя перваго интегрированія, т. е. эллиптическіе элементы, становятся новыми перемѣнными. Первыя производныя этихъ перемѣнныхъ по времени разлагаются въ безконечные ряды, члены которыхъ, въ свою очередь, являются функціями самихъ перемѣнныхъ и времени. Теорія разложенія въ ряды и интегрированія дифференціальныхъ уравненій при помощи послѣдовательныхъ приближеній хорошо извѣстна еще со временъ Лагранжа. Этотъ методъ дѣйствительно примѣнимъ къ планетамъ; но когда приходится прилагать его къ лунѣ, то мы встрѣчаемъ большія затрудненія вслѣдствіе значительнаго числа приближеній, необходимыхъ въ этомъ случаѣ.

Для поясненія идеи метода Делонэ обозначимъ чрезъ a нѣкоторый элементъ эллиптическаго движенія луны. Возмущающая сила, дѣйствующая на луну, производитъ измѣненіе этого элемента, которое можно выразить формулой:

$$\frac{da}{dt} = P_0 + P_1 + P_2, \tag{1}$$

гдѣ P суть функціи элементовъ и времени, за исключеніемъ P_0, которое не содержитъ времени въ явномъ видѣ. Идея Делонэ состоитъ въ томъ, чтобы сначала взять постоянное число P_0 и одинъ изъ перемѣнныхъ членовъ,—напримѣръ, P_1,—и совершить полное интегрированіе, опуская всѣ другіе члены. Тогда нашъ элементъ становится функціей шести новыхъ произвольныхъ постоянныхъ a_1, b_1, $c_1 \ldots$ и времени t:

$$a = f(a_1,\ b_1,\ c_1 \ldots\ t). \tag{2}$$

Чтобы принять во вниманіе остальные члены, Делонэ предполагаетъ, что произвольныя постоянныя $a_1, b_1 \ldots$ являются новыми перемѣнными; первыя ихъ производныя по времени становятся функціями вида (1), но безъ члена P_1. Новое интегрированіе, въ которомъ принимаются въ разсчетъ только P_0 и P_2, позволяетъ выразить a_1, $b_1 \ldots$ въ функціяхъ t и новыхъ шести произвольныхъ постоянныхъ a_2, $b_2 \ldots$ Эти послѣднія становятся, въ свою очередь, перемѣнными, и такъ дальше; въ концѣ концовъ остающіеся члены такъ малы, что ихъ квадратами и произведеніями можно пренебречь. Тогда уже интегрированіе оставшихся членовъ выполняется простой квадратурой. Такимъ образомъ, задача сводится къ производству цѣлаго ряда алгебраическихъ операцій, содержащихъ въ себѣ безконечное количество повторныхъ подстановокъ; но эти операціи постоянно приближаютъ насъ все болѣе и болѣе къ точному значенію перемѣнныхъ.

Можно только изумляться генію, который сумѣлъ сдѣлать такое примѣненіе блестящаго метода Лагранжа. Его примѣненіе не ограничивается луной; онъ можетъ даже, какъ это показали Писсеранъ (Pisserand), Гилль (Hill) и другіе, помочь намъ сдѣлать очень важный шагъ впередъ въ теоріи планетъ.

Великое произведеніе Делонэ, „Теорія движенія луны", это — столь чудесный памятникъ алгебраическаго и числового вычисленія, что кажется даже невѣроятнымъ, чтобы одинъ человѣкъ былъ въ состояніи его воздвигнуть. Но, хотя результаты Делонэ превосходятъ по точности всѣ другія алгебраическія изысканія въ теоріи луны, тѣмъ не менѣе они не удовлетворяютъ потребностямъ современной астрономіи. Въ окончательномъ результатѣ коэффиціентъ каждаго члена самъ является суммой безконечнаго ряда, члены котораго расположены по степенямъ и произведеніямъ небольшихъ чиселъ e, e', γ и m, о которыхъ я уже выше говорилъ. Этотъ рядъ, достаточно быстро сходится для e, e' и γ. Но сходимость членовъ по отношенію къ m вслѣдствіе большихъ значеній коэффиціентовъ большей частью такъ медленна, что становится почти невозможнымъ вычислить всѣ члены ряда, которые имѣютъ нѣкоторое значеніе. Возможно даже, что разложеніе по степенямъ m является расходящимся для нѣкоторыхъ изъ членовъ. Во всякомъ случаѣ вполнѣ ясно, что теорія Делонэ развита по отношенію къ m далеко не такъ, какъ это нужно было бы въ виду нашихъ современныхъ потребностей.

II.

Методы, о которыхъ я говорилъ до сихъ поръ, являются чисто алгебраическими и вмѣстѣ съ тѣмъ общими. Иначе говоря, e, e', γ и m сохраняютъ свои алгебраическія и общія значенія; задача состоитъ въ томъ, чтобы выразить координаты луны въ явныхъ функціяхъ времени. Чтобы вычислить координаты, достаточно подставить въ алгебраическія выраженія числовыя величины элементовъ, уже полученныя при помощи наблюденій. Въ виду трудности алгебраическихъ разложеній, о которыхъ я говорилъ, нужно попытаться построить формулы движенія луны при помощи подстановки числовыхъ величинъ элементовъ до интегрированія. Такимъ образомъ, мы находимъ частную форму уравненій движенія, вмѣсто общаго рѣшенія задачи. Дамуазо, первый, какъ мнѣ кажется, воспользовался этими методами. Но наиболѣе важной численной теоріей является теорія Ганзена; на ней основаны таблицы луны, которыми пользовались въ продолженіе полустолѣтія. Въ принципѣ численный методъ Ганзена довольно простъ. Во вторыхъ членахъ дифференціальныхъ уравненій движенія нужно подставлять численныя приближенныя значенія; затѣмъ при помощи интегрированія можно найти значенія элементовъ и координатъ, которыя, какъ можно думать, будутъ болѣе точными, чѣмъ тѣ, которыми мы уже пользовались. Можно повторить этотъ процессъ сколько угодно разъ или, вѣрнѣе, до тѣхъ поръ, пока результаты перестаютъ измѣняться при дальнѣйшемъ повтореніи того же пріема. Слѣдуя этому методу, Ганзенъ, вычисливъ величины неравенства, которыми онъ пользовался въ своихъ „Таблицахъ луны", вновь принялся за вычисленія и пришелъ къ значеніямъ нѣкоторыхъ изъ членовъ, мало отличающимся отъ значенія таблицъ. Однако, точность результатовъ, полученныхъ этимъ способомъ, не гарантируетъ еще ихъ отъ возраженій.

Кромѣ того, чисто числовой методъ не удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ теоріи, потому что производныя координатъ по элементамъ не могутъ быть вычислены при помощи подобныхъ выраженій. Слѣдовательно, ни метода Делонэ ни Ганзена нельзя считать вполнѣ удовлетворительными.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Преподаваніе математики въ связи съ преподаваніемъ естественныхъ наукъ.

Докладъ *Профессора Дж. Перри.*

Въ Лондонѣ въ засѣданіи, состоявшемся 28 ноября 1908 г. подъ предсѣдательствомъ Брайана (Bryan), президента Математическаго Общества (Mathematical Association), въ присутствіи многочисленныхъ слушателей, состоявшихъ, главнымъ образомъ, изъ членовъ Математическаго Общества и членовъ Союза Лондонскихъ неначальныхъ учителей (Federated Associations of London Non-primary Teachers), Перри былъ сдѣланъ докладъ на тему о преподаваніи математики въ связи съ преподаваніемъ естественныхъ наукъ. Какъ извѣстно, Перри уже много лѣтъ разрабатываетъ вопросъ о реформѣ преподаванія математики въ Англіи, принимая за основаніе ту связь, которая существуетъ между математикой, физикой и инженерными науками*). Его точка зрѣнія ясно выражается въ этомъ докладѣ, главныя положенія котораго мы приводимъ ниже. Мы даемъ также краткій отчетъ о преніяхъ, вызванныхъ докладомъ.

Содержаніе доклада. Перри дѣлаетъ различіе между математикомъ, который стремится только къ тому, чтобы сдѣлать вкладъ въ область чистой науки, и математикомъ-практикомъ („scientist", какъ онъ его называетъ), который занимается естественными науками, въ томъ числѣ математической физикой, или же преподаетъ математику студентамъ, посвящающимъ себя работѣ въ области физики. Научное образованіе должно преслѣдовать слѣдующія цѣли: дать каждому въ руки научный методъ; учить ребенка или взрослаго примѣнять выводы науки; подготовлять будущихъ преподавателей математики и естественныхъ наукъ; воспитывать тѣхъ отдѣльныхъ чистыхъ математиковъ и математиковъ-практиковъ, которымъ, быть можетъ, суждено выдвинуться впослѣдствіи. Перри находитъ, что начальное обученіе

*) См. статью: Силлабусъ курса элементарной математики, рекомендуемый „Британской ассоціаціей" „Вѣстникъ" №№ 325, 326.

должно быть одинаковымъ во всѣхъ этихъ случаяхъ. Далѣе онъ устанавливаетъ разницу въ научныхъ методахъ, употребляемыхъ чистымъ математикомъ и математикомъ - естественникомъ въ одномъ и томъ же случаѣ. Первый, какъ фанатикъ, настаиваетъ на особенной строгости доказательства, даже въ деталяхъ, второй считаетъ эту строгость доказательства не только излишней, но даже вредной въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ доказательства даются опытомъ. Такъ, напримѣръ, примѣнимость операторовъ Гивисайда (Heavisid) не можетъ быть доказана со всей строгостью, но Перри напоминаетъ, что во времена Лейбница, Бернулли, Лагранжа и Фурье употребляли очень мощные методы анализа, а строгое обоснованіе ихъ было дано гораздо позже.

Перри на множествѣ примѣровъ, показываетъ что не нужно удѣлять особеннаго вниманія доказательствамъ, такъ какъ наиболѣе полезное для математика - практика — это дѣлать возможно больше упражненій надъ логариѳмами, теоремой Тейлора, разложеніемъ въ ряды Фурье и надъ функціями Бесселя. Дедуктивная геометрія и ея методы должны быть преподаваемы только въ университетѣ, такъ какъ ученики съ средней подготовкой скорѣе поймутъ математику при посредствѣ естественныхъ наукъ, между тѣмъ какъ строго логическій выводъ математика останется имъ непонятенъ. Въ доказательство Перри приводитъ успѣхи въ прикладной математикѣ, достигаемые учениками въ техническихъ школахъ. Чтобы добиться этой реформы, слѣдовало бы прежде всего устранить чистыхъ математиковъ отъ обязанностей экзаменаторовъ. Цѣль преподаванія математики не въ томъ, чтобы давать большое количество формулъ для упрощенія вычисленій, а въ томъ, чтобы обучать научнымъ методамъ. Насколько нехороши чисто механическія вычисленія, настолько же плохи и безконечныя доказательства. Такъ, напримѣръ, понятія о скорости, ускореніи, работѣ и моментѣ силы трудны, какъ понятія отвлеченныя, но легко усваиваются учащимися, если ихъ выяснять на конкретныхъ примѣрахъ.

Докладчикъ находитъ, что при первоначальномъ обученіи всѣ отрасли математики должны соприкасаться другъ съ другомъ и сливаться въ одно цѣлое и поэтому должны быть преподаваемы однимъ лицомъ, которое въ младшихъ классахъ было бы и класснымъ руководителемъ. Такимъ образомъ, не было бы спеціалистовъ, каждый преподавалъ бы все, — вѣрнѣе, былъ бы въ состояніи все преподавать. Всякій преподаватель долженъ быть способенъ преподавать полностью двѣ отрасли и долженъ быть настолько освѣдомленнымъ въ другихъ областяхъ, чтобы во всѣхъ случаяхъ имѣть возможность давать разумныя объясненія своимъ ученикамъ. Спеціалисты же при этихъ условіяхъ преподавали бы исключительно въ университетѣ. Перри говоритъ о томъ, какъ неправильно были истолкованы и примѣнены большинствомъ преподавателей реформы, предложенныя „Британской ассоціаціей": они не поняли духа предложеній. Затѣмъ Перри рисуетъ картину, каково должно быть, по системѣ д-ра Армстронга (Armstrong), математическое и научное образованіе мальчика среднихъ способностей; идеалъ, пока недостижимый. Въ заключеніе Перри говоритъ, что желательно было бы открытіе основныхъ и параллельныхъ классовъ и увеличеніе содержанія преподавателей.

Пренія. Президентъ Брайанъ въ остроумной рѣчи защищаетъ математиковъ, къ которымъ онъ причисляетъ и себя. Онъ не считаетъ ихъ отвѣтственными за существующіе въ настоящее время недостатки. Онъ противъ того, чтобы математики были устранены отъ вмѣшательства въ экзамены, какъ и отъ политики: политики только выиграли бы, если бы они больше были математиками. Что касается вопросовъ о предметахъ и методахъ обученія и преподаванія, то его собственный опытъ привелъ его къ тѣмъ же выводамъ, что Перри. Однако, по его мнѣнію, учитель долженъ быть въ достаточной степени спеціалистомъ, чтобы имѣть возможность судить о потребностяхъ ученика въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, что было бы немыслимымъ для преподавателя, имѣющаго лишь поверхностныя свѣдѣнія по всѣмъ отраслямъ. Онъ заканчиваетъ свою рѣчь благодарностью проф. Перри за его долгую работу въ борьбѣ за прогрессъ.

Годфрей (Godfrey), хотя и самъ математикъ, придерживается того взгляда, что элементарная математика только выиграла бы въ достоинствѣ, если бы на нее смотрѣли, какъ на средство къ изученію другихъ наукъ. Геометрія, правда, занимаетъ особое мѣсто. Геометрическія свойства тѣлъ являются принадлежностью матеріи точно такъ же, какъ физическія. Годфрей хочетъ знать, что понимаетъ Перри подъ вводными уроками. Онъ считалъ бы желательнымъ, чтобы механика не отдѣлялась отъ гидростатики, и чтобы эти отдѣлы, а также и оптика, находились въ вѣдѣніи математика, какъ въ своей опытной части, такъ и въ теоретической. Это дало бы преподавателю естественныхъ наукъ выигрышъ во времени для преподаванія другихъ предметовъ.

Джексонъ (Jackson), отмѣчая тѣ пункты, въ которыхъ онъ согласенъ съ Перри, находитъ, что главное не методъ, а преподаватель, и что во всѣхъ спеціальностяхъ нужно бороться съ невнимательностью, недобросовѣстностью, поверхностностью и небрежностью преподавателя. Онъ хотѣлъ бы знать, что понимаетъ Перри подъ практической математикой; онъ думаетъ, что дефекты вызываются, главнымъ образомъ, неумѣніемъ излагать предметъ. Такъ, напримѣръ, вопросы, относящіеся къ рѣшенію треугольниковъ, могутъ быть объяснены ученикамъ такъ, чтобы имъ была ясна ихъ полезность и чтобы употребленіе формулъ для упрощенія вычисленій имъ казалось естественнымъ.

Альфредъ Лоджъ (A. Lodge) придерживается того мнѣнія, что въ младшихъ классахъ нужно обращать вниманіе на примѣненіе математики къ другимъ наукамъ, но что у учениковъ старшихъ классовъ воображеніе до извѣстной степени замѣнитъ недостатокъ практическихъ работъ. Въ младшихъ же классахъ было бы полезнѣе преподаваніе математики опытнымъ путемъ. При выборѣ опытовъ въ этомъ случаѣ слѣдовало бы руководиться требованіями математики, а не естествознанія. Между преподавателемъ математики и преподавателемъ естественныхъ наукъ могло бы произойти соглашеніе для одновременной разработки сходныхъ вопросовъ въ обѣихъ областяхъ.

На практической и математической точкѣ зрѣнія останавливается также Добсонъ (W. J. Dobson). Онъ въ общихъ положеніяхъ согласенъ съ Перри, но считаетъ, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ, какъ, напримѣръ, въ вопросѣ, касающемся дедуктивной геометріи, Перри впадаетъ въ преувеличеніе. Онъ указываетъ на пользу преподаванія механики, такъ какъ она, косвеннымъ образомъ, позволяетъ давать много свѣдѣній по тригонометріи. Онъ указываетъ, какъ легко, даже съ грубыми инструментами, дать дѣтямъ понятія о вѣсѣ, мѣрахъ длины, законахъ тяготѣнія и т. д. Заканчивая свою рѣчь, онъ указываетъ на благотворное вліяніе Перри на преподаваніе математики и на общеніе математиковъ, естественниковъ и инженеровъ между собой.

Тёкей (Tuckey) находитъ, что совмѣщенія въ одномъ лицѣ преподавателя двухъ предметовъ еще недостаточно для достиженія единства между этими предметами. Трудность первоначальнаго преподаванія заключается именно въ достиженіи этого единства. Онъ находитъ, что собраніе оказало бы большую услугу, если бы разработало въ этомъ направленіи программы и предложило опыты, не требующіе особенно сложныхъ вычисленій.

Армстронгъ вполнѣ согласенъ со взглядами Перри и желалъ бы ихъ скорѣйшаго осуществленія. Хотя онъ и находитъ, что слишкомъ опредѣленно выраженныя указанія рискуютъ въ рукахъ преподавателей обратиться въ законченный, неспособный къ дальнѣйшему развитію, методъ, но все же онъ считаетъ, что пришло время высказать ихъ вполнѣ ясно. Ему часто приходилось наблюдать, что даже лица, примѣняющія собственные методы преподаванія, не вполнѣ ясно ихъ понимали; та же участь постигла и методъ Перри. По мнѣнію Армстронга, наиболѣе существеннымъ является подготовленіе спеціалистовъ. Среднiй ученикъ и ученица не достигаютъ высокаго интеллектуальнаго развитія, а потому слѣдуетъ вести преподаваніе, не задаваясь цѣлью поднять учащихся до высокаго уровня, такъ какъ они его все равно не достигнутъ, а исключительно сообразуясь съ житейскими требованіями. Каждый преподаватель обучаетъ, не сообразуясь съ преподаваніемъ товарищей. Нужно руководящее вліяніе, которое направляло бы всѣхъ преподавателей къ одной цѣли, подобно тому, какъ рабочіе одной и той же фабрики трудятся надъ общимъ дѣломъ. Слѣдовало бы, чтобы преподаватели и преподавательницы старались стать на уровень пониманія своихъ учениковъ.

Нённъ (P. Nunn) возращается снова къ вопросу, должно ли преподаваніе математики вытекать изъ другихъ наукъ, какъ это, повидимому, считаетъ желательнымъ Перри. Это возможно лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда имѣешь дѣло съ физическими опытами, какъ-то опредѣленіе плотности и простѣйшія изысканія въ области оптики и механики. Свою теорію онъ подкрѣпляетъ примѣромъ, почерпнутымъ изъ собственнаго опыта при преподаваніи въ одной первоначальной школѣ, гдѣ онъ примѣнялъ методъ Перри. По мнѣнію Нённа, знакомство съ исторіей математики приноситъ очень большую пользу при изученіи наилучшихъ методовъ математики.

Отвѣчая на сдѣланныя ему возраженія, Перри указываетъ, что его взгляды основаны на опытахъ, которые онъ производилъ въ различныхъ гимназіяхъ и школахъ, гдѣ онъ преподавалъ. Онъ считаетъ желательнымъ увеличеніе окладовъ и открытіе параллельныхъ и основныхъ классовъ, а также устраненіе отъ экзаменовъ спеціалистовъ и постороннихъ школѣ лицъ. Что касается выясненія отдѣльныхъ вопросовъ, то Перри находитъ, что ихъ слѣдуетъ болѣе или менѣе подробно разрабатывать лишь тогда, когда въ этомъ ощущается потребность при прохожденіи другихъ курсовъ. Эта система проводится уже въ курсахъ прикладной механики въ Инженерныхъ Школахъ.

Вопросы математики и физики должны соприкасаться и быть неразрывно связаны другъ съ другомъ. Перри, примѣняющій этотъ методъ со своими учениками, достигъ отличныхъ результатовъ.

Новое предложеніе о кругѣ.

А. Мюллера.

Въ журналѣ „Berichten über die Verhandl. der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften“ *) Карлъ Нейманъ (C. Neumann) сообщаетъ слѣдующее въ высшей степени интересное и, повидимому, новое предложеніе о кругѣ.

Если черезъ точку, находящуюся внутри круга, проведены двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя, то площадь круга выражается формулой:

$$I = \frac{\pi}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2),$$

гдѣ α, β, γ, δ суть отрѣзки, отсѣкаемые кругомъ на проведенныхъ прямыхъ.

Нейманъ получаетъ это предложеніе, какъ частный случай общаго результата, къ которому его привели изслѣдованія о логариѳмическомъ потенціалѣ нѣкоторой овальной поверхности. Этому пути, конечно, нельзя слѣдовать въ школѣ. Но въ виду того, что это предложеніе, благодаря своей простотѣ и изяществу, кажется намъ весьма подходящимъ для школы, мы позволяемъ себѣ сообщить два совершенно элементарныхъ доказательства его.

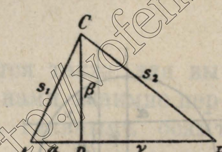


Рис. 1.

I. Возьмемъ треугольникъ ABC (рис. 1); пусть $CD = \beta$ будетъ его высота по отношенію къ основанію AB, а α и γ пусть будутъ отрѣзки, на которые высота дѣлитъ основаніе. Согласно извѣстной теоремѣ, имѣемъ:

$$s_1 . s_2 = \beta . 2r,$$

гдѣ r есть радіусъ круга описаннаго.

*) Math.-Phys. Klasse. 60 Bd. Leipzig, 1908. I. S. 56.

Изъ этого равенства слѣдуетъ:

$$2r = \frac{s_1 . s_2}{\beta},$$

$$4r^2 = \frac{s_1^2 . s_2^2}{\beta^2}.$$

Далѣе, такъ какъ

$$s_1^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

и

$$s_2^2 = \beta^2 + \gamma^2,$$

то

$$4r^2 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\beta^2 + \gamma^2)}{\beta^2}. \quad (1)$$

Пусть E будетъ точка пересѣченія продолженія линіи CD съ описанной около треугольника ABC окружностью и пусть отрѣзокъ $DE = \delta$. Тогда, согласно теоремѣ о хордахъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ, имѣемъ:

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta}$$

и

$$\frac{\delta^2}{\gamma^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}.$$

На основаніи извѣстной теоремы изъ теоріи пропорцій получаемъ:

$$(\delta^2 + \gamma^2) : (\alpha^2 + \beta^2) = \gamma^2 : \beta^2.$$

Примѣняя ту же теорему еще разъ, находимъ:

$$(\delta^2 + \gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2) : (\gamma^2 + \beta^2) = (\alpha^2 + \beta^2) : \beta^2,$$

или

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\beta^2 + \gamma^2)}{\beta^2}. \quad (2)$$

Изъ равенствъ (2) и (1) вытекаетъ:

$$4r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$$

и, наконецъ,

$$I = \frac{\pi}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2).$$

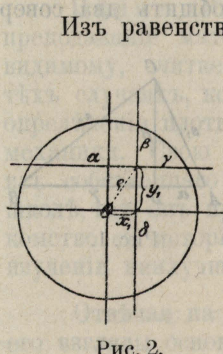


Рис. 2.

II. Проведемъ черезъ центръ круга двѣ прямыя, параллельныя проведеннымъ нами въ кругѣ взаимно-перпендикулярнымъ хордамъ, и примемъ ихъ за оси координатъ (рис. 2.) Координаты точки пересѣченія хордъ обозначимъ черезъ x_1 и y_1. Тогда, очевидно, имѣютъ мѣсто слѣдующія четыре равенства:

$$(\gamma + x_1)^2 + y_1^2 = r^2,$$

$$(\alpha - x_1)^2 + y_1^2 = r^2,$$

$$x_1^2 + (\beta + y_1)^2 = r,$$

$$x_1^2 + (\delta - y_1)^2 = r^2.$$

Раскрывая скобки въ каждомъ изъ этихъ равенствъ и складывая ихъ почленно, находимъ:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 4\varrho^2 - 2x_1(\alpha - \gamma) - 2y_1(\delta - \beta) = 4r^2, \quad (1)$$

гдѣ

$$\varrho^2 = x_1^2 + y_1^2. \quad (2)$$

Далѣе, какъ нетрудно убѣдиться,

$$2x_1 = (\alpha - \gamma) \quad (3)$$

и

$$2y_1 = (\delta - \beta). \quad (4)$$

Пользуясь равенствами (3) и (4), мы можемъ придать равенству (1) видъ:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 4\varrho^2 - 4x_1^2 - 4y_1^2 = 4r^2.$$

Но, такъ какъ, согласно равенству (2),

$$4\varrho^2 - 4x_1^2 - 4y_1^2 = \varrho^2 - (x_1^2 + y_1^2) = 0,$$

то

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 4r^2$$

и

$$I = \frac{\pi}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2).$$

Найденное равенство можно разсматривать, какъ обобщеніе обычнаго равенства, служащаго для вычисленія площади круга:

$$I = r^2\pi,$$

ибо послѣднее есть частный случай перваго, а именно тотъ случай, когда

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta.$$

Само собою разумѣется, что эта формула годится также для вычисленія площади эллипса; при этомъ проводимыя нами взаимно перпендикулярныя прямыя должны быть параллельны главнымъ осямъ эллипса.

Международная Коммиссія по преподаванію математики.

Литература по реформѣ преподаванія математики и физики въ Западной Европѣ за послѣднее десятилѣтіе.

При составленіи докладовъ по вопросамъ, указаннымъ въ „Предварительномъ докладѣ Центральнаго Комитета“ необходимо, конечно, ознакомиться съ литературой вопроса о постановкѣ и реформѣ преподаванія математики и физики въ Западной Европѣ. Мы считаемъ поэтому полезнымъ привести литературныя указанія по этому предмету, собранныя педагогической коммиссіей Союза Германскихъ естествоиспытателей и врачей*). Этотъ библіографическій матеріалъ мы будемъ помѣщать исподволь въ ближайшихъ нумерахъ журнала.

Общія сочиненія.

ОТДѢЛЬНЫЯ ИЗДАНІЯ:

1900. Jahresberichte über das höhere Schulwesen, herausgegeben von *C. Rethwisch.* 15 ff. Berlin 1900 ff. (См. въ частности статьи: Thaer, Tropfke, Matzdorff, Weise).

1902. *Lexis.* Die Reform des höheren Schulwesens in Preussen. Halle 1902.

Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts. Berlin 6—8 Juni 1900. Halle 1902.

1904. *Müller, Hugo.* Das höhere Schulwesen Deutschlands am Anfang des 20. Jahrhunderts. Stuttgart 1904.

1905. *Morsch, H.* Das höhere Lehramt in Deutscland und Österreich. Ein Beitrag zur vergleichenden Schulgeschichte und zur Schulreform. Leipzig 1905.

1906. **Handbuch** für Lehrer höherer Schulen, bearbeitet von A. Auler, O. Boerner usw. Leipzig 1906 **)

Darin Artikel: Rechnen und Mathematik von H. Müller; Der Unterricht in Physik von E. Grimsehl; Biologie von B. Landsberg; Chemie, Mineralogie und Geologie von B. Schmid.

Schröder, O., Die Ordnung des Studiums für das höhere Lehramt in Deutschland und die gesetzlichen Prüfungsbestimmungen in den einzelnen deutschen Bundesstaaten. Leipzig 1906.

---

*) См. „Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aertzte“, herausgegeben von A. Gutzmer in Halle. Leipzig. 1908.

**) См. рецензію въ № 13 „Вѣстника“.

1907. **Die Kultur der Gegenwart**, ihre Entwicklung uud ihre Ziele. Herausgegeben von P a u l H i n n e b e r g. Teil I, Abt. I: Die allgemeinen Grundlagen der Kultur der Gegenwart. Leipzig, 1907.

Въ частности: F. P a u l s e n. Das moderne Bildungswesen; G. S c h ö p p a, Das Volksschulwesen; A. M a t t h i a s, Das höhere Knabenschulwesen; H. G a u d i g, Das höhere Mädchenschulwesen; G. K e r s c h e n s t e i n e r, Das Fach und Fortbildungsschulwesen; F. P a u l s e n, Die geisteswissenschaftliche Hochschulausbildung; W. v. D y c k, Die naturwissenschaftliche Hochschulausbildung.

Horn, E., Das höhere Schulwesen der Staaten Europas. Eine Zusammenstellung der Stundenpläne. 2 Auflage. Berlin, 1907.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Іонизація воздуха ультра-фіолетовымъ свѣтомъ. (C. R. t. 145, p. 892—893, 1908). Извѣстные опыты Л е л а р а были повторены Б л о х о м ъ, который пришелъ къ убѣжденію, что такая іонизація возможна только въ случаѣ присутствія въ атмосферѣ фото-электрическихъ частицъ. Когда воздухъ очищенъ отъ пылинокъ, то явленіе почти не наблюдается.

Количественное опредѣленіе содержанія эманаціи радія въ атмосферѣ. (Am. I. Sc., v. 26). При охлажденіи атмосфернаго воздуха до температуры жидкаго воздуха было найдено, что находящаяся въ немъ эманація радія можетъ быть сгущена, а, значитъ, можетъ быть подсчитана и числовая ея величина. Опыты, произведенные въ этомъ направленіи, показали, что содержаніе эманаціи въ воздухѣ колеблется въ очень широкихъ предѣлахъ и зависитъ отъ различныхъ атмосферныхъ условій. Шесть наблюденій, произведенныхъ въ Чикаго, показали, что среднее количество эманаціи радія на 1 кб. см. воздуха можетъ быть выражено числомъ $1{,}0 \times 10^{-10}$ гр. радія.

Жизнь радія. (Am. I. Sc., v. 25). Вопросъ о продолжительности существованія радія вызвалъ не мало уже замѣтокъ на страницахъ спеціальныхъ журналовъ. Б о л т в у у д ъ (Boltwood), опредѣляя вѣсъ радія, полученнаго изъ различныхъ урановыхъ солей, пришелъ къ выводу, что дезинтеграція радія приблизительно равна $3{,}48 \times 10^4$ (года)^{1}. Такимъ образомъ, средняя продолжительность жизни радія даетъ періодъ около 2000 лѣтъ.

Зарядъ и природа α-лучей. (Roy. Soc. Proc. A. 81, 1908). Р е д г е р ф о р д ъ (Rutherford) и Г е й г е р ъ (Geiger) въ одной изъ своихъ замѣтокъ сообщали, что зарядъ каждой α-частицы можетъ быть опредѣленъ 91×10^{-10} электрост. единицами, при чемъ это опредѣленіе было сдѣлано на основаніи количества тепла, испускаемаго радіемъ; зарядъ же атома водорода даетъ около $4{,}1 \times 10^{-10}$ электрост. единицъ. Такимъ образомъ, явилась возможность вычисленія массы α-частицы, которая получилась равной 3,84,—число, довольно близкое къ вѣсу атома гелія. Авторы сообщенія вносятъ предположеніе, что изъ α-частицы, послѣ потери заряда, мы получаемъ атомъ гелія.

Накопленіе гелія за періодъ геологическаго времени. (Roy. Soc. Proc. A. 81, 1908). Нахожденіе минераловъ точнаго геологическаго возраста съ содержаніемъ нѣкотораго количества гелія — задача довольно трудная. Тѣмъ не менѣе было найдено, что фосфористыя костяныя вещества содержатъ въ себѣ довольно значительное количество радіоактивныхъ составляющихъ частей; ихъ же возрастъ легко можетъ быть опредѣленъ по той средѣ, въ которой они найдены. Эти вещества были подвергнуты дѣйствію кислотъ и было опредѣлено количество гелія. Тутъ же попутно С т р ё т ъ (Srutt) даетъ указаніе на возможность вычисленія наименьшаго возраста нѣкоторыхъ изъ минераловъ.

ЗАДАЧИ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 162 (5 сер.). Прямая, соединяющая середину основанія треугольника съ центромъ вписаннаго круга, равно отстоитъ отъ вершины треугольника и отъ точки, въ которой кругъ касается основанія треугольника.

С. Шатуновскій (Одесса).

№ 163 (5 сер.). Въ окружности проведены радіусы OM и ON. Провести хорду XY такъ, чтобы она окружностью и этими радіусами раздѣлилась на три равныя части.

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 164 (5 сер.). Пусть проекціи вершины A и центра тяжести G треугольника ABC на сторону BC суть D и E. Доказать, что

$$\overline{BD}^2-\overline{CD}^2=3(\overline{BE}^2-\overline{CE}^2).$$

В. Богомоловъ (Шацкъ).

№ 165 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x+y=1,\quad xy+z+v=3,\quad xv+yz=-\frac{1}{4},\quad zv=-\frac{13}{16}.$$

Б. Щиголевъ (Варшава).

№ 166 (5 сер.). Доказать, что число

$$2^{2n}+15n-1$$

кратно 9 при всякомъ цѣломъ и неотрицательномъ n.

(Заимств.).

№ 167 (5 сер.). Найти значеніе x, при которомъ выраженіе

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x$$

достигаетъ *maximum'а*.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 84 (5 сер.). *Рѣшить неравенство*

$$\frac{x^4-56x+95}{x^2-7x+10}>8.$$

(Заимств. изъ *L'Éducation mathématique*).

Перенося 8 съ обратнымъ знакомъ въ первую часть, приводимъ данное неравенство къ виду:

$$\frac{x^4-56x+95-8x^2+56x-80}{x^2-7x+10}=\frac{x^4-8x^2+15}{x^2-7x+10}=\frac{(x^2-3)(x^2-5)}{(x-2)(x-5)}>0.$$

Знаменатель дроби, стоящей въ лѣвой части преобразованнаго такимъ образомъ неравенства, не можетъ равняться нулю для тѣхъ значеній x, которыя ему удовлетворяютъ, а потому для этихъ значеній x выраженіе $(x-2)(x-5)$ положительно. Слѣдовательно, помножая обѣ части неравенства на $(x-2)(x-5)$, приводимъ его къ новому равносильному неравенству $(x^2-3)\ (x^2-5)(x-2)(x-5)>0$, или

$$[x-(-\sqrt{5})]\,[x-(-\sqrt{3})]\,(x-\sqrt{3})\,(x-2)\,(x-\sqrt{5})\,(x-5)>0, \quad (1)$$

гдѣ количества $(-\sqrt{5})$, $(-\sqrt{3})$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$, 5 расположены въ возрастающемъ порядкѣ. Если $x<-\sqrt{5}$, $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$, $2<x<\sqrt{5}$, $x>\sqrt{5}$, то въ лѣвой части неравенства (1) либо четное число сомножителей обратятся въ отрицательныя числа, либо всѣ будутъ положительны; наоборотъ, если x расположено въ одномъ изъ промежутковъ $[(-\sqrt{5}), (-\sqrt{3})]$, $(\sqrt{3}, 2)$, $(\sqrt{5}, 5)$, то нечетное число множителей неравенства (1) окажутся отрицательными, а потому и вся лѣвая часть получитъ отрицательное значеніе. Такимъ образомъ, неравенство (1), а вмѣстѣ съ нимъ и предложенное для рѣшенія неравенство удовлетворяется лишь для тѣхъ значеній x, которыя удовлетворяютъ одному изъ условій:

$$x<-\sqrt{5},\quad -\sqrt{3}<x<\sqrt{3},\quad 2<x<\sqrt{5},\quad x>\sqrt{5}.$$

С. Кудинъ (Москва); *П. Барановскій* (Фу-дзя-дзянъ, Манчжурія).

№ 104 (5 сер.). *Доказать слѣдующій признакъ дѣлимости на 7. Отбросивъ число, составленное двумя послѣдними цифрами числа, дѣлимость котораго на 7 мы желаемъ испытать, и удвоивъ оставшееся число, прикладываемъ къ результату удвоенія отброшенное раньше число. Дѣлимость или недѣлимость полученной такимъ образомъ суммы свидѣтельствуетъ о таковыхъ же свойствахъ даннаго числа. Указанную операцію слѣдуетъ повторять до тѣхъ поръ, пока не получимъ двузначнаго числа. Вмѣсто удвоенія остающагося числа можно прибавить къ нему половину отброшеннаго въ случаѣ, если послѣднее четно.*

Пусть a — число всѣхъ сотенъ испытуемаго числа, b — число единицъ, заключающихся въ десяткахъ и единицахъ; если въ испытуемомъ числѣ отбросить двѣ послѣднія цифры, то оставшееся число есть a. Удвоивъ это число и прибавивъ отброшенное число b, получимъ $2a+b$.

Такъ какъ

$$100a+b-(2a+b)=98a=14a\,.\,7,$$

или

$$100a+b=14a\,.\,7+(2a+b),$$

и такъ какъ слагаемое $14a.7$ кратно 7, то, смотря по дѣлимости или недѣлимости на 7 слагаемаго $2a+b$, сумма $100a+b$, т. е. испытуемое число, дѣлится или не дѣлится на 7. Въ случаѣ, если b четно, положимъ $b=2c$.

Тогда

$$100a+b-2\left(a+\frac{b}{2}\right)=100a+2c-2(a+c)=14a.7,$$

откуда

$$100a+b=2\left(a+\frac{b}{2}\right)+14a.7.$$

Такъ какъ $14a.7$ кратно 7, то, въ случаѣ дѣлимости числа $a+\frac{b}{2}$ на 7, сумма $100a+b$ тоже дѣлится на 7; если же $a+\frac{b}{2}$ некратно 7, то и $2\left(a+\frac{b}{2}\right)$ некратно 7, а потому и сумма $100a+b$ не дѣлится на 7.

Л. Мехлисъ (Одесса).

№ 107 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^3-9x^2+27x-36=0.$$

(Заимств. изъ *Supplemento al periodico di matematica*).

Представивъ данное уравненіе въ видѣ

$$x^3-9x^2+27x-36=x^3-3x^2.3+3x.3^2-3^3-9=(x-3)^3-9=0,$$

находимъ:

$$x-3=\alpha\sqrt[3]{9},$$

откуда

$$x=3+\alpha\sqrt[3]{9},$$

гдѣ α — одно изъ трехъ возможныхъ значеній корня третьей степени изъ единицы.

Ф. Рапопортъ (Одесса); *Б. Щиголевъ* (Варшава).

№ 111 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^4+2x^3+4x^2+3x+1=0.$$

Замѣтивъ, что данное уравненіе можно представить въ видѣ

$$(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)-1=0,$$

и полагая

$$x^2+x+1=y, \tag{1}$$

имѣемъ:

$$y^2+y-1=0,$$

откуда

$$y_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad y_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}. \tag{2}$$

Слѣдовательно [см. (1), (2)],

$$x^2+x+1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{или} \quad x^2+x+1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

т. е.

$$2x^2+2x+3-\sqrt{5}=0 \quad \text{или} \quad 2x^2+2x+3+\sqrt{5}=0,$$

откуда

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{2\sqrt{5}-5}}{2}, \quad x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{-2\sqrt{5}-5}}{2}.$$

I. Ниссельбаумъ (Пинскъ); *Ф. Рапопортъ* (Одесса).

№ 117 (5 сер.). *Доказать, что число*

$$x^2+x-1$$

не дѣлится на 13 *ни при какихъ цѣлыхъ значеніяхъ* x.

Для большаго удобства вычисленій учетверимъ данное число. Тогда имѣемъ:

$$4(x^2+x-1)=4x^2+4x+1-5=(2x+1)^2-5,$$

или, полагая $2x+1=y$,

$$4(x^2+x-1)=y^2-5.$$

Раздѣливъ y на 13, находимъ: $y=13q+r$, гдѣ q и r суть соотвѣтственно частное и остатокъ отъ дѣленія. Такъ какъ дѣленіе всегда можно произвести такъ, чтобы r имѣло одно изъ значеній

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 5,\ \pm 6,$$

то

$$4(x^2+x-1)=(13q+r)^2-5=13q(13q+2r)+(r^2-5), \qquad (1)$$

гдѣ r^2-5 имѣетъ одно изъ значеній:

$$-5;\ 1-5;\ 4-5;\ 9-5;\ 16-5;\ 25-5;\ 36-5. \qquad (2)$$

Ни одно изъ чиселъ ряда (2) не кратно 13, а потому [см. (1)] число $4(x^2+x-1)$ не кратно 13 ни при какомъ цѣломъ значеніи x, откуда выводимъ, что и число x^2+x-1 не дѣлится на 13 ни при какомъ цѣломъ значеніи x.

А. Мехлисъ (Одесса); *I. О—янцъ* (Владикавказъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника“, подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

А. Воиновъ, директоръ Павловскаго реальнаго училища. *Сборникъ ариѳметическихъ задачъ* съ приложеніемъ краткихъ свѣдѣній изъ ариѳметики. Курсъ младшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Часть I. *Цѣлыя числа*. 3-е изданіе. Павловскъ н|Д. 1909. Цѣна 40 коп. Стр. 140. Часть II. *Дробныя числа*. 2-е изданіе. Павловскъ н|Д. 1909. Цѣна 50 коп. Стр. 176.

А. П. Постниковъ. *Начала теоретической механики.* Для старшихъ классовъ среднеучебныхъ заведеній. Съ 50 чертежами. Москва. 1908. Издатель В. В. Спиридоновъ. Цѣна 1 рубль. Стр. 98.

Эрнстъ Махъ. *Принципъ сохраненія работы*. Исторія и корень ее. Переводъ съ пересмотрѣннаго и исправленнаго авторомъ нѣмецк. изданія Г. А. Котляра. Подъ редакціей проф. Н. А. Гезехуса съ предисловіемъ автора къ русскому изданію. СПБ. Складъ изданія „Общественная Польза“. Цѣна 40 к. Стр. 66.

П. И. Броуновъ. Заслуженный профессоръ Императорскаго С.-Петербургскаго университета. *О зависимости нѣкоторыхъ географическихъ элементовъ отъ барическаго рельефа земной поверхности*. Съ тремя картограммами въ текстѣ. СПБ. 1909. Стр. 14.

П. Свѣшниковъ, директоръ Уфимскаго реальнаго училища, *Очеркъ климатическихъ условій города Уфы*. Изданіе Статистическаго отдѣла Уфимской Губернской Земской Управы. Уфа. 1909. Стр. 72+III.

Wilgelm Ostwald. *Erfinder und Entdecker.* (Изъ серіи книгъ подъ общимъ заглавіемъ: Die Gesellschaft, herausgegeben von Martin Buber). Frankfurt am Main. Стр. 100. Ц. 1 м. 50 пф.

Wilhelm Bölsche. *Die Schöpfungstage*. Umrisse zu einer Entwickelungsgeschicte der Natur. Dresden. 1909.

Dr. Gustav Pécsi, Professor. *Krisis der Axiome der Modernen Physik.* Reform der Naturwissenschaft. I. Buch: Newtons System und das neue physische System. II. Buch: Das neue Sonnensystem. Esztergom (Ungarn). 1908. Ц. 4 м.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА 1909 ГОДЪ

(20-й годъ изданія. Основатель Я. Г. Гуревичъ)

на общепедагогическій журналъ для учителей и дѣятелей по народному образованію

„РУССКАЯ ШКОЛА“.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Общіе вопросы образованія и воспитанія. Реформа школы. Экспериментальная педагогика, психологія, школьная гигіена. Методика преподаванія различныхъ предметовъ. Исторія школы. Обзоры новѣйшихъ теченій въ области разныхъ наукъ. Дѣятельность государств. и обществ. учрежденій по народн. образованію (Госуд. Думы, земствъ и пр.). Народное образованіе заграницей. Низшая и средняя школа въ Россіи. Вопросы націон. школы разл. народовъ Россіи. Профессіональное образованіе. Женское образованіе. Внѣшкольное образованіе.

Кромѣ статей по означ. программѣ журналъ даетъ **слѣдующіе постоянные отдѣлы:** I. Экспериментальн. педагогика, **подъ ред. А. П. Нечаева.** II. Критика и библіографія, обзоры педагогич. и дѣтск. журналовъ. III. Хроника народнаго образованія на Западѣ. IV. Хроника національной школы разл. народовъ Россіи. V. Хроника библіотечнаго дѣла. VI. Хроника народнаго образованія въ Россіи. VII. Хроника профессіональнаго образованія. VIII. Хроника внѣшкольнаго образованія. IX. Замѣтки изъ текущей жизни. X. Разныя извѣстія. XI. Новѣйшія правительственныя распоряженія.

Въ журналѣ принимаютъ участіе: Н. Я. Абрамовичъ, Х. Д. Алчевская, Г. Аграевъ, Ц. П. Балталонъ, проф. И. А. Бодуэнъ-де-Куртенэ, И. А. Бѣлозерскій, И. П. Бѣлоконскій, В. П. Вахтеровъ, прив.-доц. Б. Вейнбергъ, д-ръ А. С. Виреніусъ, Е. М. Гаршинъ, проф. И. М. Гревсъ, А. Г. Готлибъ, Я. Я. Гуревичъ, Л. Я. Гуревичъ, А. Гуревичъ, К. Деруновъ, И. Житецкій, проф. П. А. Заболотскій, А. Заксъ, С. Золотаревъ, Г. Г. Зоргенфрей, проф. Д. Н. Кайгородовъ, П. Ѳ. Каптеревъ, проф. Н. И. Карѣевъ, Н. Казанцевъ, В. А. Келтуяла, Н. М. Книповичъ, Н. И. Коробко, И. И. Лапшинъ, Б. Лезинъ, М. К. Лемке, проф. П. Ф. Лесгафтъ, Э. Ф. Лесгафтъ, А. Липовскій, А. А. Локтинъ, Э. Лямбекъ, Ѳ. Макаровъ, П. Г. Мижуевъ, А. Мезіеръ, А. Музыченко, А. П. Налимовъ, прив.-доц. А. П. Нечаевъ, Ф. Ф. Ольденбургъ, Л. Г. Оршанскій, А. Н. Острогорскій, Ф. И. Павловъ, проф. А. Л. Погодинъ, С. Н. Поляковъ, В. Л. Розенбергъ, Г. Роковъ, Н. А. Рубакинъ, Е. Рѣпина, С. Ф. Русова, С. И. Сазоновъ, проф. И. А. Сикорскій, С. И. Симоновъ, Л. С. Севрукъ, проф. Ир. П. Скворцовъ, А. Ѳ. Соколовъ, Н. М. Соколовъ, А. Стаховичъ, Ем. Стратоновъ, М. И. Страхова, М. А. Тростниковъ, Н. Томилинъ, К. А. Тюлеліевъ, В. И. Чарнолускій, Н. В. Чеховъ, В. И. Фармаковскій, В. А. Флеровъ, С. И. Шохоръ-Троцкій, Н. Шохоръ-Троцкая, А. Яцимирскій и др.

„Русская Школа“ выходитъ ежемѣсячно книжками, не менѣе **пятнадцати** печ. листовъ (за май-іюнь и іюль-августъ—книжки двойного объема). **Подписная цѣна**: въ СПБ. безъ дост.—**семь** р., съ дост.—**7** руб. **50** коп., для иногороднихъ—**восемь** руб.; за границу—**девять** руб. въ годъ. **Для сельскихъ учителей**, выписывающихъ журналъ за свой счетъ, **шесть** руб. въ годъ, съ разсрочкою уплаты въ два срока: (При подпискѣ—**3** р. и въ іюлѣ—**3** р.). Городамъ и земствамъ, выписывающимъ не менѣе 10 экз., **уступка въ 15%**. Книжнымъ магазинамъ **за комиссію 5%** съ годовой цѣны.

Подписка съ разсрочкой и уступкой принимается **непосредственно въ конторѣ редакціи** (С.-Петербургъ, Лиговская улица, д. № 1).

Золотая медаль на международной выставкѣ „Дѣтскій Міръ“ въ 1904 году.

Редакторъ-издатель *Я. Я. Гуревичъ.*