Обложка
ищется

Обложка
пщется

XLI Сем. № 5—6.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 485—486.

Объ единствѣ вещества.

В. А. Гернета.

Блестящiя открытiя послѣдняго времени, сдѣланныя въ соприкасающихся между собой областяхъ физики и химiи, выдвинули на первый планъ вѣковые вопросы о строенiи вещества, о соотношенiяхъ между веществомъ и энергiей и о взаимной превратимости химическихъ элементовъ. Нѣкоторые факты, обнаруженные въ недавнемъ прошломъ,— какъ, напримѣръ, непрерывное выдѣленiе тепла соединенiями радiя или превращенiе эманацiи радiя въ гелiй,— оказались совершенно необъяснимыми съ точки зрѣнiя господствующихъ въ наукѣ ученiй, а такъ какъ мы теперь не можемъ, подобно Гегелю сказать: „тѣмъ хуже для фактовъ“, то является необходимость въ пересмотрѣ тѣхъ основныхъ положенiй, на которыхъ зиждутся наши умозрительныя науки. Мы переживаемъ въ настоящее время интересный переходной перiодъ въ области науки: старые устои начинаютъ колебаться, а новые находятся въ начальной стадiи формировки. Законы вѣчности энергiи и матерiи уживаются съ такими фактами, какъ распадъ атома, какъ вѣчное выдѣленiе тепла радiемъ или превращенiе матерiи въ энергiю. Я не имѣю въ виду останавливаться на этой сторонѣ вопроса, не беру на себя задачи выяснить тѣ непримиримыя противорѣчiя, которыя существуютъ между основными законами физико-химiи, съ одной стороны, и логическими выводами изъ нѣкоторыхъ новыхъ наблюденiй — съ другой. Моя задача у́же и скромнѣе: я хочу остановиться на главнѣйшихъ моментахъ въ судьбахъ одной идеи, имѣющей очень длинную исторію,— въ судьбахъ идеи о единствѣ вещества, которая зародилась на зарѣ нашей науки, долгое время была господствующей и руководила изслѣдователями, затѣмъ отошла на задній планъ и временно заглохла, а въ послѣдніе годы снова появилась на сценѣ, но уже въ совершенно новомъ свѣтѣ.

Идея о единствѣ того матерьяла, изъ котораго созданы всѣ тѣла природы, беретъ свое начало въ глубокой древности. Уже Аристотель строилъ вещественную природу изъ четырехъ стихій: воздуха, воды, земли и огня, а идеи Аристотеля долго господствовали въ наукѣ. Что древніе не мирились съ четырьмя стихіями и сводили ихъ къ одному первобытному веществу, на это указываютъ слѣдующія слова изъ „Тимея“ Платона:

„Намъ кажется, что вода, уплотняясь, превращается въ камень и въ землю*); разрѣжаясь, она переходитъ въ вѣтеръ и воздухъ; зажженный воздухъ превращается въ огонь; огонь же, сгущенный и потушенный, снова принимаетъ форму воздуха, а послѣдній превращается въ туманъ, который расплывается въ воду. Изъ воды, наконецъ, получаются земля и камни“.

Это соотвѣтствуетъ слѣдующей схемѣ:

←—— ——→ ——→
Земля вода воздухъ огонь
←—— ←—— ←——

Несомнѣнно также, что подъ этими 4-мя стихіями древніе разумѣли не землю, воду, воздухъ и огонь въ тѣсномъ смыслѣ этихъ словъ, а лишь носителей опредѣленныхъ основныхъ свойствъ тѣлъ; огонь являлся носителемъ сухости и тепла, вода — влажности и холода, воздухъ — влажности и тепла, земля — сухости и холода.

Наша химія зародилась въ Египтѣ, и уже самые древніе изъ сохранившихся документовъ говорятъ о такъ называемомъ „облагораживаніи металловъ“, т. е. о превращеніи обыкновенныхъ металловъ, вродѣ мѣди и свинца, въ благородные — въ золото и серебро. Эта задача считалась главнѣйшей задачей химіи того времени, и въ первые вѣка нашей эры была очень распространена легенда о томъ, какъ демоны снесли съ неба на землю это искусство, называемое *χημεῖα*, изложенное въ таинственной книгѣ *χῆμει***). Алхимики слѣдующихъ вѣковъ упорно вѣрили въ возможность такого превращенія, и мы можемъ довольно детально прослѣдить, въ какія формы выливалось это ученіе, начиная съ XI или XII вѣка, несмотря на ту таинственность, которой алхимики себя окружали, прекрасно понимая, что тайна превращенія мѣди въ

---

*) Въ средніе вѣка алхимики доказывали опытами это превращеніе, и лишь Лавуазье показалъ, что „земля“ получалась при этихъ опытахъ изъ стекла сосудовъ.

**) Нѣкоторые полагаютъ, что отсюда происходитъ и названіе науки. Правдоподобнѣе другое мнѣніе, по которому слово химія происходитъ отъ Кеті или Chami — древняго названія Египта.

золото лишь до тѣхъ поръ будетъ приносить своему обладателю богатство и власть, пока она останется тайной. По имени миѳическаго Гермеса Трисмегистоса, повидимому, тождественнаго съ египетскимъ богомъ Тотомъ, которому преданіе приписываетъ составленіе первыхъ алхимическихъ книгъ, алхимія долго называлась герметическимъ искусствомъ, и алхимики такъ ревниво оберегали свои знанія отъ непосвященныхъ, что самое слово герметическій пріобрѣло тотъ смыслъ, который оно въ настоящее время имѣетъ: со всѣхъ сторонъ закрытый, никого и ничего не пропускающій.

Твердо вѣря въ возможность превращенія металловъ, алхимики среднихъ вѣковъ естественно допускали, что металлы имѣютъ общія составныя части. Такъ, Альбертъ Магнусъ (род. въ 1193 г.) полагалъ, что металлы состоятъ изъ мышьяка, сѣры и воды; Арнольдъ Вилланованусъ, жившій во 2-й половинѣ XIII вѣка въ Испаніи, Парижѣ, Италіи и Сициліи, а также Раймундъ Луллъ (1235—1315, Испанія) допускали, что металлы состоятъ только изъ ртути и сѣры, при чемъ послѣдній считалъ ртуть и сѣру составными частями всѣхъ тѣлъ. Ихъ взгляды подробно развиты въ сочиненіяхъ анонимнаго автора, извѣстнаго подъ именемъ Псевдо-Гебера, такъ какъ его сочиненія приписывались знаменитому Геберу; Псевдо-Геберъ, жившій не раньше XIV вѣка (Геберъ въ X и XI), также считаетъ ртуть и сѣру составными частями металловъ, но допускаетъ, кромѣ того, еще и мышьякъ. Ртуть и сѣра, содержащіяся въ металлахъ въ разныхъ пропорціяхъ и въ разной степени чистоты, не тождественны съ обыкновенными ртутью и сѣрой, а — подобно стихіямъ Аристотеля — являются лишь носителями опредѣленныхъ свойствъ: ртуть — блеска, тягучести и плавкости, сѣра — измѣняемости отъ огня. Обыкновенная ртуть содержитъ сѣру, а въ благородныхъ металлахъ она чище. Превращеніе металловъ дѣлается при помощи „медикаментовъ“, которые по своей „силѣ и добродѣтели“ дѣлятся на три порядка: 1) вызывающіе несущественныя измѣненія въ металлахъ; 2) сообщающіе неблагороднымъ металламъ лишь нѣкоторыя свойства благородныхъ и 3) философскій камень, иначе великій эликсиръ или magisterium. Философскому камню приписывали чудодѣйственную силу:

„Возьми кусокъ этого драгоцѣннаго медикамента величиною съ бобъ, говоритъ Раймундъ Луллъ въ своемъ Testamentum novissimum. Брось его въ тысячу унцій ртути,— послѣдняя превратится въ красный порошокъ. Прибавь унцію этого порошка на тысячу унцій ртути — и она также превратится въ красный порошокъ. Если изъ этого порошка взять одну унцію и бросить его въ тысячу унцій ртути, то все превратится въ медикаментъ. Брось унцію этого медикамента на новую тысячу унцій ртути — и она также превратится въ медикаментъ. Брось унцію этого новаго медикамента еще на тысячу унцій ртути — и она вся превратится въ золото, которое лучше рудничнаго“.

Полагали, кромѣ того, что философскій камень способенъ излечить болѣзнь, продлить человѣческую жизнь на 400 лѣтъ и даже болѣе, и объясняли долголѣтіе библейскихъ патріарховъ тѣмъ, что имъ была извѣстна тайна философскаго камня. Къ концу средневѣковаго періода философскій камень пріобрѣлъ даже способность творить живыя существа..."

Исаакъ Голландусъ (1-я половина XV в.) и Базиліусъ Валентинусъ (2-я половина XV в.) считали всѣ тѣла состоящими изъ ртути, сѣры и соли, какъ носителя твердости и огнеупорности. Эти взгляды интересны потому, что на нихъ именно основалъ свои ятрохимическія ученія знаменитый Парацельзъ (1493—1541), который поставилъ алхиміи новую задачу — исцѣленіе болѣзней, и съ котораго начинается новый періодъ, такъ называемый ятрохимическій, въ исторіи алхиміи. Парацельзъ даже болѣзни приписывалъ измѣненіямъ равновѣсія между этими составными частями всѣхъ тѣлъ и въ томъ числѣ органовъ человѣка: избытокъ сѣры производитъ лихорадку и моровую язву; ртути — параличъ и меланхолію, соли — поносъ и водянку, выдѣленіе ртути — ревматизмъ, перегонка ея изъ однихъ органовъ въ другія — бѣшенство и т. д. Только для объясненія пищеваренія и желудочныхъ заболѣваній онъ допускалъ существованіе въ желудкѣ добраго духа Архея, который руководитъ идущими внутри организма процессами, но ученики Парацельза пошли дальше и изгнали Архея изъ желудка.

Идеи Валентинуса о составныхъ частяхъ тѣлъ такъ глубоко укоренились въ умахъ, что отъ нихъ не могли отдѣлаться даже наиболѣе добросовѣстные и точные изслѣдователи XVI и даже XVII вѣковъ. Такъ, ван-Гельмонтъ (1577—1644), собравшій очень много фактовъ въ пользу неизмѣняемости металловъ, все же являлся сторонникомъ „облагораживанія" металловъ и въ своихъ сочиненіяхъ поэтому часто самъ себѣ противорѣчилъ. Раздѣляя взгляды Валентинуса, онъ въ то же время считалъ воду главнѣйшей составной частью тѣлъ, исходя изъ своихъ наблюденій надъ горѣніемъ и надъ разведеніемъ растеній въ водѣ. Идеи Валентинуса отстаивалъ Гомбергъ (ум. 1715 въ Парижѣ); Іоаннъ Кункель (1630—1702), весьма добросовѣстный изслѣдователь, всю свою жизнь посвятилъ отысканію способовъ превращенія металловъ въ золото, хотя уже ихъ современникъ, знаменитый Робертъ Бойль (1627—1691) установилъ правильное понятіе о химическомъ элементѣ съ нашей точки зрѣнія, считая элементами неразложимыя составныя части сложныхъ тѣлъ, присутствіе которыхъ можетъ быть экспериментально доказываемо. Іоаннъ Іоахимъ Бехеръ (1635—1682), одинъ изъ послѣднихъ алхимиковъ стараго періода, лишь замѣнилъ элементы Валентинуса тремя землями, допуская, что всѣ неорганическія вещества состоятъ изъ меркуріальной, остекляемой и горючей земель. Послѣднему элементу, т. е. горючей землѣ (terra pinguis), суждено было сыграть важную роль въ исторіи алхиміи, такъ какъ Георгъ Эрнстъ Сталь (1660—1734) превратилъ ее въ флогистонъ. Взгляды Сталя создали новую эру въ исторіи алхиміи, носящую названіе „вѣка флогистона", стали господствующими и привлекли многихъ послѣдователей, среди которыхъ мы встрѣчаемъ такія имена, какъ Блекъ, Кавендишъ, Маргграфъ, Шееле, Бергманъ, Пристлей.

Сущность теорiи флогистона заключается въ допущенiи, что всѣ горючiя вещества, а также и металлы, способные обжигаться, содержатъ общую составную часть — гипотетическiй флогистонъ, улетучивающiйся при обжиганiи и сгоранiи этихъ веществъ. Чѣмъ легче загорается и чѣмъ полнѣе сгораетъ вещество, тѣмъ оно богаче флогистономъ. Уголь считался почти чистымъ флогистономъ. Продуктъ горѣнiя + флогистонъ даютъ первоначальное вещество. Такъ, напримѣръ, при обжиганiи мѣдь теряетъ флогистонъ и превращается въ черную окись мѣди. Если черную окись мѣди смѣшать съ углемъ и прокалить, то она соединяется съ флогистономъ и превращается въ металлическую мѣдь. Простота объясненiй, широкiя обобщенiя въ такой степени ослѣпили и Сталя и его послѣдователей, что даже вѣсы не въ силахъ были убѣдить ихъ въ томъ, что они заблуждаются, и понадобился весь генiй Лавуазье (1743—1794), чтобы разрушить эти остатки алхимическихъ заблужденiй и направить дальнѣйшее развитiе химiи по тому руслу, по которому оно течетъ до нашихъ дней. Установивъ законъ вѣчности вещества и, главное, какъ вполнѣ справедливо указалъ Н. Н. Бекетовъ*), проведя рѣзкую грань между матерiей, съ одной стороны, и энергiей, съ другой, онъ разсѣялъ послѣднiе остатки тумана, который еще застилалъ истину передъ глазами такихъ опытныхъ экспериментаторовъ, какъ ван-Гельмонтъ, Кункель, Бехеръ, Кавендишъ, Шееле, Пристлей и др. Съ эпохи Лавуазье начинается новая, небывалая эра въ исторiи химiи, и блестящiя открытiя слѣдуютъ одно за другимъ съ изумительной быстротой. Законъ Гэ-Люссака о расширенiи газовъ (1802), опредѣленiе точнаго состава воды (Гэ-Люссакъ и Гумбольдъ, 1805), открытiе щелочныхъ металловъ (Дэви, 1808), появленiе атомистической гипотезы Дальтона (1808), законы объемныхъ отношенiй при реакцiяхъ въ газообразномъ состоянiи (Гэ-Люссакъ, 1808), законъ Авогадро (1811), электрохимическая теорiя Берцелiуса (1819), а также открытiе цѣлаго ряда новыхъ элементовъ**) блистательно доказали, что Лавуазье направилъ усилiя изслѣдователей по надлежащему руслу. Законъ Авогадро далъ вѣрный путь для установки истинныхъ атомныхъ вѣсовъ и для вывода формулъ сложныхъ тѣлъ, а Дюма и Берцелiусъ съ значительной точностью опредѣлили атомные вѣса главнѣйшихъ элементовъ. Въ короткое время, словомъ, была собрана масса новыхъ фактовъ и создано то стройное ученiе, которое въ серединѣ прошлаго вѣка получило названiе „новой химiи" въ отличiе отъ химическихъ ученiй доатомистическаго перiода.

Но всѣ эти блистательныя открытiя не умертвили, однако, старой идеи о взаимной превратимости химическихъ элементовъ, а лишь оттѣснили ее на заднiй планъ. Человѣческiй умъ неохотно мирился съ представленiемъ о 60 или 70 первоначальныхъ веществахъ, изъ кото-

*) Рѣчь на Менделѣевскомъ съѣздѣ въ 1907 г.

**) Цирконiй (1795), хромъ (1797), теллуръ (1798), палладiй и родiй (1804), осмiй и иридiй (1804), калiй и натрiй (1808), iодъ (1812), кадмiй (1817), селенъ (1817), литiй (1818), кремнiй (1823), бромъ (1826), алюминiй (1827), торiй (1828), ванадiй (1830).

рыхъ созданъ міръ; многочисленность элементовъ представляла и представляетъ для него загадку, къ которой онъ отъ времени до времени возвращается. Но времена измѣнились: въ теченіе нѣсколькихъ вѣковъ идея о превратимости элементовъ,— главнымъ образомъ, металловъ,— была руководящей нитью изслѣдователей, и, если она не являлась „рабочей гипотезой“ въ современномъ смыслѣ этого слова, то во всякомъ случаѣ въ ней алхимики находили моральную поддержку, а теперь она утратила это значеніе, и въ теченіе ста лѣтъ химія лишь удѣляла ей свои досуги, отдавая главныя силы рѣшенію задачъ иного рода.

Уже на зарѣ „новой“ химіи, въ 1815 и 1816 г.г., появились два анонимныхъ трактата, авторомъ которыхъ оказался впослѣдствіи Проутъ. Его гипотеза общеизвѣстна. Полагая, что атомные вѣса элементовъ по отношенію къ водороду выражаются цѣлыми числами, онъ высказалъ предположеніе, что водородъ является родоначальникомъ всѣхъ элементовъ, атомы которыхъ являются, такъ сказать, продуктами конденсаціи водородныхъ атомовъ. Эта гипотеза нашла на первыхъ порахъ многочисленныхъ приверженцевъ: въ пользу ея высказались Томсонъ (другъ Дальтона), Гмелинъ, Дюма, Эрдманъ, Маршанъ и даже тотъ самый Стасъ, который впослѣдствіи опровергъ ее своими точными опредѣленіями атомныхъ вѣсовъ. Работы Берцеліуса, Маршана, Дюма и Мариньяка также совершенно разбили гипотезу Проута. Два послѣднихъ изслѣдователя, особенно Мариньякъ, пытались, впрочемъ, спасти ея обломки, допуская сложность водороднаго атома, вслѣдствіе чего отношенія атомныхъ вѣсовъ элементовъ къ вѣсу атома водорода должны бы выражаться либо цѣлыми числами, либо цѣлыми числами съ дробями $^1/_2$, если атомъ водорода способенъ дробиться на 2, или $^1/_4$, если онъ дѣлится на 4 меньшихъ атома. Когда опредѣленія Стаса опровергли и эти допущенія, то Мариньякъ сдѣлалъ еще одну попытку отстоять свои взгляды, указывая на рядъ возможныхъ источниковъ ошибокъ въ опредѣленіяхъ Стаса. Усилія Мариньяка не спасли, однако, гипотезы Проута, и она сошла со сцены, хотя нельзя сказать, что она погребена окончательно. И въ наши дни есть ея сторонники. Наиболѣе виднымъ изъ нихъ является Гинрихсъ, неутомимо разыскивающій ошибки въ опредѣленіяхъ атомныхъ вѣсовъ и отстаивающій утвержденіе, что атомные вѣса элементовъ кратны половины атомнаго вѣса водорода. Онъ справедливо указываетъ на то, что при каждомъ опредѣленіи атомнаго вѣса при помощи той или иной химической реакціи, атомные вѣса остальныхъ элементовъ, участвующихъ въ реакціи, принимаются извѣстными, постоянными, вслѣдствіе чего всѣ ошибки опыта, ошибки неизбѣжныя, всецѣло падаютъ на опредѣляемый атомный вѣсъ. Когда же при помощи этого „провѣреннаго“ атомнаго вѣса A предпринимается провѣрка какого-либо другого атомнаго вѣса B, то, кромѣ новыхъ экспериментальныхъ ошибокъ, на атомный вѣсъ B вліяютъ еще и старыя ошибки, содержащіяся въ вѣсѣ A, такъ что постепенно происходитъ накопленіе погрѣшностей, и числа, доставляемыя самыми точными и тщательными опытами, становятся все менѣе и менѣе надежными. Въ послѣднее время Гинрихсомъ предпринята громадная работа: перечисленіе атомныхъ вѣсовъ всѣхъ элементовъ съ цѣлью болѣе „справедливаго“ распредѣленія экспериментальныхъ ошибокъ. Я позволю себѣ этимъ ограничиться, такъ какъ тѣ положенія, изъ которыхъ при своихъ вычисленіяхъ исходитъ Гинрихсъ, кажутся мнѣ не вполнѣ свободными отъ возраженій.

Не излагая всѣхъ попытокъ объяснить многочисленность химическихъ элементовъ, я не могу пройти молчаніемъ двухъ изъ нихъ: попытокъ Крукса и Морозова.

Круксъ въ весьма остроумной рѣчи, опираясь на свои работы надъ фракціонированіемъ рѣдкихъ земель и на періодическую систему элементовъ, рисуетъ образную картину образованія химическихъ элементовъ изъ первобытнаго протила. Аморфная матерія, говоритъ онъ, вообще обладаетъ стремленіемъ къ аггрегаціи, независимымъ отъ тяготѣнія, такъ какъ оно одинаково проявляется въ средѣ равной, меньшей или большей плотности. Облака, стягивающіяся въ одну кучу, частички углерода въ воздухѣ, собирающіяся въ комочки и опускающіяся въ видѣ сажи, химическіе осадки, сперва мелко раздробленные, аморфные, которые затѣмъ становятся хлопьевидными, зернистыми или кристаллическими, вихревыя кольца, образующіяся въ дымѣ, — все это проявленія того всеобщаго стремленія природы создавать опредѣленныя формы, которое, по мнѣнію Крукса, привело къ сгущенію протила въ атомы вещества.

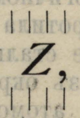
Благодаря процессу, аналогичному охлажденію*), наступилъ моментъ, когда изъ аморфнаго протила образовались первые атомы вещества; атомы эти тотчасъ же стали носителями энергіи, а энергію они могли почерпнуть только изъ окружающаго ихъ протила. Такимъ образомъ, образованіе первыхъ атомовъ способствовало „охлажденію“ протила, т. е. образованію новыхъ атомовъ. Сравнивая процессъ „охлажденія“ протила и дифференцированія изъ него атомовъ съ постепенно замирающими колебаніями маятника, Круксъ строитъ періодическую систему элементовъ: каждое полное колебаніе даетъ одинъ большой періодъ. Вмѣстѣ съ атомами явились и тѣ формы энергіи, которыя нуждаются въ атомѣ, чтобы проявить себя, и которыя, между прочимъ, обусловливаютъ то, что мы называемъ теперь атомнымъ вѣсомъ. Понятно поэтому, что протилъ не имѣлъ атомнаго вѣса, ибо не имѣлъ атомовъ. Круксъ надѣляетъ его отрицательнымъ атомнымъ вѣсомъ, роняя по пути нѣсколько словъ о мірѣ невидимомъ. Ему, какъ убѣжденному спириту, это простительно, но для насъ понятіе объ отрицательномъ атомномъ вѣсѣ лишено всякаго содержанія.

Взгляды Морозова, изложенные въ его книгѣ: „Періодическія системы строенія вещества“**), а также сообщенные имъ на Менделѣевскомъ съѣздѣ и представляющіе плоды его многолѣтнихъ размышленій, сводятся къ слѣдующему.

*) Словомъ „охлажденіе“ приходится пользоваться вслѣдствіе отсутствія болѣе подходящаго термина. Процессъ, о которомъ идетъ рѣчь, не могъ быть „охлажденіемъ“, такъ какъ наши представленія о температурѣ неразрывно связаны съ атомомъ.

**) Изд. т-ва И. Д. Сытина. Москва. 1907.

Показавъ, что углеводородные радикалы (карбогидриды, какъ ихъ называетъ авторъ) располагаются въ правильныя періодическія системы, поразительно сходныя съ системой Менделѣева, — при чемъ предѣльные углеводороды отвѣчаютъ элементамъ нулевой группы: гелію, неону, аргону и т. д., одновалентные радикалы, вродѣ метила, этила и т. д., — одновалентнымъ элементамъ, и т. д. — Морозовъ естественно приходитъ къ мысли, что и химическіе элементы, — археогелиды, какъ онъ ихъ называетъ, построены аналогично карбогидридамъ. Вопросъ лишь въ томъ, изъ чего они построены. Для рѣшенія этого вопроса естественнѣе всего, по мнѣнію Морозова, обратиться къ даннымъ спектральныхъ наблюденій надъ звѣздами и, главнымъ образомъ, надъ туманностями, такъ какъ туманности, по современнымъ воззрѣніямъ, представляютъ формирующіеся міры, изъ нихъ „образуются свѣтила со всѣми ихъ металлами и металлоидами“ *). Но въ спектрахъ туманностей наблюдаются лишь линіи неизвѣстнаго на землѣ и на звѣздахъ вещества, такъ называемаго „небулярія“ или „небулозія“, гелія и лишь нѣкоторыя линіи водорода. Такъ какъ часть линій водорода отсутствуетъ, то водородъ туманностей не можетъ быть признанъ тождественнымъ водороду земли. Локьеръ называетъ его протоводородомъ. Вотъ, очевидно, тотъ матерьялъ, изъ котораго создались земные элементы. Небулярію Морозовъ даетъ атомный вѣсъ 4 и надѣляетъ его 8-ю электроотрицательными единицами сродства, обозначая его черезъ



атомъ гелія онъ считаетъ состоящимъ изъ двухъ податомовъ, связанныхъ двойной связью, и обозначаетъ его черезъ

$$x\!:\!:\!x,$$

гдѣ точка обозначаетъ электроположительный пунктъ сцѣпленія; атомный вѣсъ первичнаго гелія (протогелія) равенъ, такимъ образомъ, половинѣ атомнаго вѣса, т. е. 2 и обозначается черезъ x. Атомъ протоводорода будетъ h — съ атомнымъ вѣсомъ, равнымъ 1. Для атомовъ „простѣйшихъ“ элементовъ получимъ слѣдующія схематическія формулы:

$Li = 6$ $Be = 8$ $B = 10$ $C = 12$ $N = 14$ $O = 16$ $F = 18$ $Ne = 20$

Атомные вѣса литія, берилія, бора и фтора оказываются меньше истинныхъ на единицу каждый (въ круглыхъ числахъ). Это уклоненіе мо-

*) Ib., стр. VI.

жетъ быть объяснено, по мнѣнію автора, либо присутствіемъ протоводорода, находящагося въ особомъ состояніи, либо присутствіемъ электроновъ. Для остальныхъ элементовъ получаются формулы, аналогичныя формуламъ углеводородовъ и ихъ радикаловъ, какъ алифатическихъ, такъ и циклическихъ.

Не останавливаясь на этихъ формулахъ, я позволю себѣ дополнить указанную аналогію между системой земныхъ элементовъ, съ одной стороны, и углеводородовъ и ихъ радикаловъ, съ другой — слѣдующими данными*). Какъ извѣстно, громаднѣйшіе запасы углеводородовъ на землѣ мы находимъ въ нефти. Среди различныхъ теорій происхожденія нефти наибольшей популярностью пользуется теорія Менделѣева; по этой теоріи нефть образовалась и теперь образуется дѣйствіемъ воды на раскаленныя массы углеродистыхъ металовъ,— главнымъ образомъ, углеродистаго желѣза,— составляющихъ значительную часть внутренняго ядра земного шара. Реакція образованія нефти можетъ быть изображена слѣдующимъ уравненіемъ:

$$nH^2O + Me^nC^{2m} = nMeO + 2C^mH^n,$$

гдѣ Me обозначаетъ металлъ, MeO — его окиселъ. Въ эпоху образованія химическихъ элементовъ водорода не могло быть въ земномъ ядрѣ; огромная скорость его молекулъ унесла бы его очень скоро за предѣлы земного притяженія. По вычисленіямъ G. H. Bryania**) слой водорода, имѣющій въ толщину 1 см. и покрывающій всю планету, улетучился бы въ міровое пространство при $+27^0C$ въ 222 года***), тогда какъ такой же слой гелія при тѣхъ же условіяхъ ушелъ бы въ $8{,}4 \times 10^{10}$ лѣтъ. Естественно поэтому предположить, что въ составъ архаическаго океана входилъ вмѣсто водорода протогелій. Если еще вмѣсто углеродистыхъ металловъ вообразимъ себѣ соединенія архаическихъ металловъ съ тѣмъ небуляріемъ, который мы обозначили черезъ Z, то приведенное выше уравненіе превратится въ слѣдующее:

$$nx^2O + Me^nZ^{2m} = nMeO + 2Z^mx^n,$$

т. е. наряду съ окислами первыхъ металловъ, бывшихъ на землѣ, образовались изъ небулярія и протогелія элементы, построенные аналогично углеводородамъ нефти. Водородъ вошелъ въ составъ этихъ элементовъ позднѣе, и тогда они пріобрѣли общую формулу $Z^mx^nh^p$.

*

* *

Такимъ образомъ, въ истекшемъ столѣтіи не было недостатка въ попыткахъ объяснить многочисленность химическихъ элементовъ, но оно не дало ни единаго факта въ пользу возможности превращенія одного элемента въ другой. Всѣ попытки воспроизвести это превращеніе оказались неудачными. Одной изъ послѣднихъ по времени попытокъ была работа профессора Fittica, который утверждалъ, что ему уда-

*) Id., стр. 321—323.

**) Chem. News. 81, 217. Цитировано по Морозову, стр. 316—317.

***) Принимая, что поступательныя скорости молекулъ вверху и внизу атмосферы одинаковы.

лось получить мышьякъ при окисленіи краснаго фосфора азотнокислымъ аммоніемъ. Смѣшивая 2 гр. аморфнаго фосфора, не содержащаго мышьяка, съ 12.9 гр. порошка азотнокислаго аммонія, Fittica нагрѣвалъ эту смѣсь въ трубкѣ, слѣдя за тѣмъ, чтобы температура смѣси не поднималась выше 200° С. Продукты реакціи кромѣ окисловъ фосфора содержали 2% и даже больше мышьяковистаго ангидрида, который, по мнѣнію Fittica, образовался по уравненію:

$$2P + 5NH^4NO^3 = 10H^2O + 3N^2 + (PN^2O)^2O^3,$$

гдѣ PN^2O = мышьяку; иначе говоря, мышьякъ является, по Fittica, сложнымъ тѣломъ, состоящимъ изъ фосфора, азота и кислорода. Атомный вѣсъ мышьяка равенъ 75; атомный вѣсъ $P = 31$, $N = 14.01$, $O = 16$*), т. е. вѣсъ группы PN^2O равенъ $31 + 2 \times 14.01 + 16 = 75.02$ — совпаденіе съ экспериментальнымъ атомнымъ вѣсомъ почти полное. Несмотря на рядъ весьма вѣскихъ возраженій, которыя были вызваны этой работой Fittica со стороны наиболѣе опытныхъ экспериментаторовъ, напримѣръ, Cl. Winkler'a, онъ остался при своемъ мнѣніи и опубликовалъ еще работы о превращеніяхъ мышьяка и азота въ сурьму, бора и кислорода въ кремній.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Безпроволочный телефонъ.

Проф. А. Слаби.

(Окончаніе).

Но незатухающія колебанія даже при незначительномъ напряженіи обладаютъ большой энергіей; нѣсколько опытовъ докажутъ намъ это. Пучекъ лучей изъ этой катушки, который кажется весьма мало яркимъ, отличается поразительнымъ дѣйствіемъ. Онъ заряжаетъ всѣ расположенные вблизи него проводники электричествомъ высокаго напряженія; стóитъ мнѣ приблизить металлическій стержень къ большому изолированному латунному шару, подвѣшенному надъ катушкой [рис. 17*)] — и вы видите яркую дугу; этотъ шаръ, слѣдовательно, принимаетъ въ себя такъ много электричества и при томъ столь энергично, что теперь можетъ безпрерывно отдавать его. Къ сожалѣнію, этотъ идеальный способъ передачи электричества сопряженъ съ двумя большими неудобствами. Во-первыхъ, разстояніе между заряжающей катушкой и заряжаемыми предметами не должно быть слишкомъ велико, если мы желаемъ достигнуть сколько-нибудь значительнаго дѣйствія; а, во-вторыхъ, очень опасно брать голыми руками заряженный такимъ образомъ металлическій пред-

*) Беру послѣднія данныя 1909 г.

**) См. № 484, стр. 79.

метъ: рука сейчасъ же получаетъ ожогъ, вызывающій весьма непріятныя гнойныя раны. Еще одна опасность заключается въ томъ, что находящіеся вблизи легко воспламеняющіеся предметы могутъ загораться, потому что разрядный пучокъ катушки такъ же, какъ и свѣтовая дуга, возникающая при разрядѣ въ проводникъ, сопровождается выдѣленіемъ большого количества теплоты. За то, пользуясь металлическимъ стержнемъ, мы, напротивъ, рѣшительно ничего не ощущаемъ, даже если вмѣсто шара, которымъ мы пользовались раньше, мы поставимъ свое собственное тѣло, и будемъ заряжать его. Теперь, какъ вы видите, возникаетъ свѣтовая дуга между мною и моимъ служителемъ, который находится нѣсколько дальше отъ катушки и потому заряжается не столь сильно (рис. 18).

Ясно, что съ помощью этихъ незатухающихъ колебаній мы можемъ также телефонировать, какъ и съ помощью затухающихъ, которыя мы раньше вызывали въ искровомъ промежуткѣ въ воздухѣ; необходимо лишь соединить съ конденсаторомъ повѣшенную въ воздухѣ

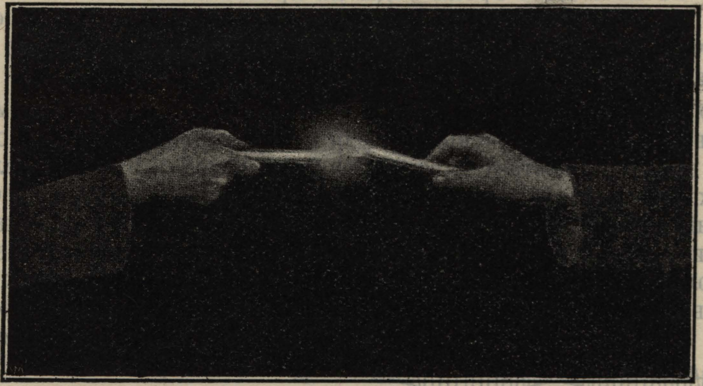


Рис. 18.

проволоку и настроить ее въ унисонъ съ длиной волны въ цѣпи. Выгоды, какія должно было принести примѣненіе незатухающихъ колебаній особенно благодаря тому, что онѣ легче поддаются настраиванью, были ясны всякому спеціалисту; заинтересованными кругами овладѣлъ настоящій энтузіазмъ, и никто не удивился, когда лордъ Армстронгъ въ Англіи пріобрѣлъ за нѣсколько милліоновъ марокъ патентъ на паульсеновскую водородную дугу. Съ тѣхъ поръ прошло полгода, и нигдѣ на земномъ шарѣ телефонированіе съ помощью незатухающихъ волнъ еще не нашло себѣ основательнаго практическаго примѣненія. Отчего это зависитъ? Тщательныя изслѣдованія показали намъ, что воодушевленіе, вызванное телеграфированіемъ посредствомъ незатухающихъ волнъ, было нѣсколько преждевременнымъ, потому что этотъ способъ отличается двумя недостатками, которыхъ до сихъ поръ еще не удалось устранить. Прежде всего, съ помощью свѣтовой дуги оказывается невозможнымъ вызывать такія колебанія, длина волны которыхъ отличалась бы *длительнымъ* постоянствомъ. Свѣтовая дуга, по существу своему, отличается непостоянствомъ: неодинаковое сгораніе углей, обусловленное недостаточной однородностью ихъ, и незначительныя неправильности въ постоянномъ токѣ, питающемъ дугу, обусловливаютъ и измѣненіе длины волны въ порождаемыхъ колебаніяхъ. Правда, оно выражается лишь ничтожными процентами, но все же ихъ достаточно, чтобы свести къ нулю тѣ выгоды, которыя отсутствіе затуханія даетъ для настраиванія; такимъ образомъ, достигнутая точность настраиванія оказывается не бо́льшей, чѣмъ въ примѣнявшемся до сихъ поръ искровомъ телеграфѣ.

Къ этому присоединяется еще второй недостатокъ, понижающій цѣнность телеграфированія посредствомъ незатухающихъ волнъ сравнительно съ затухающими искровыми волнами. При помощи первыхъ до сихъ поръ еще не удалось привести въ дѣйствіе *пишущій* аппаратъ, и знаки Морза можно лишь слышать въ *телефонѣ*. Примѣнительно къ условіямъ работы во флотѣ и въ арміи безъ автоматическаго записыванія телеграммы невозможно обойтись уже для контроля. Поэтому въ настоящее время виды на практическое использованіе незатухающихъ волнъ пока не совсѣмъ благопріятны. Воодушевленіе, первоначально вызванное незатухающими волнами, само стало неожиданно затухать.

Но это относится лишь къ *телеграфированію съ помощью знаковъ Морза*. Значеніе его для безпроволочнаго *телефонированія* неизмѣнно остается въ силѣ. Рядъ волнъ быстрыхъ колебаній, бѣгущихъ, не затухая, одна за другой и распространяющихся на большія разстоянія, представляетъ собою совершенное средство для надежной передачи запечатлѣвшихся въ нихъ микрофонныхъ колебаній. Незатухающія волны, пробѣгающія черезъ пространство безъ проволочныхъ проводниковъ, замѣняютъ собою постоянный токъ телефоновъ съ проводами и являются носителями звуковыхъ колебаній. Если бы мы могли охватить духовнымъ окомъ пространство, то мы различили бы въ равномѣрномъ движеніи волнъ незатухающихъ колебаній нѣкоторыя утолщенія и утоньченія, вызванныя запечатлѣвшимися въ нихъ микрофонными колебаніями: въ отношеніи напряженности и послѣдовательности во времени они соотвѣтствуютъ тончайшимъ модуляціямъ рѣчи, какъ она передается микрофономъ (рис. 19). Если мы соотвѣтствующимъ образомъ соединимъ пріемную проволоку съ телефономъ, то звуковая пластинка должна будетъ также продѣлывать всѣ эти колебанія. Къ быстрымъ колебаніямъ ухо нечувствительно; напротивъ, медленныя нарастанія оно воспринимаетъ съ ихъ точнымъ темпомъ и поэтому передаетъ намъ человѣческую рѣчь со всѣми ея тонкостями.

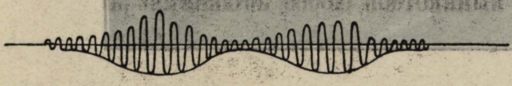


Рис. 19.

Изображенный здѣсь столъ (рис. 20 и 21), устроенный Обществомъ безпроволочныхъ телеграфовъ, представляетъ собою станцію для телефонированія безъ проводовъ. Вы видите на немъ 12 вышеупомянутыхъ свѣтовыхъ дугъ, охлаждаемыхъ водой; когда мы вводимъ ихъ въ цѣпь, онѣ начинаютъ горѣть. Находящіяся внизу сопротивленія (подъ буквами D_1 и D_2 на рисункѣ 22, изображающемъ распредѣленіе прибо-

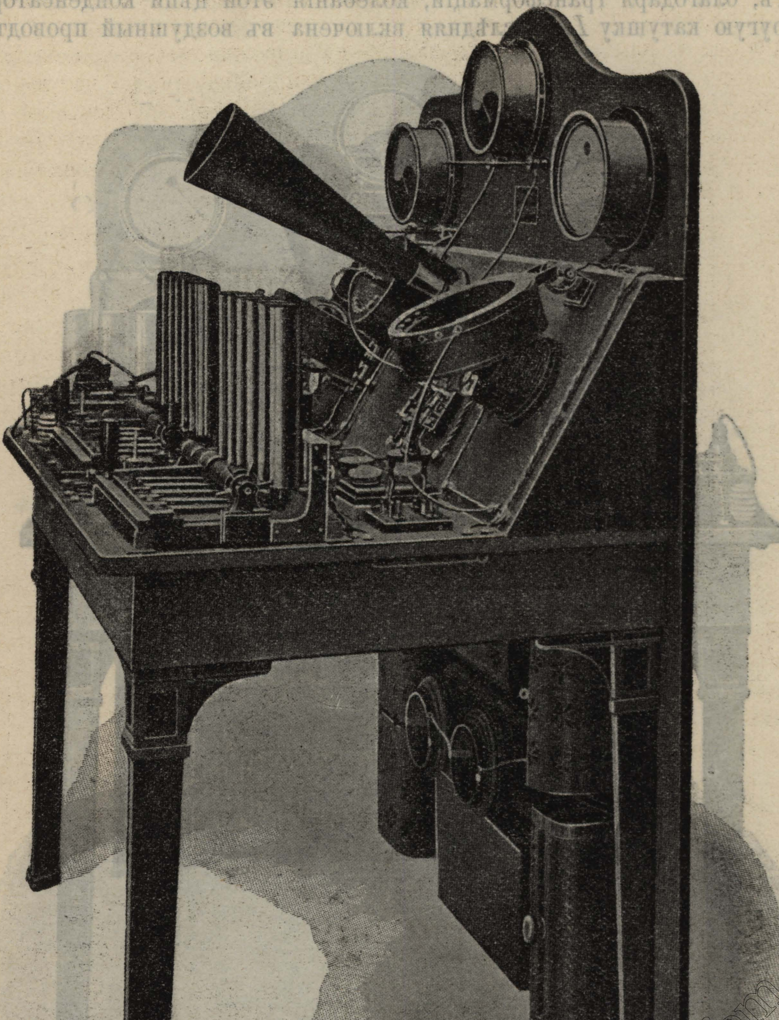


Рис. 20.

ровъ на станціи отправленія) даютъ возможность регулировать постоянный токъ; свѣтовыя дуги, параллельно съ которыми включены конденсаторъ C и катушка Lp, превращаютъ этотъ токъ въ перемѣнный высокой частоты, съ которымъ только и удается передавать дѣйствіе на разстояніе. Катушка, черезъ которую проходитъ токъ, переноситъ, благодаря трансформаціи, колебанія этой цѣпи конденсаторовъ на другую катушку Ls; послѣдняя включена въ воздушный проводъ, въ

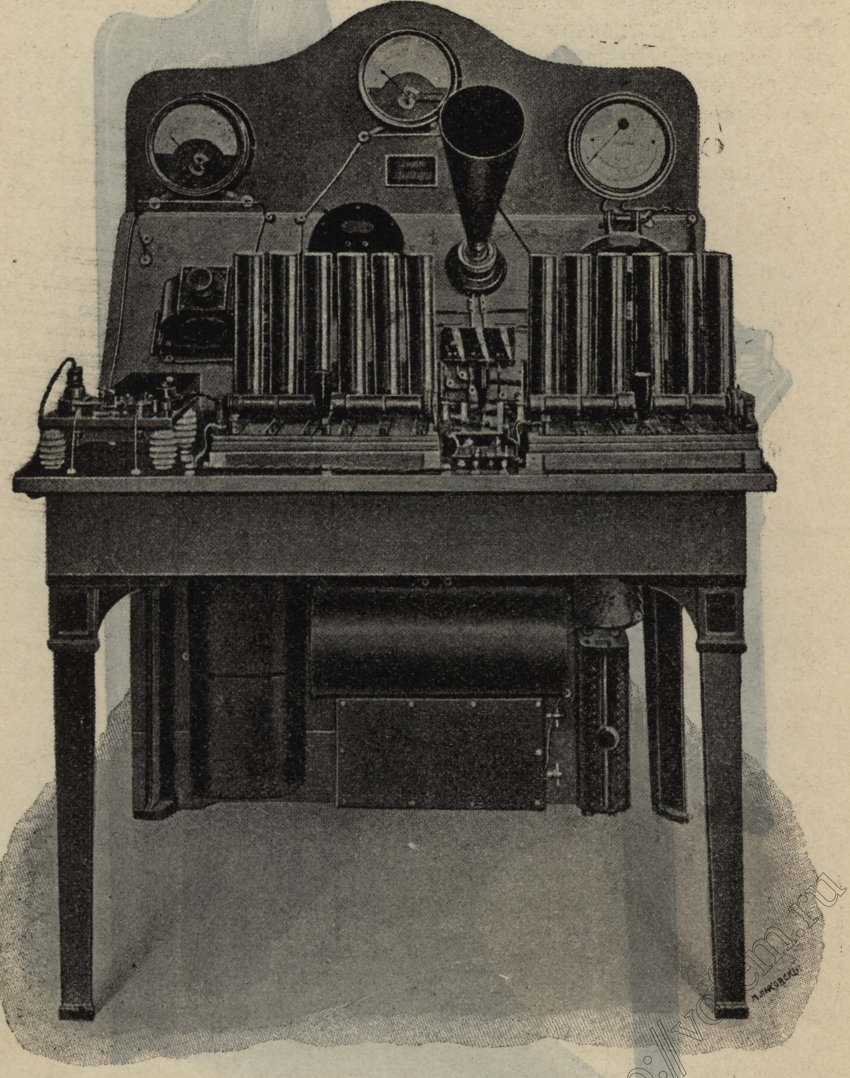


Рис. 21.

которомъ, благодаря регулированію съ помощью прибавочной катушки Lz, достигается резонансъ съ цѣпью, и такимъ образомъ одновременно съ катушкой Ls колеблется и проводъ. Если бы мы этимъ ограничились, то проводъ посылалъ бы волны совершенно такимъ же образомъ, какъ и всякая станція отправленія безпроволочнаго телеграфа, въ которой клавиши при нажатіи или размыканіи вызываютъ или прекращаютъ колебанія, при чемъ послѣднія, однако, никогда не мѣняютъ своего напряженія. Для телефонированія потребовалось варіировать ихъ въ соотвѣтствіи съ акустическими колебаніями звуковъ нашей рѣчи; это достигается съ помощью микрофона M, соединеннаго съ концами катушки Ls, включенной въ воздушный проводъ. Въ зависимости отъ измѣненій сопротивленій, испытываемыхъ микрофономъ при колебаніи его пластинки, онъ предоставляетъ быстрымъ колебаніямъ окольный путь, то болѣе, то менѣе удобопроходимый, и такимъ образомъ ритмично ослабляетъ ихъ.

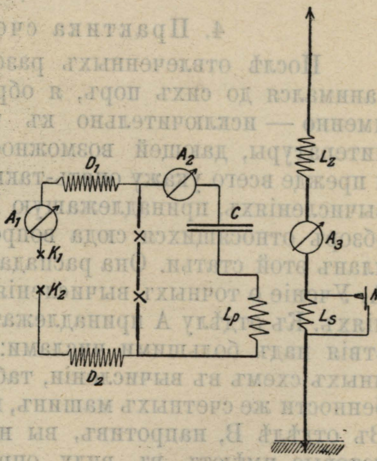


Рис. 22.

Станція можетъ служить либо только для подачи, либо же только для полученія, но не можетъ служить одновременно для обѣихъ цѣлей: дѣйствительно, сравнительно сильныя колебанія при отправленіи разрушили бы чувствительные пріемные аппараты, которые по необходимости пришлось бы включить въ ту же проволоку. Если станція установлена для полученія, то воздушная проволока какъ бы равномѣрно всасываетъ изъ пространства электрическія волны и подводитъ ихъ (детали мы здѣсь опускаемъ) къ телефонной трубкѣ (рис. 23 изображаетъ распредѣленіе приборовъ на станціи полученія), въ которой звуковыя колебанія, налагаясь на быстрыя электрическія колебанія, становятся слышными, такъ что можно ясно слышать то, что говорятъ на станціи отправленія.

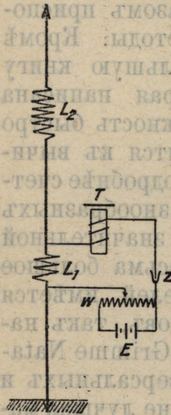


Рис. 23.

Вызвавши другую станцію, которая находится на разстояніи 4 километровъ отсюда въ домѣ Общества безпроволочныхъ телеграфовъ, но отдѣлена отъ насъ моремъ берлинскихъ домовъ, мы ясно слышимъ произносимыя тамъ числа и можемъ вступить въ разговоръ съ находящимися тамъ людьми. Поразительно здѣсь отсутствіе всякаго посторонняго шума.

Пѣніе Карузо, правда лишь изъ трубы граммофона, доносится до нашего уха въ совершеннѣйшей чистотѣ сквозь шумный ревъ мірового города.

Лекціи по ариѳметикѣ для учителей,

читанныя въ $190^7/_8$ академическомъ году профессоромъ Ф. Клейномъ въ Гёттингенѣ.

(Продолженіе).

4. Практика счета съ цѣлыми числами.

Послѣ отвлеченныхъ разсужденій, которыми я преимущественно занимался до сихъ поръ, я обращусь теперь къ конкретнымъ вещамъ, именно — исключительно къ числовымъ вычисленіямъ. Изъ литературы, дающей возможность въ этомъ вопросѣ оріентироваться, я прежде всего укажу опять-таки на статью въ энциклопедіи о числовыхъ вычисленіяхъ, принадлежащую Р. Мемке*). Я лучше всего дамъ вамъ обзоръ относящихся сюда вопросовъ, если прежде всего изложу вамъ планъ этой статьи. Она распадается прежде всего на двѣ части, именно: A. Ученіе о точныхъ вычисленіяхъ; B. Ученіе о приближенныхъ вычисленіяхъ. Къ отдѣлу A принадлежатъ всѣ методы, облегчающіе точныя дѣйствія надъ большими числами: такъ, напримѣръ, примѣненіе тѣхъ или иныхъ схемъ въ вычисленіи, таблицъ произведеній и квадратовъ, въ особенности же счетныхъ машинъ, которыми мы сейчасъ займемся подробнѣе. Въ отдѣлѣ B, напротивъ, вы найдете разработку всѣхъ тѣхъ пріемовъ, которые имѣютъ въ виду опредѣлить только порядокъ величины результата, т. е. установить первыя значащія его цифры. Сюда относятся таблицы логариѳмовъ и аналогичныя средства вычисленія, какъ напримѣръ, счетная линейка, которая, строго говоря, представляетъ собой только графическую таблицу логариѳмовъ, особымъ образомъ приспособленную, и, наконецъ, многочисленные графическіе методы. Кромѣ этого реферата, я могу еще рекомендовать вамъ небольшую книгу Люрота—„Лекціи о числовыхъ вычисленіяхъ" **), которая написана знатокомъ дѣла и при пріятномъ изложеніи даетъ возможность быстро оріентироваться въ вопросѣ. Изъ всего того, что относится къ вычисленіямъ надъ цѣлыми числами, я намѣренъ описать вамъ подробнѣе счетную машину, которую въ настоящее время въ весьма разнообразныхъ конструкціяхъ можно найти въ любой болѣе или менѣе значительной конторѣ и которая практически дѣйствительно имѣетъ весьма большое значеніе. Въ нашемъ кабинетѣ математическихъ моделей имѣется экземпляръ одного изъ наиболѣе распространенныхъ типовъ, такъ называемой „Brunsviga", которая изготовляется фирмой „Grimme Natalis und Co." въ Брауншвейгѣ. Это одна изъ наиболѣе универсальныхъ и въ то же время изъ наиболѣе простыхъ машинъ; хотя это и не лучшая машина, но она имѣетъ то большое преимущество, что она сравнительно дешева—она стоитъ только отъ 200 до 300 марокъ. Въ первоначальномъ своемъ видѣ она была изобрѣтена русскимъ математикомъ Однеромъ и долгое время была извѣстна подъ названіемъ ариѳмометра (рис. 1). Устройство этой машины я хочу вамъ объяснить здѣсь въ видѣ примѣра, нѣсколько подробнѣе; описаніе другихъ конструкцій вы найдете

*) R. Mehmke. „Numerisches Rechnen". Encykl., Bd. I, Teil 2.
**) F. Lüroth. „Vorlesungen über numerisches Rechnen". Leipzig, 1900.

въ упомянутыхъ выше сочиненіяхъ. Конечно, по моему описанію вы только въ томъ случаѣ дѣйствительно поймете устройство машины, если вы потомъ къ ней присмотритесь и сами на дѣлѣ ознакомитесь съ ея функціями. Машина находится въ вашемъ распоряженіи послѣ лекціи. Что касается, прежде всего, внѣшняго вида машины „Brunsviga“, то схематически ее можно описать слѣдующимъ образомъ. Къ довольно большой крѣпкой коробкѣ (барабану) снизу прикрѣпленъ меньшій продолговатый футляръ (каретка), которая можетъ передвигаться вдоль по барабану впередъ и назадъ. Съ правой стороны съ барабана выступаетъ рукоятка, которую можно крутить рукой. На барабанѣ сдѣлано нѣсколько продолговатыхъ прорѣзовъ, вдоль каждаго изъ которыхъ сверху внизъ нанесены цифры 0, 1, 2, . . . , 9. Изъ каждаго прорѣза выступаетъ спица S, которую можно установить противъ любой изъ этихъ цифръ. Каждому изъ этихъ прорѣзовъ отвѣчаетъ на кареткѣ отверстіе, въ которомъ можетъ появиться цифра. Я полагаю, что устройство машины вамъ выяснится лучше всего, если я опишу вамъ выполненіе какого-нибудь вычисленія и выясню, какъ его производитъ машина. Выбираю для этого умноженіе.

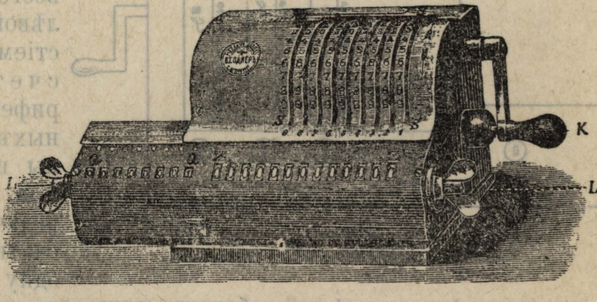


Рис. 1.

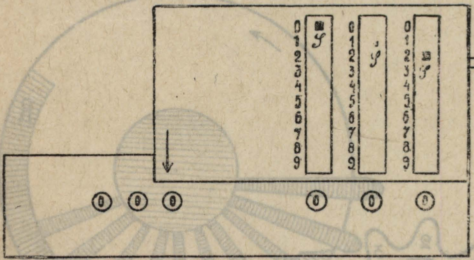


Рис. 2.

Пріемъ заключается въ слѣдующемъ. Прежде всего нужно поставить при помощи спицъ, выступающихъ изъ барабана, множимое. Это значитъ, что нужно поставить сначала первую спицу съ правой стороны на цифру, стоящую въ разрядѣ единицъ, вторую—на цифру въ разрядѣ десятковъ и т. д. Всѣ остальныя спицы остаются на нуляхъ. Если 12 есть множимое, то первая спица справа долженъ быть поставлена на 2, вторая на 1, а остальныя остаются на нуляхъ (рис. 2).

Теперь повернемъ рукоятку слѣва направо на одинъ оборотъ. Тогда внизу, въ отверстіяхъ каретки, появится множимое. Стало быть, въ нашемъ случаѣ появится двойка въ первомъ отверстіи справа, единица — во второмъ, а въ остальныхъ останутся нули. Одновременно съ этимъ на счетчикѣ, цифры котораго появляются въ рядѣ отверстій, помѣщающихся съ лѣвой стороны каретки, появляется единица, показывающая, что мы повернули каретку одинъ разъ (рис. 3). Если мы вообще имѣемъ однозначный множитель, то рукоятку нужно повернуть столько разъ, сколько во множителѣ единицъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ множитель появится на кареткѣ съ лѣвой стороны, а произведеніе — съ правой.

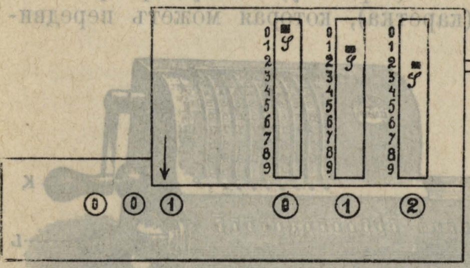


Рис. 3.

Какимъ же образомъ аппаратъ воспроизводитъ этотъ результатъ? Прежде всего, внизу въ кареткѣ, съ лѣвой стороны, подъ отверстіемъ счетчика, придѣлано счетное колесо, на периферіи котораго, на равныхъ разстояніяхъ, нанесены цифры 0, 1, 2, . . . , 9, при чемъ, при помощи передачи зубчатыми колесами, счетное колесо совершаетъ одну десятую оборота, когда рукоятка дѣлаетъ цѣлый оборотъ, такъ что цифра, находящаяся наверху колеса подъ отверстіемъ каретки, дѣйствительно показываетъ число оборотовъ рукоятки, т. е. показываетъ множитель.

Что касается произведенія, то для его воспроизведенія подъ каждымъ отверстіемъ съ правой стороны каретки помѣщается счетное колесо такой же конструкціи. Но какимъ образомъ оказывается, что теперь при оборотѣ рукоятки въ приведенномъ выше примѣрѣ одно колесо проскакиваетъ на одну единицу, второе въ то же время на двѣ единицы? Здѣсь, собственно, и находитъ себѣ примѣненіе конструктивная особенность машины „Brunsviga“. Именно подъ каждымъ прорѣзомъ барабана находится плоское колесо (двигательное колесо); къ нему придѣлано девять зубцовъ, которые могутъ двигаться въ радіальномъ направленіи. По краю плоскаго круга движется кольцо R (рис. 4 и 5), поворачивающееся, когда мы переставляемъ спицу S, о которой была рѣчь выше; именно, смотря по мѣткѣ, на которую мы ставимъ спицу S на прорѣзѣ, наружу выскакиваютъ 0, 1, 2, . . . , или 9 подвижныхъ зубцовъ (на рис. 4 выдвинуты два зубца). Эти зубцы непосредственно попадаютъ подъ соотвѣтствующее отверстіе счетнаго колеса, и поэтому при одномъ оборотѣ рукоятки каждое

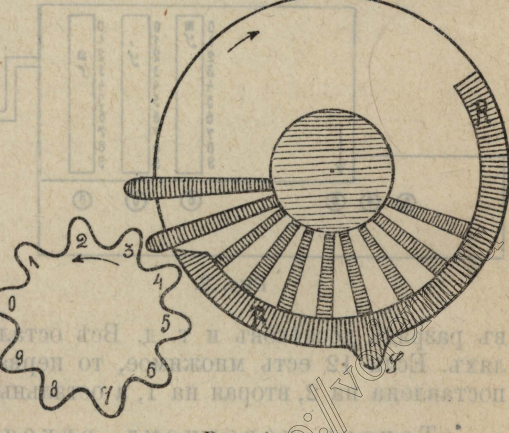


Рис. 4.

двигательное колесо поворачиваетъ соотвѣтствующее счетное колесо каретки на столько единицъ, сколько въ немъ выскочило зубцовъ, т. е. сколько указываетъ цифра, на которую мы установили соотвѣтствующую спицу S.

Сообразно этому, въ указанномъ выше примѣрѣ, если мы начинаемъ съ нулевого положенія, послѣ одного поворота рукоятки колесо единицъ должно повернуться на двѣ единицы, колесо десятковъ на одну, и на кареткѣ появится 12; при второмъ поворотѣ рукоятки колесо единицъ вновь повернется на 2, колесо десятковъ на 1 единицу, и машина покажетъ 24. Такимъ же образомъ послѣ трехъ и четырехъ оборотовъ рукоятки мы получимъ $36 = 3 . 12$ и $48 = 4 . 12$.

Теперь повернемъ рукоятку въ пятый разъ. Согласно тому, что было объяснено выше, колесо единицъ повернется на двѣ единицы и остановится, слѣдовательно, на нулѣ, колесо же десятковъ должно повернуться на одну единицу и стать на 5, такъ что мы получили бы неправильный результатъ 50 вмѣсто $5 . 12 = 60$. Когда мы дѣйствительно будемъ поворачивать рукоятку, то на кареткѣ незадолго до конца поворота дѣйствительно появится 50; но, когда мы доведемъ оборотъ до конца, то въ послѣдній моментъ цифра мѣняется на 6, такъ что появляется правильный результатъ. Здѣсь произошло, слѣдовательно, еще кое-что, чего мы не описали,— процессъ, представляющій наиболѣе тонкій пунктъ при устройствѣ каждой счетной машины,— такъ называемое перенесеніе десятковъ. Принципъ, при помощи котораго эта задача разрѣшается, заключается въ слѣдующемъ: когда одно изъ счетныхъ колесъ каретки (въ нашемъ примѣрѣ колесо единицъ) проходитъ черезъ нуль, то оно нажимаетъ одинъ зубецъ, остающійся, обыкновенно, сбоку безъ дѣйствія. Благодаря этому упомянутое двигательное колесо захватываетъ соотвѣтствующее счетное колесо такъ, что послѣднее продвигается на одну единицу больше, чѣмъ это произошло бы безъ нажатія. Детали этой конструкціи вы можете себѣ выяснить, только непосредственно разсмотрѣвъ самый аппаратъ. Останавливаться на этихъ деталяхъ тѣмъ болѣе нецѣлесообразно, что именно въ дѣлѣ перенесенія десятковъ въ машинахъ различныхъ системъ находятъ себѣ примѣненіе другіе принципы. Тѣмъ не менѣе я очень рекомендую вамъ разсмотрѣть нашу машину, какъ примѣръ чрезвычайно остроумной конструкціи. Въ нашей коллекціи имѣются особые экземпляры отдѣльныхъ составныхъ частей машины „Brunsviga“, которыя въ составленной машинѣ почти не видны. Вы можете, такимъ образомъ, составить себѣ вполнѣ ясное представленіе объ устройствѣ машины.

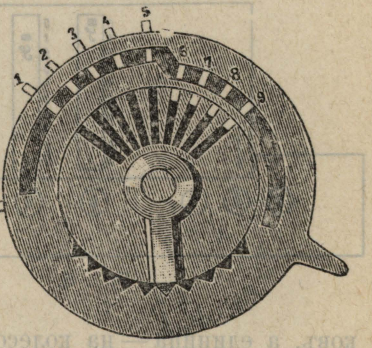


Рис. 5.

Дѣйствіе машины, насколько мы съ нею до сихъ поръ познакомились, мы можемъ выразить однимъ словомъ, если мы назовемъ ее машиной сложенія въ томъ смыслѣ, что она, при каждомъ оборотѣ рукоятки, прибавляетъ къ числу, стоящему справа внизу каретки, множимое одинъ разъ.

Наконецъ, я хочу еще въ общихъ чертахъ описать то приспособленіе, которое даетъ возможность быстро оперировать также съ многозначными сомножителями. Если бы намъ нужно было умножить 12 на 15, то мы должны были бы, сообразно выясненному пріему, повернуть рукоятку 15 разъ. Кромѣ того, если бы мы пожелали, чтобы съ лѣвой стороны на счетчикѣ появился весь множитель, то и къ счетчику должно было быть придѣлано приспособленіе для счета десятковъ. То и другое устраняется слѣдующимъ образомъ. Мы выполняемъ сначала умноженіе на 5, такъ что на кареткѣ появляются съ правой стороны 60, съ лѣвой стороны — 5. Теперь мы передвигаемъ каретку на одинъ разрядъ направо; при этомъ счетное колесо единицъ выключается, колесо же десятковъ устанавливается подъ прорѣзомъ для единицъ въ барабанѣ и т. д.; въ то же время на лѣвомъ концѣ на счетчикѣ вмѣсто колеса единицъ приходитъ въ соединеніе съ рукояткой колесо десятковъ. Если поэтому мы повернемъ теперь рукоятку одинъ разъ, то слѣва появляется единица на мѣстѣ десятковъ, такъ что мы можемъ прочесть 15. Справа же производится сложеніе не въ порядкѣ $\begin{array}{r}60\\12\end{array}$, а въ порядкѣ $\begin{array}{l}\;\,60\\12\end{array}$, т. е. къ 60 прибавляется 120: прибавляемая двойка переносится на колесо десятковъ, а единица — на колесо сотенъ. Вы видите, такимъ образомъ, что этотъ пріемъ представляетъ собой машинное осуществленіе того процесса, который мы производимъ, когда дѣлаемъ умноженіе на письмѣ, именно, когда мы подписываемъ послѣдовательныя частныя произведенія одно подъ другимъ, постепенно отодвигая ихъ каждый разъ на одинъ знакъ налѣво. Совершенно такимъ же образомъ мы всегда производимъ умноженіе съ многозначными числами, подвигая послѣ обыкновеннаго умноженія на единицы каретку послѣдовательно на одинъ, на два, на три разряда направо и поворачивая послѣ этого рукоятку соотвѣтственно столько разъ, сколько въ множителѣ есть десятковъ, сотенъ и т. д.

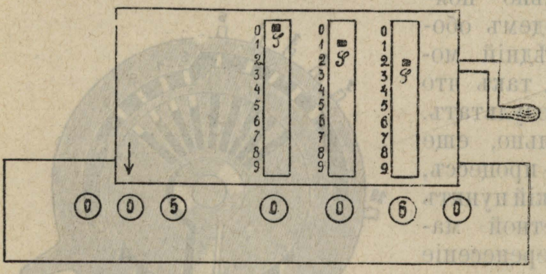
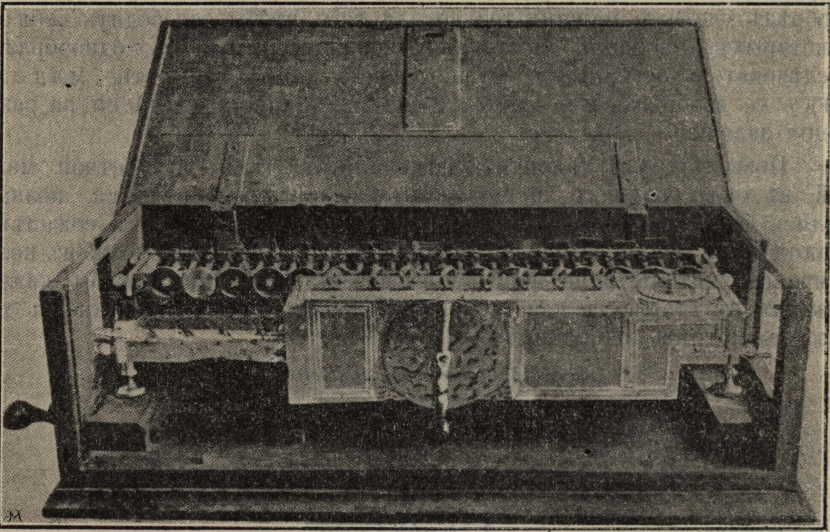


Рис. 6.

Какъ производятся при помощи машины другія вычисленія, вы можете непосредственно видѣть на аппаратѣ. Здѣсь достаточно будетъ замѣтить, что вычитаніе и дѣленіе производятся вращеніемъ рукоятки въ обратную сторону.

Позвольте мнѣ еще указать, подводя итогъ всему сказанному, что теоретическій принципъ этой машины совершенно элементаренъ и представляетъ только практическое осуществленіе правилъ, которыми мы обычно пользуемся при механическомъ вычисленiи. Конечно, чтобы машина вполнѣ надежно функцiонировала, чтобы всѣ части были точно прилажены, чтобы не было мертвыхъ точекъ, при которыхъ могла бы произойти остановка во вращенiи счетныхъ колесъ, все это задача конструктора и механика, изготовляющаго машину.

Остановимся еще на минутку *на общемъ значенiи того факта*, что дѣйствительно существуютъ счетныя машины, которыя освобождаютъ математика отъ чисто механической работы числовыхъ вычисленiй и которыя выполняютъ это быстрѣе и болѣе безошибочно, такъ какъ машина свободна отъ случайныхъ ошибокъ, съ которыми всегда можетъ быть сопряжено бѣглое вычисленiе. *Самое существованiе такого рода машины можетъ служить для насъ подтвержденiемъ того, что для производства вычисленiй существеннымъ является не значенiе цѣлыхъ*



Рпс. 7.
Счетная машина Лейбница.

числъ, а формальныя правила, по которымъ они совершаются, ибо машина можетъ слѣдовать только этимъ правиламъ— такъ она устроена,—но нагляднаго представленiя о значенiи чиселъ она имѣть не можетъ. Врядъ ли можно считать случаемъ то обстоятельство, что такой человѣкъ, какъ *Лейбницъ*, который былъ въ такой же мѣрѣ абстрактнымъ мыслителемъ перваго ранга, такъ и человѣкомъ выдающихся практическихъ дарованiй, является одновременно какъ отцомъ чисто формальной математики, такъ и изобрѣтателемъ первой счетной машины. Его машина (рис. 7) еще по настоящее время представляетъ одно изъ наиболѣе цѣнныхъ достоянiй музея *Кестнера* въ Ганноверѣ. Хотя это исторически и неудостовѣрено, но я склоненъ допустить, что *Лейбницъ* имѣлъ въ виду изобрѣтенiемъ счетной машины не только достигнуть практическихъ значеній, но и ярко освѣтить строго формальный характеръ математическихъ вычисленій.

Само собою разумѣется, однако, что Лейбницъ отнюдь не былъ склоненъ изобрѣтеніемъ счетной машины умалить значеніе математической мысли, а между тѣмъ такого рода выводы иногда приходится слышать. „Если", говорятъ, „дѣятельность науки можетъ осуществляться также машиной, то на эту науку, конечно, немного можно поставить, и роль ея неизбѣжно должна быть совершенно второстепенной". Однако, на такого рода аргументацію достаточно возразить, что математикъ, когда онъ самъ оперируетъ надъ числами и формулами, отнюдь не представляетъ собой только жалкую копію непогрѣшимой машины,—что онъ ни въ какомъ случаѣ не является „мыслителемъ безъ мысли" по выраженію Томэ. Напротивъ, онъ самъ себѣ ставитъ задачи, имѣющія опредѣленную и полезную цѣль, и разрѣшаетъ ихъ всякій разъ новыми, своеобразными пріемами. Онъ изобрѣлъ счетную машину только для того, чтобы освободить себя отъ нѣкоторыхъ операцій, постоянно повторяющихся въ однообразной послѣдовательности; и что нужно менѣе всего забывать, математикъ ее изобрѣлъ, и математикъ постоянно ставитъ ей на разрѣшеніе задачи.

Позвольте мнѣ закончить пожеланіемъ, чтобы со счетной машиной, въ виду большого значенія, которое она пріобрѣтаетъ, познакомились болѣе широкіе круги; въ настоящее время ее, къ сожалѣнію, знаютъ еще весьма немногіе. Прежде всего же съ нею долженъ познакомиться учитель; я не могу не высказать пожеланія, чтобы каждый ученикъ въ старшемъ классѣ средней школы имѣлъ возможность хоть разъ посмотрѣть эту машину.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Къ геометріи треугольника.

А. Кириллова.

(*Окончаніе**).

Формулы. Возвращаясь снова къ нашимъ условіямъ, мы видимъ, что отрѣзки, на которые дѣлятся точками D, E и F стороны треугольника ABC, удовлетворяютъ равенству

$$AF.BD.CE = FB.DC.EA,$$

такъ какъ

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\alpha} = 1.$$

Отсюда заключаемъ, что прямыя линіи AD, BE и CF пересѣкаются въ одной точкѣ, которая на чертежѣ обозначена буквою M. По той же

*) См. №№ 443—444 и 462 „Вѣстника".

причинѣ линіи AD', BE' и CF' также проходятъ черезъ одну и ту же точку — M_1.

Условившись обозначать разстоянія точки M отъ сторонъ BC, CA и AB даннаго треугольника черезъ X_a, X_b и X_c, а разстоянія точки M_1 — черезъ X'_a, X'_b X'_c, найдемъ отношенія этихъ разстояній къ соотвѣтствующимъ высотамъ треугольника ABC въ зависимости отъ чиселъ α, β и γ. Для этого изъ точекъ M и F опустимъ перпендикуляры MP и FG на линію BC, MQ и FI — на линію CA. Тогда, пользуясь принятыми обозначеніями, будемъ имѣть:

$$X_b : X_a = FI : FG.$$

Но при выводѣ первыхъ девяти формулъ мы видѣли, что

$$FG = \frac{h_a\beta}{\alpha+\beta},\ FI = \frac{h_b\alpha}{\alpha+\beta},$$

а потому

$$X_b : X_a = \alpha h_b : \beta h_a.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что

$$X_c : X_a = \alpha h_c : \gamma h_a.$$

Опредѣливъ изъ этихъ пропорцій X_b и X_c и подставивъ ихъ выраженія въ равенство

$$a.X_a + b.X_b + c.X_c = 2\Delta,$$

гдѣ Δ есть площадь треугольника ABC, получимъ формулу

$$\frac{X_a}{h_a} = \frac{\omega}{\alpha}, \tag{19}$$

въ которой буквою ω обозначено число, опредѣляемое соотношеніемъ

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}.$$

Затѣмъ по аналогіи можно написать:

$$\frac{X_b}{h_b} = \frac{\omega}{\beta}, \tag{20}$$

$$\frac{X_c}{h_c} = \frac{\omega}{\gamma}. \tag{21}$$

Если бы мы замѣнили въ нашихъ условіяхъ дроби $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ и $\frac{\gamma}{\alpha}$ обратными отношеніями, или, что то же, вмѣсто чиселъ α, β и γ написали $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ и $\frac{1}{\gamma}$, то, очевидно, точки M и M_1 обмѣнялись бы своими мѣстами, а предыдущія три формулы, выведенныя для первой изъ этихъ двухъ точекъ, относились бы ко второй и въ этомъ случаѣ имѣли бы такой видъ:

$$\frac{X'_a}{h_a}=\frac{\alpha}{\omega_1}, \tag{22}$$

$$\frac{X'_b}{h_b}=\frac{\beta}{\omega_1}, \tag{23}$$

$$\frac{X'_c}{h_c}=\frac{\gamma}{\omega_1}. \tag{24}$$

при чемъ для краткости положено:

$$\omega_1=\alpha+\beta+\gamma^{*)}$$

Теоремы. 11. Разстоянія точки M_1 отъ сторонъ треугольника ABC относятся между собою такъ, какъ разстоянія точки M, умноженныя на квадраты чиселъ α, β и γ.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ трехъ послѣднихъ формулъ непосредственно вытекаетъ, что

$$X'_a : X'_b : X'_c = \alpha h_a : \beta h_b : \gamma h_c .$$

Съ другой стороны, умноживъ равенства (19), (20) и (21) соотвѣтственно на α^2, β^2 и γ^2, найдемъ:

$$\alpha^2 X_a : \beta^2 X_b : \gamma^2 X_c = \alpha h_a : \beta h_b : \gamma h_c .$$

Слѣдовательно,

$$X'_a : X'_b : X'_c = \alpha^2 X_a : \beta^2 X_b : \gamma^2 X_c .$$

12. Среднія геометрическія разстояній точекъ M и M_1 отъ сторонъ треугольника ABC пропорціональны разстояніямъ отъ сторонъ этого треугольника точки пересѣченія его медіанъ.

Дѣйствительно, если положимъ $X_a X'_a = M_a^2$, $X_b X'_b = M_b^2$, $X_c X'_c = M_c^2$, то при помощи формулъ 19 — 24 найдемъ, что

$$\frac{M_a}{h_a}=\frac{M_b}{h_b}=\frac{M_c}{h_c}.$$

---

*) Нѣкоторыя свойства треугольника можно разсматривать, какъ слѣдствія, вытекающія изъ формулъ 19 — 24. Такъ, напримѣръ, въ томъ частномъ случаѣ, когда $\alpha=\beta=\gamma$, находимъ: $\frac{X_a}{h_a}=\frac{X_b}{h_b}=\frac{X_c}{h_c}=\frac{1}{3}$, откуда легко вывести извѣстное свойство точки, въ которой пересѣкаются медіаны треугольника. Если $\alpha=a$, $\beta=b$, $\gamma=c$, т. е. сами линіи AD', BE' и CF' — биссектрисы треугольника ABC, то $X'_a=X'_b=X'_c=\frac{\Delta}{p}$, гдѣ p — полупериметръ треугольника и т. д.

Съ другой стороны, обозначивъ черезъ G_a, G_b и G_c разстоянія отъ сторонъ треугольника ABC центра его тяжести, будемъ имѣть:

$$\frac{G_a}{h_a}=\frac{G_b}{h_b}=\frac{G_c}{h_c},$$

а потому

$$\frac{M_a}{G_a}=\frac{M_b}{G_b}=\frac{M_c}{G_c}.$$

13. Площадь треугольника $A_1B_1C_1$ такъ относится къ площади треугольника ABC, какъ учетверенное произведеніе разстояній точки M (или M_1) отъ сторонъ треугольника ABC относится къ произведенію разстояній той же точки отъ внѣшнихъ его медіанъ.

Обозначивъ буквою U точку пересѣченія линій BC и B_1C_1, непосредственно изъ чертежа будемъ имѣть:

$$\text{пл. } A_1B_1C_1 = \text{пл. } A_1BC + \text{пл. } B_1CU - \text{пл. } BC_1U,$$

или

$$2\Delta_1 = ax_a + CU\,.\,y_a - BU\,.\,z_a,$$

гдѣ Δ_1 есть площадь треугольника $A_1B_1C_1$. Зная (теор. 10), что сторона BC даннаго треугольника дѣлится точкою U въ отношеніи $\beta(\alpha^2-\gamma^2):\gamma(\alpha^2-\beta^2)$, и принимая во вниманіе формулы (1), (4) и (7), находимъ:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{4\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}.$$

Но если перемножимъ почленно равенства (19), (20) и (21), а затѣмъ вытекающія изъ нихъ равенства

$$\frac{h_a-X_a}{h_a}=\frac{(\beta+\gamma)\omega}{\beta\gamma},$$

$$\frac{h_b-X_b}{h_b}=\frac{(\alpha+\gamma)\omega}{\alpha\gamma},$$

$$\frac{h_c-X_c}{h_c}=\frac{(\alpha+\beta)\omega}{\alpha\beta},$$

и равныя произведенія раздѣлимъ на равныя, то получимъ:

$$\frac{X_aX_bX_c}{(h_a-X_a)(h_b-X_b)(h_c-X_c)}=\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{4X_aX_bX_c}{(h_a-X_a)(h_b-X_b)(h_c-X_c)},$$

что и требовалось доказать.

14. Прямая MM_1 совпадаетъ съ линіей, на которой лежатъ точки A_2, B_2 и C_2.

Дѣйствительно, опустивъ изъ точки R пересѣченія линіи MM_1 со стороною BC даннаго треугольника перпендикуляры RK и RL на стороны CA и AB, будемъ имѣть:

$$BR:BC=RL:h_c,\; CR:BC=RK:h_b,$$

а изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что

$$\frac{BR}{CR}=\frac{RL}{RK}\cdot\frac{h_b}{h_c}.$$

Но если мы изъ точки R проведемъ прямую линію, параллельную сторонѣ AB даннаго треугольника, и обозначимъ черезъ N и N_1 точки ея пересѣченія съ перпендикулярами, опущенными изъ точекъ M и M_1 на ту же сторону, то найдемъ, что

$$\frac{MN}{M_1N_1}=\frac{MP}{M_1P_1},$$

или

$$\frac{X_c-RL}{X'_c-RL}=\frac{X_a}{X'_a},$$

откуда

$$RL=\frac{X'_aX_c-X_aX'_c}{X'_a-X_a}.$$

Точно такъ же можетъ быть выведено и равенство:

$$RK=\frac{X'_aX_b-X_aX'_b}{X'_a-X_a}.$$

Поэтому

$$\frac{BR}{CR}=\frac{X_aX_c-X_aX'_c}{X'_aX_b-X_aX'_b}\cdot\frac{h_b}{h_c}.$$

Теперь при помощи формулъ 19 — 24 легко получить:

$$BR:CR=\beta(\alpha^2-\gamma^2):\gamma(\alpha^2-\beta^2).$$

Если S есть точка пересѣченія линіи MM_1 со стороною CA треугольника ABC, то подобнымъ же образомъ найдемъ, что

$$AS:CS=\alpha(\gamma^2-\beta^2):\gamma(\alpha^2-\beta^2).$$

Но мы знаемъ (теор. 10), что въ такихъ же отношеніяхъ стороны BC и CA даннаго треугольника дѣлятся прямою, на которой лежатъ точки A_2, B_2 и C_2, откуда заключаемъ, что точки M, M_1, A_2, B_2 и C_2 расположены на одной и той же прямой линіи.

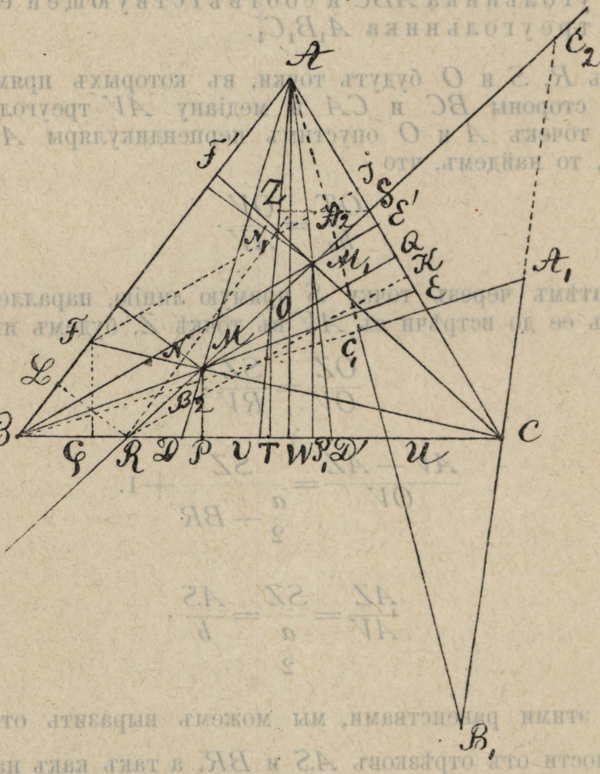
15. Если произведенія разстояній точекъ M и M_1 отъ сторонъ треугольника ABC раздѣлимъ на произведенія разстояній тѣхъ же точекъ отъ

сторонъ треугольника $A_1B_1C_1$, то получимъ одинаковыя частныя.

Обозначивъ разстоянія точки M отъ сторонъ треугольника $A_1B_1C_1$ черезъ Y_a, Y_b и Y_c, а разстоянія точки M_1 — черезъ Y'_a, Y'_b и Y'_c и принявъ во вниманіе, что точка A_2 лежитъ на прямой MM_1 (теор. 14), будемъ имѣть:

$$\frac{MA_2}{M_1A_2} = \frac{Y_a}{Y'_a}, \text{ или } \frac{x'_a - X_a}{x'_a - X'_a} = \frac{Y_a}{Y'_a}.$$

Пользуясь формулами (10), (19) и (22), мы можемъ представить по-



слѣднее равенство въ такомъ видѣ:

$$\frac{X_a}{Y_a} \cdot \left(\frac{a^2}{\beta\gamma}\right)^2 = \frac{X'_a}{Y'_a}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$\frac{X_b}{Y_b} \cdot \left(\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}\right)^2 = \frac{X'_b}{Y'_b},$$

$$\frac{X_c}{Y_c} \cdot \left(\frac{\gamma^2}{\alpha\beta}\right)^2 = \frac{X'_c}{Y'_c}.$$

Перемноживъ почленно всѣ три равенства, получимъ:

$$\frac{X_a X_b X_c}{Y_a Y_b Y_c} = \frac{X'_a X'_b X'_c}{Y'_a Y'_b Y'_c},$$

что и требовалось доказать.

16. Медіана какой-либо стороны треугольника ABC дѣлитъ отрѣзокъ MM_1 въ отношеніи, равномъ отношенію среднихъ геометрическихъ разстояній точекъ M и M_1 отъ той же стороны треугольника ABC и соотвѣтствующей ей стороны треугольника $A_1B_1C_1$.

Пусть R, S и O будутъ точки, въ которыхъ прямая MM_1 пересѣкаетъ стороны BC и CA и медіану AV треугольника ABC. Если изъ точекъ A и O опустимъ перпендикуляры AW и OT на линію BC, то найдемъ, что

$$\frac{OT}{h_a} = \frac{OV}{AV}.$$

Проведя затѣмъ черезъ точку S прямую линію, параллельную BC и продолживъ ее до встрѣчи съ AV въ точкѣ Z, будемъ имѣть:

$$\frac{OZ}{OV} = \frac{SZ}{RV},$$

или

$$\frac{AV - AZ}{OV} = \frac{SZ}{\frac{a}{2} - BR} + 1.$$

Но

$$\frac{AZ}{AV} = \frac{SZ}{\frac{a}{2}} = \frac{AS}{b}.$$

Пользуясь этими равенствами, мы можемъ выразить отношеніе $\frac{OV}{AV}$ въ зависимости отъ отрѣзковъ AS и BR, а такъ какъ намъ извѣстно (теор. 14), въ какомъ отношеніи каждая изъ сторонъ треугольника ABC дѣлится прямою MM_1, то легко найдемъ, что

$$\frac{OV}{AV} = \frac{OT}{h_a} = \frac{\alpha^2 + \beta\gamma}{\alpha(\beta + \gamma) + (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)}.$$

Если опредѣлимъ отсюда перпендикуляръ OT къ линіи BC и подставимъ его значеніе въ пропорцію

$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{OT - X_a}{X'_a - OT},$$

то, принявъ во вниманіе формулы (19) и (22), получимъ:

$$\frac{OM}{OM_1}=\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}\cdot\frac{X_a}{X'_a}.$$

Но при доказательствѣ теоремы 15 было выведено соотношеніе:

$$\frac{X_a}{Y_a}\cdot\left(\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}\right)^2=\frac{X'_a}{Y'_a},$$

которымъ можно воспользоваться для того, чтобы предыдущее равенство представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{OM}{OM_1}=\sqrt{\frac{X_a\,Y_a}{X'_a\,Y'_a}}=\frac{\sqrt{X_a\,Y_a}}{\sqrt{X'_a\,Y'_a}},$$

что и требовалось доказать.

Точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, и C_2 составляютъ одну изъ группъ тѣхъ 30 точекъ, въ которыхъ пересѣкаются 12 трансверсалей треугольника ABC, опредѣляемыхъ точками D, E, F, D', E' и F'. Само собою разумѣется, что свойства точекъ той или иной группы зависятъ отъ способа группировки. Такъ, напримѣръ, обозначивъ черезъ A_3, B_3 C_3, A_4, B_4 и C_4 послѣдовательно точки пересѣченія линій DF и $D'E'$, ED и $E'F'$, FD и $F'E'$, DE и $D'F'$, EF и $E'D'$, FE и $F'D'$, мы могли бы убѣдиться, что прямыя A_3A_4, B_3B_4 и C_3C_4 проходятъ соотвѣтственно черезъ вершины A, B и C даннаго треугольника, что эти три линіи пересѣкаются въ одной точкѣ и т. д. Съ другой стороны, очевидно, что число трансверсалей и, слѣдовательно, число точекъ ихъ пересѣченія увеличится, если мы распространимъ наши условія и на тѣ случаи, когда стороны треугольника ABC дѣлятся внѣшне. Такимъ образомъ, выведенныя нами формулы и доказанныя на основаніи этихъ формулъ теоремы, не представляя рѣшенія задачи о трансверсаляхъ треугольника въ томъ объемѣ, который опредѣляется принятыми нами условіями, лишь освѣщаютъ въ нѣкоторой степени общій характеръ геометрическихъ истинъ, вытекающихъ изъ этихъ условій. Такова, по крайней мѣрѣ, была та цѣль, которую мы имѣли въ виду.

Происхожденіе цвѣтовъ спектра

П. Зеемана.

(*Продолженіе*).

II.

Тонкія спектральныя линіи совершенно необходимы въ нѣкоторыхъ изслѣдованіяхъ, имѣющихъ въ виду дать рѣшеніе второй изъ двухъ формулированныхъ нами вначалѣ проблемъ. Это вопросъ о томъ, какова природа и движеніе колеблющихся частицъ, испускающихъ свѣтъ. Повидимому, это суть движенія электроновъ, игрой которыхъ образуются катодные лучи, производящіе линіи спектровъ излученія.

Доказательствомъ того, что колеблющіяся частицы заряжены, служитъ тотъ фактъ, что онѣ подвержены вліянію магнита. Количественное же изслѣдованіе этого вліянія обнаруживаетъ также, что эти частицы должны быть тождественны съ тѣми, которыя движутся въ катодныхъ лучахъ.

Если мы введемъ въ магнитное поле газъ и заставимъ его свѣтиться, либо пропуская разрядъ сквозь пустую трубку, содержащую химически простое тѣло въ парообразномъ или газообразномъ состояніи, либо пропуская потокъ искръ между двумя металлическими электродами, то мы увидимъ, что спектральныя линіи измѣнились. Каждая линія разлагается въ рядъ другихъ линій. Въ наиболѣе простыхъ случаяхъ образуются двѣ или три составляющія линіи.

Если смотрѣть въ направленіи линій силъ, то можно наблюдать, какъ образуется двойная линія, состоящая изъ двухъ слагающихъ, расположенныхъ по обѣ стороны первоначальнаго положенія линіи. Въ направленіи же, перпендикулярномъ къ линіи силъ, мы видимъ тройную линію: три линіи, одна изъ которыхъ находится на томъ же мѣстѣ, на которомъ была первоначальная линія, а двѣ другія одинаково отъ нея удалены — одна къ красному, другая къ фіолетовому концу спектра.

Вліяніе магнитныхъ силъ на спектральныя линіи было открыто мною въ 1896 и 1897 г.г. Въ этихъ изслѣдованіяхъ руководящей нитью служила теорія Лоренца, которую я изложу, ограничиваясь самымъ простымъ случаемъ, когда вещество даетъ одну спектральную линію. По теоріи Лоренца, молекулы или атомы содержатъ заряженныя частички или электроны, которыя, будучи тѣмъ или инымъ путемъ выведены изъ состоянія равновѣсія, начинаютъ колебаться; они порождаютъ, такимъ образомъ, электромагнитныя колебанія, которыя, по Максвеллю, образуютъ тепловые и свѣтовые лучи. Расположеніе линій въ спектрѣ опредѣляется періодомъ колебанія электроновъ, такъ что каждому измѣненію въ періодѣ электрона отвѣчаетъ смѣщеніе соотвѣтствующей линіи.

Всѣ движенія электроновъ въ молекулахъ пламени или искры могутъ быть разсматриваемы, какъ составленныя изъ трехъ простыхъ движеній, выбранныхъ такимъ образомъ, что дѣйствіе магнитнаго поля на эти движенія легко понять. Свѣтъ искры или пламени получается такой же, какъ будто въ немъ три группы электроновъ, совершающихъ каждый одно изъ этихъ трехъ простыхъ колебаній. Первое простое колебаніе совершается параллельно силовымъ линіямъ. Группа электроновъ, которая производитъ это движеніе, вовсе не подвергается воздѣйствію со стороны магнитной силы: ея періодъ тотъ же, какъ и въ первоначальной линіи T.

Два другихъ простыхъ движенія суть круговыя движенія, перпендикулярныя силовымъ линіямъ и происходящія одно въ направленіи часовой стрѣлки, другое въ противоположномъ направленіи.

Электронъ, совершающій круговыя колебанія, въ магнитномъ полѣ помимо упругости, дѣйствію которой онъ постоянно подверженъ, находится подъ вліяніемъ еще другой силы, зависящей отъ движенія. Это та же сила, которая въ магнитномъ полѣ искривляетъ траекторіи катодныхъ лучей; она постоянно перпендикулярна къ плоскости, которую можно провести черезъ направленіе магнитной силы и черезъ направленія движенія. Смотря по направленію кругого движенія, магнитное поле, такимъ образомъ, усиливаетъ или ослабляетъ упругія силы и соотвѣтственно этому укорачиваетъ или удлиняетъ періодъ колебанія.

Вмѣсто одного движенія съ періодомъ T мы получаемъ теперь въ общемъ три движенія, съ періодами T, $T+v$ и $T-v$, гдѣ v есть небольшое количество. Каждому изъ этихъ движеній электроновъ отвѣчаетъ свѣтовое колебаніе.

Если разсматривать свѣтъ въ направленіи, перпендикулярномъ къ силовымъ линіямъ, то въ спектроскопѣ видно, что каждая линія расщепляется на три. Спектръ представляетъ большое количество такихъ тройниковъ. Особенно замѣчательно, что эти линіи остаются совершенно отчетливыми: онѣ не размыты, явленіе совершенно ясно выражено. Этого, несомнѣнно, не было бы, если бы всѣ молекулы не проявляли бы себя совершенно одинаково. Между тѣмъ, какъ показалъ Ломанъ (Lohmann), гелій представляетъ собой вещество, всѣ линіи котораго превращаются въ тройники.

Теорія Лоренца предусмотрѣла еще одну особенность. Обратимся снова къ свѣту, испускаемому въ направленіи, перпендикулярномъ къ магнитной силѣ. Три свѣтовыя линіи, наблюдаемыя въ этомъ направленіи, вызываются колебаніями одного и того же вида: онѣ, слѣдовательно, поляризованы прямолинейно. Линія, періодъ которой не измѣнился, производится колебаніями, параллельными магнитной силѣ. Двѣ крайнія слагающія обусловливаются колебаніями, перпендикулярными къ этой силѣ. Съ помощью никкелевой призмы мы можемъ получить по произволу либо среднюю составляющую, либо двѣ крайнія.

Этимъ опытомъ мнѣ удалось впервые получить поляризованный свѣтъ отъ молекулъ газа. Всѣ прежнія попытки потерпѣли неудачу. Между тѣмъ, эти поляризаціонныя явленія не оставляютъ желать ничего съ точки зрѣнія отчетливости. Они совершенно характерны, средняя составляющая поляризована совершенно прямолинейно, при чемъ плоскость поляризаціи расположена, скажемъ, вертикально. Крайнее колебаніе также цѣликомъ поляризовано, но въ плоскости, перпендикулярной къ первой, слѣдовательно, горизонтальной.

Разсмотримъ теперь свѣтъ, распространяющійся по направленію магнитной силы. Непосредственно ясно, что въ этихъ условіяхъ мы увидимъ только двѣ спектральныя линіи, соотвѣтствующія періодамъ колебаній $T+v$ и $T-v$. Эти двѣ линіи должны быть поляризованы круговымъ образомъ — одна направо, другая налѣво. Наблюденія подтверждаютъ это предсказаніе.

Какой зарядъ несутъ колеблющіяся частицы: положительный или отрицательный? Есть ли какое-либо средство это установить? Дѣйствіе магнитнаго поля на спектральныя линіи и здѣсь можетъ дать отвѣтъ на вопросъ. Для этого достаточно изслѣдовать, будетъ ли линія съ періодомъ $T+v$, когда магнитная сила направлена къ наблюдателю, поляризована направо или налѣво. Результатъ наблюденія доказываетъ, что частички, совершающія колебательное движеніе и производящія такимъ образомъ свѣтъ, заряжены отрицательно.

Это не означаетъ, конечно, что свѣтящіеся атомы всѣ заряжены отрицательно. Прекрасное изслѣдованіе Штарка (Stark) надъ явленіемъ Допплера (Doppler), обнаруживающимся въ каналовыхъ лучахъ, ясно показало, что въ большомъ числѣ случаевъ центрами лучеиспусканія спектральныхъ линій простыхъ тѣлъ являются атомы съ положительными зарядами. Этотъ положительный зарядъ обусловливается тѣмъ, что атомъ, первоначально нейтральный, потерялъ одинъ или нѣсколько электроновъ. Испускаемый спектръ, несомнѣнно, зависитъ отъ числа отрицательныхъ частицъ, утраченныхъ атомомъ; но, согласно послѣднимъ изслѣдованіямъ Штарка, повидимому, нельзя дать простого правила, которое устанавливало бы соотношеніе между числомъ утраченныхъ электроновъ и природой спектровъ.

Магнитное разложеніе линій на тройники позволяетъ намъ также отвѣтить на важный вопросъ, какое количество матеріи связано съ движущимся электрономъ. Величина наблюдаемаго измѣненія v въ періодѣ колебанія позволяетъ вычислить отношеніе заряда e къ массѣ m. Это замѣчательное число e/m, выраженное чрезъ электромагнитныя единицы на граммъ, есть величина порядка 10^7. Очень большое число спектральныхъ линій даетъ для этого отношенія значенія, содержащіяся между 1.4×10^7 и 1.8×10^7.

Наблюденія надъ катодными лучами дало для отношенія заряда къ массѣ несущаго его электрона значенія, весьма близкія къ тѣмъ, которыя получаются изъ магнитнаго разложенія спектральныхъ линій. Есть даже нѣкоторыя линіи, для которыхъ между этими числами царитъ полное согласіе. Не можетъ быть сомнѣнія въ томъ, что это количественное согласіе въ явленіяхъ столь различнаго характера доказываетъ, что между этими явленіями имѣется тѣсная связь. Въ высшей степени вѣроятно, что тѣ же электроны колеблются какъ въ источникахъ, испускающихъ свѣтъ и тепло, такъ и въ катодныхъ лучахъ; они раскрываютъ предъ нами, такимъ образомъ, строеніе электричества, лишенное непрерывности, въ простѣйшихъ условіяхъ.

Мы нашли, такимъ образомъ, источникъ цвѣтовъ спектра въ томъ смыслѣ, въ какомъ мы это понимаемъ въ настоящей второй главѣ.

Болѣе детальное изслѣдованіе магнитнаго разложенія, въ которомъ приняли участіе наиболѣе выдающіеся экспериментаторы всѣхъ націй, обнаружило, однако, что эти простые результаты, согласующіеся съ элементарной теоріей Лоренца, допускаютъ большое число исключеній. При помощи болѣе усовершенствованныхъ средствъ можно обнаружить болѣе сложное разложеніе. Нерѣдко оказывается больше трехъ составляющихъ, но и въ этихъ сложныхъ разложеніяхъ почти всегда обнаруживается полная симметрія по отношенію къ первоначальной линіи какъ по расположенію, такъ и по интенсивности. Я приведу здѣсь только нѣсколько примѣровъ разложеній, иногда очень сложныхъ, но всегда рѣзко выраженныхъ. Линія натрія D_1 разлагается на четыре составляющихъ, линія D_2 на шесть составляющихъ; нѣкоторыя линіи ртути разбиваются на девять равно удаленныхъ одна отъ другой составляющихъ, какъ будто каждый изъ трехъ тройниковъ вновь раздѣлился на три части. Но это еще не самое большое число составляющихъ, какое удалось наблюдать: спектръ неона содержитъ нѣкоторыя линіи, которыя даютъ 15 составляющихъ, а въ спектрѣ вольфрама имѣются линіи, которыя даютъ отъ 17 до 19 составляющихъ.

Но даже въ этихъ весьма сложныхъ разложеніяхъ имѣется весьма важный пунктъ, по отношенію къ которому остается въ силѣ согласіе съ элементарной теоріей Лоренца. Это относится къ состоянію поляризаціи составляющихъ: совершенно такъ же, какъ въ тройникѣ, всегда имѣются три группы лучей.

Прежде, чѣмъ говорить о попыткахъ разъясненій этихъ замѣчательныхъ разложеній, я желалъ бы упомянуть еще о нѣкоторыхъ результатахъ, относящихся къ соотношеніямъ между составляющими линіями одного элемента или различныхъ элементовъ.

Тщательныя работы Бальмера (Balmer), Кайзера и Рунге (Kayser, Runge), Ридберга и Шустера (Rydberg, Schuster) обнаружили существованіе такъ называемыхъ рядовъ спектральныхъ линій. Линіи одного и того же ряда располагаются замѣчательно правильнымъ образомъ, и эта правильность можетъ быть выражена простой формулой. Законы, которымъ слѣдуютъ эти ряды, проще, чѣмъ законы колебанія звучащихъ тѣлъ. Впрочемъ, они совершенно отличны отъ послѣднихъ. Въ то время, какъ здѣсь всѣ члены ряда стремятся къ нѣкоторому наибольшему числу колебаній, для звуковыхъ колебаній этотъ предѣлъ остается неопредѣленнымъ.

Престонъ (Preston) показалъ, что всѣ линіи одного и того же ряда разлагаются одинаково; фигуры разложенія оказываются не только схожими, но самое разложеніе оказывается совершенно тождественнымъ, если его выразить числомъ колебаній въ секунду, и соотвѣтствующія линіи различныхъ веществъ сохраняютъ въ этомъ отношеніи ту же правильность.

Это правило, которое обнаружилъ Престонъ, не указывая ни степени приближенія, ни числа изслѣдованныхъ случаевъ, было подвергнуто весьма точному контролю Рунге и Пашеномъ.

Можно было опасаться, что въ этихъ сложныхъ разложеніяхъ уже не сохранится простое соотношеніе, связывавшее вначалѣ разложеніе на тройники съ нормальнымъ значеніемъ дроби e/m, которое даютъ катодные лучи. И дѣйствительно, первое впечатлѣніе, которое получается при взглядѣ на фигуру, изображающую наиболѣе интересное разложеніе (какъ, напримѣръ, тѣ, которыя встрѣчаются въ прекрасномъ сочиненіи о магнито-оптическихъ явленіяхъ, недавно опубликованномъ Фойгтомъ (Foigt)), расходится съ этимъ результатомъ. Къ счастью, Рунге удалось найти правило, обнаруживающее, что сложное разложеніе также находится въ простомъ соотношеніи съ нормальнымъ значеніемъ дроби e/m. Въ виду этого правила становится поэтому весьма вѣроятнымъ, что и въ этихъ явленіяхъ доминируютъ обыкновенные электроны катодныхъ лучей.

Нельзя отрицать, что мы проникли уже далеко по пути, ведущему къ выясненію происхожденія цвѣтовъ. Необходимо, однако, проникнуть еще дальше, чтобы уяснить тайну рядовъ спектральныхъ линій и сложныхъ магнитныхъ разложеній, которыя тѣсно связаны съ первыми.

Чтобы отдать себѣ отчетъ при помощи своей теоріи въ этихъ сложныхъ разложеніяхъ, Лоренцъ изслѣдовалъ вопросъ объ испусканіи системъ электроновъ, подчиненныхъ извѣстнымъ условіямъ. Можно разобрать также разложеніе и состояніе поляризаціи въ томъ случаѣ, когда первоначальная линія очень тонка. Очень труднымъ представляется дать теорію испусканія въ томъ случаѣ, когда плотности становятся весьма большими и когда линія испусканія имѣетъ, слѣдовательно, нѣкоторую ширину. Задача о поглощеніи легче; такъ, Фойгтъ въ своей общей теоріи магнито-оптическихъ явленій не разбираетъ теоріи испусканія системы электроновъ, а даетъ теорію ихъ поглощенія. Здѣсь приходится имѣть дѣло съ тѣмъ, что называютъ обратнымъ эффектомъ, т. е. съ разложеніемъ линій поглощенія магнитнаго поля. Въ виду параллелизма, который существуетъ между явленіями поглощенія и испусканія, здѣсь можно найти также особенности, относящіяся къ испусканію. Этотъ путь естественно раскрываетъ также соотношенія въ интенсивности линій поглощенія въ магнитномъ полѣ.

Разрабатывая теоретически этотъ вопросъ, уже невозможно строго придерживаться теоріи электроновъ; приходится скорѣе считаться съ методомъ феноменологическимъ. Это приводитъ къ уравненіямъ, которыя удовлетворительно воспроизводятъ явленія, и которыя, надо надѣяться, со временемъ удастся истолковать на языкѣ электронной теоріи.

Одной изъ наибольшихъ заслугъ теоріи Фойгта, несомнѣнно, является то обстоятельство, что она устанавливаетъ простую и раціональную связь между вращательной магнитной поляризаціей, которая была уже извѣстна давно, и магнитнымъ разложеніемъ спектральныхъ линій. Эта теорія, кромѣ того, предсказала, что въ направленіи, перпендикулярномъ къ магнитной силѣ, пары металловъ, помѣщенные въ магнитномъ полѣ, проявляютъ себя совершенно такъ же, какъ двупреломляющій кристаллъ, по крайней мѣрѣ, для цвѣтовъ, близкихъ къ полосѣ поглощенія. Эти интересныя слѣдствія теоріи Фойгта, а также многія другія были подтверждены опытомъ. Но, углубляясь въ эти детали, я уже вышелъ за предѣлы этой замѣтки. Изученіе всей области магнито-оптическихъ явленій, ихъ связи съ основными вопросами оптики сдѣлалось болѣе доступнымъ и болѣе интереснымъ съ тѣхъ поръ, какъ Фойгтъ далъ въ своей книгѣ общую картину ихъ. Читатель сможетъ лично убѣдиться въ тѣхъ преимуществахъ, какія представляетъ связное и цѣльное сочиненіе, а также въ той легкости, съ которой усваивается наука въ состояніи нарожденія.

Въ этомъ именно состояніи находятся и другіе вопросы, тѣсно связанные съ предыдущими. Я не привелъ еще магнито-оптическихъ явленій, которыя представляютъ нѣкоторые поглощающіе кристаллы, какъ, напримѣръ, ксенотимъ и тизонитъ (а также нѣкоторыя соединенія эрбія и дидима); они были изслѣдованы съ рѣдкимъ успѣхомъ Ж. Беккереллемъ (J. Becquerelle) при обыкновенной температурѣ, при температурѣ жидкаго воздуха и въ лабораторіи для замораживанія Камерлинга Оннеса (Kamerlingh Onnes) даже при температурѣ твердаго водорода, т. е. при самой низкой температурѣ, какая до сихъ поръ достигнута. Я не упомянулъ также о тѣхъ трудностяхъ, какія теоріи предстоитъ еще побѣдить, чтобы скомбинировать всѣ данныя, собранныя Дю-Буа (du Bois) и Эліасомъ (Elias) въ прекрасныхъ изысканіяхъ о соединеніяхъ съ избирательнымъ поглощеніемъ ряда парамагнитныхъ элементовъ, произведенныхъ въ кріомагнитномъ аппаратѣ и въ полѣ, достигающемъ 40.000 гауссовъ.

Въ заключеніе я приведу еще первое космическое приложеніе магнитнаго разложенія спектральныхъ линій. Я имѣю въ виду прекрасное открытіе Гола (Hale) относительно магнитнаго характера солнечныхъ пятенъ, которое выяснилось вслѣдствіе особаго характера двойниковъ ихъ спектральныхъ линій.

Международная коммиссія по математическому образованію.

Въ большей части участвующихъ въ международной коммиссіи странъ делегаціи уже составлены и приступили къ работѣ, которая выражается прежде всего въ организаціи національныхъ подкоммиссій. Однако, въ нѣкоторыхъ странахъ Центральный Комитетъ встрѣтилъ при учрежденіи делегацій нѣкоторыя затрудненія. Въ другихъ странахъ произошли нѣкоторыя неожиданныя задержки. Мы приводимъ первый списокъ делегатовъ въ томъ видѣ, въ какомъ онъ имѣется къ началу марта 1909 года. Какъ извѣстно, число делегатовъ каждой страны установлено въ рубрикѣ B, 1 „предварительнаго доклада“ (см. „Вѣстникъ“, № 475—476).

Представителями Россіи являются академикъ Н. Я. Сонинъ, профессоръ Б. Я. Кояловичъ и К. В. Фохтъ.

Австрія; три делегата: E. Czuber, R. Suppantschitsch, W. Wirtinger.

Англія; три делегата: сэръ G. Greenhill и два другихъ делегата, которые будутъ указаны нѣсколько позже.

Бельгія; одинъ делегатъ (ведутся переговоры).

Венгрія; три делегата: M. Beke, G. Rados и третій делегатъ, который будетъ назначенъ позже.

Германія; три делегата: F. Klein, P. Staeckel, P. Treutlein.

Голландія; одинъ делегатъ: I. Cardinaal.

Греція; одинъ делегатъ: C. Stephanos.

Данія; одинъ делегатъ: P. Heegaard.

Италія; три делегата: G. Castelnuovo, Fr. Enriques, G. Vailati.

Испанія; одинъ делегатъ: Z. G. de Galdeano.

Норвегія; одинъ делегатъ (ведутся вереговоры).

Португалія; одинъ делегатъ: G. Teixeira.

Румынія; одинъ делегатъ (ведутся переговоры).

Сѣв.-Амер. Соединенные Штаты; три делегата: W. Osgood, Dav. Eug. Smith, J. W. A. Young.

Франція; три делегата: P. Appel, C. Bourlet, C. A. Laisant.

Швеція; одинъ делегатъ (ведутся переговоры).

Швейцарія; два или три делегата: H. Fehr, C. F. Geiser.

Математическія мелочи.

Ариѳметическіе курьезы.

1. Въ первой тысячѣ полныхъ квадратовъ имѣется десять обратимыхъ чиселъ, т. е. такихъ, которыя не мѣняются, если переставить ихъ цифры въ обратномъ порядкѣ:

$11^2 = 121$, $26^2 = 676$, $101^2 = 10201$, $111^2 = 12321$, $121^2 = 14641$, $202^2 = 40804$, $212^2 = 44944$, $264^2 = 69696$, $307^2 = 94249$, $836^2 = 698896$.

Среди нихъ имѣется также восемь группъ попарно симметричныхъ квадратовъ:

$$\left\{\begin{array}{l} 12^2 = 144, \\ 21^2 = 441; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 13^2 = 169, \\ 31^2 = 961; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 33^2 = 1089, \\ 99^2 = 9801; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 102^2 = 10404, \\ 201^2 = 40401. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 103^2 = 10609, \\ 301^2 = 90601; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 112^2 = 12544, \\ 211^2 = 44521; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 113^2 = 12769, \\ 311^2 = 96721; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 122^2 = 14884, \\ 221^2 = 48841. \end{array}\right.$$

Замѣчательно, что изъ этихъ восьми паръ квадратовъ семь происходятъ отъ симметричныхъ же паръ.

2. Нижеслѣдующіе два послѣдовательныхъ квадрата образуютъ анаграмму:

$$157^2 = 24649, \quad 158^2 = 24964.$$

3. Если мы умножимъ одно и то же число N послѣдовательно на числа 1, 11, 111, 1111, . . . , то можно наблюдать извѣстную закономѣрность въ произведеніяхъ. Напримѣръ, если $N = 1857$, то этими произведеніями будутъ:

1857, 20427, 206127, 2063127, 20633127, 206333127, 2063333127, ...

Начиная съ третьяго произведенія, первыми тремя цифрами служатъ 206, послѣдними же 127; между ними стоитъ $n - 3$ троекъ, если множитель изображается n единицами.

4. Число 76479 представляетъ собой одновременно разность двухъ квадратовъ, двухъ четвертыхъ степеней, а также квадрата и четвертой степени:

$$76479 = 320^2 - 161^2 = 1000^2 - 31^4 = 20^4 - 17^4.$$

Имѣемъ также:

$$76479 = 10^6 - 31^4, \quad 10^6 = 31^4 + 20^4 - 17^4.$$

5. Вотъ двѣ системы равенствъ въ первыхъ и вторыхъ степеняхъ:

$$\left\{\begin{array}{l} 28 + 59 + 61 = 31 + 49 + 68, \\ 28^2 + 59^2 + 62^2 = 31^2 + 49^2 + 68^2. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 17 + 59 + 68 = 28 + 37 + 79, \\ 17^2 + 59^2 + 68^2 = 28^2 + 37^2 + 79^2. \end{array}\right.$$

6. Вотъ суммы послѣдовательныхъ кубовъ, дающія полный кубъ:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3, \quad 11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3, \quad 6^3 + \ldots + 69^3 = 180^3,$$

$$34^3 + \ldots + 126^3, \quad = 540^3, \quad 213^3 + \ldots + 555^3 = 2856^3,$$

$$1134^3 + \ldots + 2133^3 = 16830^3.$$

Послѣдній примѣръ тысячи кубовъ указанъ Пальяни (Pagliani).

Barisien Mathesis).

О періодическихъ дробяхъ.

А. Филиппова.

(Окончаніе).

§ 12. Расширеніе понятія о безконечномъ умноженіи и дѣленіи.

Понятіе объ алгориѳмахъ безконечнаго умноженія и дѣленія можно расширить, вводя многозначное множимое и многозначное дѣлимое. Пусть a множимое, b множитель; пусть $\frac{a+1}{10} \leqq b$.

Безконечное умноженіе въ этомъ случаѣ производимъ такъ: пишемъ послѣднюю цифру множимаго, которое образуетъ послѣднюю цифру безконечнаго произведенія, а внизу остальные цифры множимаго такъ, чтобы цифра десятковъ находилась подъ послѣдней цифрой множимаго. Если множимое, напримѣръ, 123, то пишемъ его такъ:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 12 \end{array}$$

Затѣмъ послѣднюю цифру множимаго умножаемъ на множитель, къ произведенію прибавляемъ число, стоящее подъ этой цифрой и послѣднюю цифру суммы пишемъ рядомъ съ послѣдней цифрой множимаго. Остальныя цифры суммы пишемъ внизу и т. д. (далѣе производимъ дѣйствіе такъ, какъ при безконечномъ умноженіи однозначнаго числа).

Примѣръ 13.

Умножить 13 на 2 способомъ безконечнаго умноженія:

$$13 \overset{*}{\,} 2 = (68421052631578947\dot{3}).$$

Такимъ же образомъ можно производить безконечное дѣленіе многозначнаго числа, если дѣлимое (a) и дѣлитель (b) удовлетворяютъ условію $\frac{a+1}{10} \leqq b$. Для этого мы дѣлимъ дѣлимое на дѣлитель и пишемъ частное (въ силу принятаго условія—однозначное), а внизу остатокъ и т. д. (какъ при безконечномъ дѣленіи однозначнаго числа).

Примѣръ 14.

$$15 \underset{*}{\overset{*}{\,}} 3 = (5172413793103448275862068965).$$

§ 13. Обращеніе обыкновенной дроби въ десятичную.

Теорема 8. Если $a \leqq b$, b—число взаимно простое съ 2 и 5, то періодъ дроби $\frac{a}{b}$ есть результатъ безконечнаго дѣленія $a \,.\, a_k$ на

*) См. „Вѣстникъ“, № 467—468.

$\dfrac{b\,.\,a_k+1}{10}$ (или безконечнаго умноженія), гдѣ a_k есть послѣдняя цифра періода дроби $\dfrac{1}{b}$.

$$\frac{a}{b}=0,\left(a\,.\,a_k \overset{*}{} \frac{b\,.\,a_k+1}{10}\right) \qquad (36)$$

$$=0,\left(a\,.\,a_k \underset{*}{\overset{*}{}} \frac{b\,.\,a_k+1}{10}\right). \qquad (37)$$

Доказательство.

$$\text{Пусть } \frac{1}{b}=\frac{a_1a_2a_3\ldots a_k}{10^k-1};$$

тогда

$$\frac{a}{b}=\frac{(a_1a_2\ldots a_k)\,.\,a}{10^k-1}=\frac{\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_k}{10^k-1}.$$

Слѣдовательно,

$$\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_k=(a_1a_2\ldots a_k)\,.\,a,$$

но

$$a_1a_2a_3\ldots a_k=\frac{a_k\,a_1a_2\ldots a_{k-1}}{c},$$

гдѣ

$$c=\frac{b\,.\,a_k+1}{10}.$$

Итакъ,

$$\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_k=\frac{(a_k\,a_1a_2\ldots a_{k-1})\,.\,a}{c}. \qquad (38)$$

Отсюда слѣдуетъ, что β_1 есть первая цифра частнаго $\dfrac{a_k\,.\,a}{c}$; β_2 есть первая цифра частнаго отъ дѣленія остатка дѣленія $\dfrac{a_k\,.\,a}{c}$, сложеннаго съ первой цифрой произведенія $a_1\,.\,a$ (которая равна β_1) и т. д.

Разсуждая такимъ образомъ видимъ, что

$$\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_k=(a_k\,.\,a \underset{*}{\overset{*}{}} c).$$

Такъ же доказываемъ, что

$$(\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_k)=(a_k\,.\,a \overset{*}{} c).$$

Примѣчаніе. Очевидно, что $\dfrac{a_k\,.\,a+1}{10}\leqq c$.

Дѣйствительно,

$$a\leqq b;$$

$$\frac{a\,.\,a_k+1}{10}\leqq\frac{b\,.\,a_k+1}{10},\ c.$$

Примѣръ 15. Обратить $\frac{17}{39}$ въ десятичную дробь.

$$\alpha_k = 1;\ c = \frac{39 \cdot 1 + 1}{10} = 4;\ a \cdot \alpha_k = 17;$$

$$17 \underset{*}{*} 4 = (435897).$$

Такъ же получимъ:

$$17 * 4 = (435897),$$

$$\frac{17}{39} = 0,(435897).$$

§ 14. Условіе, достаточное для того, чтобы результатъ безконечнаго умноженія или дѣленія былъ чисто періодическимъ рядомъ.

Теорема 9. Если a и b числа натуральнаго ряды, $b \neq 0$, $\frac{a+1}{10} \leqq b$, то $a * b$ и $a \underset{*}{*} b$ суть чисто періодическіе ряды, при чемъ $a * b = a \underset{*}{*} b$.

Доказательство.

Разсмотримъ дробь $\frac{a}{10b-1}$. Такъ какъ $b \neq 0$, и $a + 1 \leqq 10b$, то

$$a \leqq 10b - 1.$$

Слѣдовательно, дробь $\frac{a}{10b-1} \leqq 1$. Для этой дроби $\alpha_k = 1$, $c = \frac{10b - 1 + 1}{10} = b$; $\alpha_k \cdot a = a$.

Слѣдовательно:

$$\frac{a}{10b-1} = 0,(a \underset{*}{*} b) = 0,(a * b). \tag{39}$$

Такимъ образомъ, разсматриваемые ряды суть періоды дроби $\frac{a}{10b-1}$.

§ 15. Упрощеніе дѣленія натуральныхъ чиселъ.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что дѣленіе натуральныхъ чиселъ, въ случаѣ, если дѣлитель число взаимно простое съ 2 и 5, можно упростить. Пусть

$$A = B \cdot Q + R;$$

здѣсь A, B, Q, R — числа натуральнаго ряда, $B \neq 0$, $R < B$. Отсюда слѣдуетъ формула:

$$\frac{A}{B} = Q + 0,\left(R\,.\,\alpha_k \underset{*}{*} \frac{B\,.\,\alpha_k + 1}{10}\right) = Q + 0,\left(R\,.\,\alpha_k * \frac{B\,.\,\alpha_k + 1}{10}\right), \tag{40}$$

гдѣ α_k послѣдняя цифра періода дроби $\frac{1}{B}$. Если дѣлитель оканчивается цифрой 9, то упрощеніе весьма значительно.

Примѣръ 16. Раздѣлить 72 301 на 49.

72301 | 49
49 | 1475, (530612244897959183673469387755102040816326)
233
196
370
343
271
245
$26 \underset{*}{*} 5 = (530612244897959183673469387755102040816326)$

Краткій отчетъ о засѣданіи Московскаго Математическаго кружка, происходившемъ 13 февраля 1909 г.

Былъ заслушанъ составленный и прочитанный секретаремъ кружка І. И. Чистяковымъ отчетъ о дѣятельности кружка за $190^7/_8$ годъ. Въ виду того, что на страницахъ „Вѣстника" помѣщались своевременно рефераты о засѣданіяхъ кружка, мы здѣсь отчета этого не помѣщаемъ.

Затѣмъ преподаватель Высшихъ Женскихъ Курсовъ И. А. Извольскій сдѣлалъ сообщеніе объ учебникѣ геометріи Бореля (E. Borel, „Géométrie", I-e et II-e cycles. Paris, 1901).

Докладъ начался съ изложенія предисловія, гдѣ авторъ указываетъ, что онъ вовсе не имѣетъ цѣлью дать стройно-логическій курсъ геометріи на новыхъ началахъ, но лишь дѣлаетъ попытку дать изложеніе обычнаго курса въ болѣе простой и болѣе наглядной формѣ. Авторъ смотритъ на свой курсъ, какъ на ступень, подготовляющую къ изученію систематическаго курса, напримѣръ по Hadamard'у.

Учебникъ раздѣленъ на 3 части: I часть — прямая и кругъ, II часть — плоскость и круглыя тѣла, III часть — подобіе фигуръ, площади, объемы. Такимъ образомъ, измѣрительная геометрія отдѣлена отъ чистой (отъ геометріи положенія). Матерьялъ I части получается помощью трехъ процессовъ: перегибаніе плоскости по прямой, переносное движеніе (mouvement de translation) и вращеніе около точки. Первый процессъ ведетъ къ полученію фигуры, симметричной данной относительно данной оси, второй является исходнымъ пунктомъ ученія о параллельности и третій развиваетъ ученіе объ углахъ и о симметріи относительно центра. Наиболѣе слабымъ мѣстомъ учебника Borel'я является второй изъ этихъ процессовъ — переносное движеніе.

Матерьялъ второй части получается помощью двухъ процессовъ — того же переноснаго движенія, распространеннаго на пространство, и вращенія около оси. Первый процессъ даетъ возможность изучать параллельность въ пространствѣ, а второй ведетъ къ изученію перпендикулярности и тѣлъ вращенія. Здѣсь очень развита статья о симметріи, но врядъ ли она окажется удобопріемлемой для учениковъ. Правильные многогранники разсматриваются только трехъ видовъ (кубъ, октаэдръ и тетраэдръ), осуществимость которыхъ объясняется изъ изученія куба, и разсматриваются только съ точки зрѣнія ихъ симметріи.

Изъ особенностей изложенія интересны: соотношенія между хордами и стягиваемыми ими дугами, нахожденіе условій равенства треугольниковъ и нахожденіе зависимостей между плоскими углами трехграннаго угла: эти вопросы трактуются не обычнымъ діалектическимъ путемъ (объявляется теорема и доказывается), а изслѣдованіемъ построенія требуемой фигуры. Еще были указаны особенности въ изложеніи вопроса объ углѣ прямой съ плоскостью и объ объемѣ пирамиды.

Несмотря на существенные недостатки курса, главнымъ изъ которыхъ является введеніе недостаточно опредѣленнаго понятія о переносномъ диженіи, курсъ интересенъ тѣмъ, что сводитъ дѣло обученія геометріи со стараго діалектическаго пути на новый, на путь построенія требуемой фигуры, изученія этого построенія и изслѣдованія возникающихъ вопросовъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

По поводу радіоактивности калія. Въ февралѣ 1906 г. Campbell и Wood нашли, что соли калія отличаются довольно замѣтной радіоактивностью по сравненію съ другими уже изслѣдованными веществами. Послѣ ряда измѣреній радіоактивности солей калія по электрическому методу, они нашли, что лучеиспусканіе каліевыхъ солей состоитъ изъ β-лучей, болѣе слабыхъ, чѣмъ β лучи UX. Всѣ попытки выдѣлить радіоактивную примѣсь не привели ни къ чему, и Campbell и Wood рѣшили, что радіоактивность калія есть его атомное свойство.

I. C. Mc. Lennan произвелъ измѣреніе радіоактивности солей калія, натрія, церія, аммонія и литія по электрическому методу. Соли калія оказались значительно радіоактивнѣе солей другихъ щелочныхъ металловъ, изъ послѣднихъ слабо активными оказались хлористый церій и аммоній. I. C. Mc. Lennan нашелъ, что радіоактивность солей калія не пропорціональна содержанію калія въ нихъ. Такъ, напримѣръ, ціанистый калій отличается наименьшей активностью, при чемъ чистота соли замѣтнаго вліянія на ея радіоактивность не оказываетъ. Поэтому Lennan предполагаетъ, что радіоактивность солей калія обусловливается примѣсью еще неизвѣстнаго намъ радіоактивнаго элемента. Lennan также пытался очистить соли калія отъ предполагаемой примѣси, но ни различные методы очищенія ни примѣненіе солей калія изъ разныхъ источниковъ добыванія ихъ не дали никакихъ результатовъ

При испытаніи радіоактивности каліевыхъ солей по фотографическому методу Lennan получилъ отчетливые снимки (почерненіе пластинокъ) послѣ 190-дневной экспозиціи, при чемъ соли калія дѣйствовали черезъ черную бумагу на фотографическую пластинку. На основаніи своихъ снимковъ Lennan заключаетъ, что радіоактивность каліевыхъ солей въ 1000 разъ меньше радіоактивности урановыхъ.

Сода при фотографическомъ испытаніи не дала никакихъ результатовъ. Въ минералогическомъ кабинетѣ Имп. Нов. Унив студ. Е.-С. Буркс еромъ (работа производилась подъ руководствомъ завѣдующаго кабинетомъ профессора М. Д. Сидоренко) были получены довольно отчетливые снимки посредствомъ химически чистаго бромистаго калія и минерала сильвина (Страсфуртскаго, уд. вѣсъ 1,91). Бромистый калій въ 2 gr. и кусочекъ сильвина въ 7 gr. дѣйствовали на фотографическую пластинку непосредственно, при чемъ послѣдній имѣлъ съ ней мало точекъ соприкосновенія. Опытъ велся въ темномъ помѣщеніи и въ непроницаемой для свѣта камерѣ въ теченіе 120 дней. Другой кусокъ сильвина въ 13 gr. дѣйствовалъ на фотографическую пластинку черезъ черную бумагу. Получилось и въ этомъ случаѣ замѣтное почерненіе". Сода въ тѣхъ же условіяхъ не дала никакихъ результатовъ. Интенсивность снимковъ равна приблизительно интенсивности снимковъ посредствомъ окиси урана при однодневной экспозиціи, при чемъ снимокъ посредствомъ сильвина замѣтно чернѣе.

Безпроволочное телеграфированіе въ дѣлѣ предсказанія погоды. Знаніе распредѣленія давленія воздуха въ каждый моментъ и связаннаго съ этимъ перемѣщенія областей высокаго и низкаго давленія играетъ весьма важную роль въ практической метеорологіи — въ дѣлѣ предсказанія погоды. Вслѣдствіе этого является насущная необходимость распространить синоптическія наблюденія на восточныя части Атлантическаго океана и имѣть возможность наносить ихъ ежедневно на карту. Это можетъ быть осуществлено только путемъ непосредственной передачи метеорологическихъ наблюденій съ океановъ при помощи безпроволочнаго телеграфа. Еще въ 1907 году были сдѣланы такого рода опыты во время научной экскурсіи въ Сѣверо-Американскіе Соединенные Штаты на пароходѣ „Императрица Августа Викторія", съ борта котораго посылались безпроволочныя телеграммы съ указаніями погоды. Эти же опыты были повторены въ августѣ 1908 года на томъ же пароходѣ въ болѣе широкомъ масштабѣ во время его переѣзда въ Америку и обратно (7—27 августа). Не только посылались телеграммы о погодѣ съ одного судна на другое, но безпроволочнымъ аппаратомъ парохода „Императрица Августа Викторія" были приняты метеорологическія телеграммы изъ Европы черезъ посредство Маркoніевой станціи „Клифденъ" (Clifden), а изъ Америки—черезъ станцію „Капъ Кодъ" (Cape Code). Ко всѣмъ пароходамъ, которые „Императрица Августа Викторія" встрѣчала во время переѣзда, администрація обращалась съ просьбой сообщить метеорологическія наблюденія, сдѣланныя въ продолженіе ближайшихъ 24 часовъ. Въ такого рода телеграммахъ указывалось положеніе судна, время наблюденія, состояніе барометра, температура воздуха и воды, а также направленіе и сила вѣтра. Прибывающій матеріалъ объединялся въ синоптической картѣ, которую можно было, такимъ образомъ, ежедневно чертить во время всего переѣзда. Такимъ образомъ, напримѣръ, карта 11 марта обнаруживаетъ область высокаго давленія, которое простирается отъ Азорскихъ островов къ Франціи, другую область низкаго давленія вблизи Исландіи, а также еще одну область низкаго давленія въ окрестностяхъ Ньюфаундлендскихъ островов. Послѣдняя распространялась на востокъ и пересѣкла курсъ корабля въ слѣдующую ночь, гдѣ выпало много дождя при свѣжемъ юго-западномъ вѣтрѣ. Карту отъ 22 августа удалось нанести на разстояніи 800 морскихъ миль черезъ океанъ. Она охватываетъ благодаря свѣдѣніямъ, полученнымъ съ американскихъ станцій, полосу отъ 80° до 30° западной долготы (отъ Берлина).

Такимъ образомъ, въ первый разъ удалось съ борта корабля во время продолжительнаго путешествія слѣдить за ходомъ погоды, располагая непосредственными наблюденіями, полученными съ другихъ судовъ изъ континентальныхъ станцій. Съ своей стороны, при всемъ переѣздѣ туда и обратно пока „Императрица Августа" находилась въ соединеніи со станціями безпроволочной телеграфіи, наблюдатель, находившійся на пароходѣ, посылалъ телеграммы въ Аахенскую обсерваторію. Передача такого рода телеграммъ черезъ Маркoніеву станцію „Крукгавнъ" (Crookhaven) продолжалась около трехъ часовъ; съ судна же въ Аахенъ, въ благопріятномъ случаѣ, $1^3/_4$ часа.

Если наблюденія, получаемыя на суднѣ, даютъ возможность при переѣздѣ слѣдить за ходомъ погоды на океанѣ, то передача наблюденій съ кораблей въ метеорологическіе институты Европы будетъ имѣть большое значеніе для практической метеорологіи. Области высокаго и низкаго давленія, которыя обусловливаютъ собой измѣненія погоды, приходятъ большею частью съ Атлантическаго океана. Расширеніе сѣти, съ которой получаются метеорологическія телеграммы при помощи безпроволочнаго телеграфированія съ судовъ, дастъ возможность распространить далеко на западъ, въ глубь океана, синоптическія наблюденія, благодаря чему мы будемъ гораздо ранѣе получать свѣдѣнія о циклонахъ и антициклонахъ, что отразится весьма благопріятно на предсказаніяхъ погоды. Это тѣмъ легче выполнить, что мы уже и въ настоящее время располагаемъ наблюденіями со станцій Азорскихъ островов и Исландіи, а различныя пароходныя линіи проходятъ то сѣвернѣе, то южнѣе. Пароходы съ безпроволочными аппаратами ходятъ какъ съ Средизимнаго моря въ С. А. Штаты, такъ и чрезъ Ирландское море сѣвернѣе, въ Канаду. Не можетъ подлежать сомнѣнію, что правильная постановка этихъ наблюденій окажетъ огромныя услуги практической метеорологіи. Дѣло стало только за систематической организацией этого дѣла, которое, однако, при извѣстной энергіи и иниціативѣ врядъ ли встрѣтитъ затрудненія. Объ этомъ ведутся уже переговоры между различными метеорологическими институтами Европы.

ЗАДАЧИ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 150 (5 сер.). Изъ точки O, взятой въ плоскости треугольника ABC, проведены прямыя OA, OB и OC и приняты за силы дѣйствующія по направленію къ вершинамъ треугольника. Показать, что ихъ равнодѣйствующая проходитъ черезъ центръ тяжести треугольника ABC и равна по величинѣ утроенному разстоянію точки O отъ центра тяжести.

В. Шлыгинъ (Москва).

№ 151 (5 сер.). Построить треугольникъ ABC по углу A, периметру его $2p$ и по радіусу r_a круга внѣписаннаго относительно стороны BC.

Б. Двойринъ (Одесса).

№ 152 (5 сер.). Найти необходимыя и достаточныя условія дѣлимости многочлена

$$a^n + b^n + c^n - (a + b + c)^n,$$

гдѣ n — цѣлое положительное число, на многочленъ

$$(a + b)(b + c)(c + a).$$

В. Рябовъ (Павловскъ).

№ 153 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sin 2x + \cos 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0.$$

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 154 (5 сер.). Найти ариѳметическую прогрессію, сумма m первыхъ членовъ которой относится къ суммѣ n ея первыхъ членовъ, какъ $m(m+1)$ къ $n(n+1)$, при всякихъ цѣлыхъ и положительныхъ значеніяхъ m и n.

Н. Рейпольскій.

№ 155 (5 сер.). При какихъ цѣлыхъ и положительныхъ значеніяхъ x число

$$2^x - x^2$$

кратно 7?

Н. С. (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 89 (5 сер.). *Доказать, что при всякомъ цѣломъ значеніи* n *числовая величина выраженія*

$$n(n^4 - 125n^2 + 4)$$

кратна 120.

Записавъ данное выраженіе въ видѣ:

$$n(n^4 - 125n^2 + 4) = n(n^4 - 5n^2 + 4) - 120n^3 = n(n^2 - 1)\ (n^2 - 4) - 120n^3 =$$
$$= (n-2)\ (n-1)\ n(n+1)\ (n+2) - 120n^3$$

и замѣчая, что при n цѣломъ $120n^3$ кратно 120 и произведеніе пяти послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ $(n-2)\ (n-1)\ n(n+1)\ (n+2)$ кратно произведенія $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 120$, заключаемъ, что $n(n^4 - 125n^2 + 4)$ кратно 120 при всякомъ цѣломъ значеніи n.

С. Кудинъ (Москва); *Б. Щиголевъ* (Варшава).

№ 92 (5 сер.). *Обозначая черезъ* l_a, l_b, l_c *длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра вписаннаго круга треугольника* ABC *соотвѣтственно на медіаны* m_a, m_b, m_c, *а черезъ* λ_a, λ_b, λ_c — *длины перпендикуляровъ, опущенныхъ соотвѣтственно на медіаны изъ центровъ круговъ, внѣвписанныхъ относительно сторонъ треугольника* $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, *доказать что*

$$\frac{l_a}{\lambda_a}\,\frac{l_b}{\lambda_b}\,\frac{l_c}{\lambda_c} = \frac{r^2}{p^2},$$

гдѣ r *и* p *суть соотвѣтственно радіусъ круга вписаннаго и полупериметръ треугольника* ABC.

Пусть O и O' суть соотвѣтственно центры круговъ вписаннаго и внѣвписаннаго относительно стороны a, $OM = l_a$ и $O'N = \lambda_a$ — перпендикуляры, опущенные на медіану $OM_1 = r$ и $O'N_1 = r_a$ (гдѣ r_a — радіусъ круга, внѣвписаннаго относительно стороны a) — перпендикуляры, опущенные на сторону AB (или AC).

Тогда:

$$\frac{l_a}{\lambda_a} = \frac{OM}{O'N} = \frac{AO}{AO'} = \frac{OM_1}{O'N_1} = \frac{r}{r_a}.$$

Подобнымъ же образомъ находимъ;

$$\frac{l_b}{\lambda_b} = \frac{r}{r_b},\quad \frac{l_c}{\lambda_c} = \frac{r}{r_b},$$

гдѣ r_b и r_c суть радіусы круговъ, внѣвписанныхъ относительно сторонъ b и c. Слѣдовательно,

$$\frac{l_a\, l_b\, l_c}{\lambda_a\, \lambda_b\, \lambda_c} = \frac{r^3}{r_a\, r_b\, r_c},$$

или, на основаніи формулъ

$$r_a = \frac{s}{p-a},\quad r_b = \frac{s}{p-b},\quad r_c = \frac{s}{p-c},$$

гдѣ s — площадь треугольника,

$$\frac{l_a\, l_b\, l_c}{\lambda_a\, \lambda_b\, \lambda_c} = \frac{r^3(p-a)(p-b)(p-c)}{s^3} = \frac{r^2 . rp . p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2 . s . s^2} = \frac{r^2}{p^2}.$$

Замѣчаніе. Изъ приведеннаго метода рѣшенія задачи ясно, что медіаны могутъ быть замѣнены въ условіи задачи любыми прямыми, проходящими соотвѣтственно черезъ вершины A, B, C.

С. Кудинъ (Москва); *А. Абиндеръ* (Тамбовъ).

№ 94 (5 сер.). *Найти условіе, которому должны удовлетворять стороны* a, b, c *нѣкотораго треугольника для того, чтобы радіусы круговъ внѣвписанныхъ образовали геометрическую прогрессію.*

Называя черезъ s, p, r_a, r_b, r_c соотвѣтственно площадь, полупериметръ и радіусы круговъ внѣвписанныхъ, имѣемъ:

$$r_a = \frac{s}{p-a},\quad r_b = \frac{s}{p-b},\quad r_c = \frac{s}{p-c}. \qquad (1)$$

Пусть r_a есть средній членъ геометрической прогрессіи

$$r_b,\ r_a,\ r_c;$$

тогда

$$r_a^2 = r_b\, r_c;$$

или [см. (1)]

$$\frac{s^2}{(p-a)^2} = \frac{s^2}{(p-b)(p-c)},$$

что равносильно условію

$$(p-a)^2 = (p-b)(p-c) = p^2 - p(b+c) + bc,$$

или

$$p^2 - 2pa + a^2 = p^2 - p(b+c) + bc.$$

Преобразовывая послѣднее равенство къ простѣйшему виду, получимъ:

$$p(b+c-2a) + a^2 - bc = 0,\quad (a+b+c)(b+c-2a) + 2a^2 - 2bc = 0,$$

$$(b+c)^2 - a(b+c) - 2a^2 + 2a^2 - 2bc = 0,\quad b^2 + c^2 - a(b+c) = 0,$$

или

$$a = \frac{b^2 + c^2}{b+c}. \qquad (2)$$

Слѣдуетъ замѣтить, что при всякихъ положительныхъ значеніяхъ b и c формула (2) даетъ для a такое значеніе, что a, b, c могутъ образовать треугольникъ; это вытекаетъ изъ неравенствъ

$$b - c < \frac{b^2 + c^2}{b+c} < b + c.$$

С. Кудинъ (Москва); *Б. Щиголевъ* (Варшава).

№ 95 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x(x+2)(x+4)(x+6)=105.$$

(Заимств. изъ *Časopis*).

Представивъ уравненіе въ видѣ

$$[x(x+6)][(x+2)(x+4)]-105=0,$$

или

$$(x^2+6x)(x^2+6x+8)-105=0, \tag{1}$$

полагаемъ

$$x^2+6x=y. \tag{2}$$

Тогда уравненіе (1) принимаетъ видъ:

$$y(y+8)-105=0,$$

$$y^2+8y-105=0,$$

откуда

$$y=-4\pm\sqrt{121}=-4\pm 11,$$

т. е.

$$y_1=7,\ y_2=-15.$$

Поэтому имѣемъ [см. (2)]

$$x^2+6x=7 \quad \text{или} \quad x^2+6x=-15,$$

откуда

$$x_1=1,\quad x_2=-7,\quad x_3=-3+i\sqrt{6},\quad x_4=-3-i\sqrt{6},$$

$$\text{гдѣ } i=\sqrt{-1}.$$

Можно было бы также найти корни 1 и -7 непосредственно путемъ подстановки, а затѣмъ, раздѣливъ лѣвую часть уравненія $x(x+2)(x+4)(x+6)-105=0$ на $(x-1)(x+7)$, получить квадратное уравненіе, изъ котораго опредѣляются остальные корни.

С. Кудинъ (Москва); *Л. Можаровскій*; *Л. Шиллингъ* (Ревель); *Ф. Рапопортъ* (Одесса); *П. Барановскій* (Фу-дзя-дзянъ, Манчжурія); *І. О—янцъ* (Владикавказъ); *Б. Щиголевъ* (Варшава); *А. Русецкій* (Новозыбково).

№ 96 (5 сер.). *Цѣлый относительно* x *полиномъ даетъ при дѣленіи на* $x-1$ *и* $x-2$ *соотвѣтственно остатки* 3 *и* 4. *Какой остатокъ получится отъ дѣленія этого полинома на произведеніе* $(x-1)(x-2)$?

(Заимств. изъ *L'Éducation mathématique*).

Обозначимъ полиномъ, дающій при дѣленіи на $x-1$ и $x-2$ соотвѣтственно остатки 3 и 4, черезъ $F(x)$, а частное отъ дѣленія $F(x)$ на $(x-1)(x-2)$ черезъ $f(x)$; остатокъ отъ дѣленія $F(x)$ на трехчленъ второй степени $(x-1)(x-2)$ имѣетъ вообще видъ $\alpha x+\beta$, гдѣ α и β суть постоянные коэффиціенты. Такимъ образомъ,

$$F(x)=(x-1)(x-2)f(x)+\alpha x+\beta.$$

Полагая въ этомъ равенствѣ послѣдовательно $x=1$ и $x=2$ и примѣняя теорему Безу, находимъ, согласно съ условіемъ:

$$\left.\begin{aligned}F(1)&=0\,.\,(1-2)f(1)+\alpha+\beta=\alpha+\beta=3,\\ F(2)&=(2-1)\,0\,.\,f(2)+2\alpha+\beta=2\alpha+\beta=4.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Рѣшая эту систему уравненій относительно α и β, получимъ:

$$\alpha=1,\quad \beta=2,$$

откуда слѣдуетъ, что искомый остатокъ есть

$$\alpha x+\beta=x+2.$$

С. Кудинъ (Москва).

№ 98 (5 сер.). *Изъ вершины* A *треугольника* ABC *опущены перпендикуляры* AM *и* AN *на внѣшнія биссектрисы угловъ* B *и* C. *Доказать, что длина отрѣзка* MN *равна полупериметру треугольника* ABC.

Такъ какъ внѣшнія биссектрисы BM и CN не перпендикулярны къ BC, то прямая BC пересѣкаетъ продолженія AM и AN соотвѣтственно въ точкахъ P и Q. Изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ ABM и PMB (по общему катету MB и по равенству прилежащихъ острыхъ угловъ) выводимъ:

$$AB = PB, \tag{1}$$

$$AM = MP, \tag{2}$$

и точно такъ же находимъ:

$$AC = CQ, \tag{3}$$

$$AN = NQ. \tag{4}$$

Изъ равенствъ (1) и (3) имѣемъ:

$$PQ = PB + BC + CQ = AB + BC + AC,$$

а изъ равенствъ (2) и (4) слѣдуетъ, что

$$MN = \frac{PQ}{2},$$

а потому

$$MN = \frac{AB + BC + AC}{2}.$$

А. Абиндеръ (Тамбовъ); *В. Рябовъ* (Павловскъ); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

хъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Книги для современной школы. *Основные вопросы физики въ элементарномъ изложеніи.* Сборникъ статей, составленныхъ кружкомъ преподавателей средней и высшей школы. Книга вторая. *Электричество.* Съ 167 рисунками, 4 портретами и однимъ радіографическимъ снимкомъ. Изданіе т-ва И. Д. Сытина. Москва. 1909. Цѣна 1 р. 75 к. Стр. 476.

В. А. Александровъ, инженеръ, лаборантъ электротехники и преподаватель Комиссаровскаго Техническаго училища и 1-хъ Московскихъ Электротехническихъ курсовъ. *Практическія работы по электротехникѣ.* Доступное руководство по прикладной электротехникѣ для учащихся (при занятіяхъ въ лабораторіяхъ), электротехниковъ, монтеровъ, руководителей работъ и пріемщиковъ. Цѣна 2 р. 25 коп. Стр. 803.

Б. К. Млодзѣевскій. *Основы аналитической геометріи на плоскости.* Лекціи, читанныя въ Императорскомъ Московскомъ университетѣ. Москва. 1908.

В. Фармаковскій и **А. Скомороховъ**, инженеры. Вѣкъ пара и электричества. Выпускъ 1. *I. Паровые котлы. II. Паровыя турбины.* Популярные очерки для техниковъ и самообразованія. Съ 224 иллюстр. въ текстѣ. Изданіе В. А. Фармаковской. СПБ. 1908.

И. Даниловъ. Преподаватель реальнаго училища. *Сборникъ ариѳметическихъ задачъ* для среднихъ учебныхъ заведеній, мужскихъ и женскихъ. Москва. 1908. Цѣна 80 коп. Стр. 340.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
пщется

Обложка
ищется