Обложка
ищется

Обложка
ищется

XL Сем. № 7—8.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 475—476.

Будущее математики.

Г. Пуанкарэ.

Рѣчь, произнесенная на IV международномъ конгрессѣ математиковъ.

(*Продолженіе* *).

Для полученія дѣйствительно цѣннаго результата недостаточно нагромоздить кучу выкладокъ или имѣть машину для приведенія всего въ порядокъ; имѣетъ значеніе не порядокъ вообще, а порядокъ неожиданный. Машина можетъ, сколько угодно, кромсать сырой фактическій матеріалъ, но то, что мы назвали душой факта, всегда будетъ ускользать отъ нея.

Начиная со средины истекшаго столѣтія, математики все больше и больше стремятся къ достиженію абсолютной строгости, и въ этомъ они вполнѣ правы. Это стремленіе выступаетъ все ярче и ярче. Въ математикѣ строгость еще не составляетъ всего, но гдѣ ея нѣтъ, тамъ нѣтъ ничего; доказательство нестрогое, это — ничто! Думаю, что съ этимъ никто спорить не станетъ. Но, если толковать эту истину слишкомъ буквально, то окажется, что, напримѣръ, до 1820 г. не было вовсе математиковъ, — результатъ, несомнѣнно, слишкомъ рискованный; математики того времени охотно подразумѣвали то, что мы излагаемъ въ пространныхъ разсужденіяхъ. Это не значитъ, что они не замѣчали

*) См. № 474 „Вѣстника“.

вовсе этой стороны вопроса, но они проходили мимо нея слишкомъ поспѣшно; чтобы въ этомъ не было сомнѣнія, имъ слѣдовало бы самимъ это оговорить.

Но есть ли необходимость каждый разъ подробно останавливаться на этой точности? Тѣ, которые первые выдвинули требованіе строгой точности на первый планъ, дали намъ образцы разсужденій, которымъ мы можемъ стараться подражать; но если будущія доказательства нужно будетъ всегда строить по этимъ образцамъ, то математическіе трактаты станутъ черезчуръ ужъ длинными; если я боюсь слишкомъ длинныхъ разсужденій, то не изъ одного только страха передъ переполненіемъ библіотекъ, а, главнымъ образомъ, потому, что наши доказательства, все болѣе удлиняясь, потеряютъ ту внѣшнюю видимую гармонію, о полезной роли которой я только-что говорилъ.

Надо имѣть въ виду экономію мысли; недостаточно только дать образцы для подражанія. Надобно, чтобы послѣ насъ смогли обойтись безъ этихъ образцовъ, и вмѣсто повторенія однажды построеннаго разсужденія могли бы резюмировать его въ нѣсколькихъ строкахъ. Въ этомъ отношеніи уже сдѣланы кое-какіе успѣхи. Былъ, напримѣръ, нѣкоторый типъ сходныхъ между собой разсужденій; они встрѣчались повсюду; они были абсолютно строги, но страдали растянутостью. И вотъ, въ одинъ прекрасный день придуманъ былъ новый терминъ „равномѣрная сходимость"; и уже одно это выраженіе сдѣлало всѣ прежнія разсужденія безполезными; не было больше необходимости повторять ихъ, такъ какъ они подразумѣвались подъ этимъ терминомъ. Творцы такихъ рѣшительныхъ и быстрыхъ пріемовъ преодолѣнія трудностей могутъ оказать намъ двоякую услугу: во-первыхъ, мы научаемся поступать въ случаѣ надобности подобно имъ, а во-вторыхъ — и это наиболѣе важно — ихъ примѣръ и результаты позволяютъ намъ, и очень часто, не продѣлывать того, что пришлось дѣлать имъ, ничѣмъ, однако, не жертвуя по отношенію къ строгости.

Только-что мы видѣли примѣръ того значенія, какое въ математикѣ имѣютъ слова и выраженія; я могъ бы привести еще много другихъ примѣровъ. Трудно повѣрить, какую огромную экономію мысли — какъ выражается Махъ — можетъ осуществить одно хорошо подобранное слово. Я, кажется, уже высказалъ какъ-то ту мысль, что математика есть искусство давать одно и то же названіе различнымъ вещамъ. Объяснимся подробнѣе. Надо, чтобы эти вещи, различныя по своему содержанію, были сходны по формѣ, надо, чтобы онѣ, такъ сказать, могли войти въ одну и ту-же форму для отливки. Когда названія хорошо подобраны, то вдругъ съ удивленіемъ замѣчаешь, что всѣ доказательства, проведенныя для одного какого-нибудь предмета, непосредственно могутъ быть приложены ко множеству новыхъ предметовъ, при чемъ не приходится даже ничего въ нихъ измѣнять, даже отдѣльныхъ словъ, ибо названія остались тѣ же.

Одинъ такой примѣръ прежде всего приходитъ въ голову, а именно, примѣръ кватерніоновъ; впрочемъ, я не буду на немъ останавливаться. Очень часто бываетъ достаточно одного удачно подобраннаго слова, чтобы устранить тѣ исключенія, которыя содержались въ правилахъ, выраженныхъ на старомъ языкѣ. Съ этой именно цѣлью придуманы были отрицательныя и мнимыя количества, точки въ безконечности и т. д. А вѣдь исключенія вредны, ибо они затемняютъ законы.

Итакъ, однимъ изъ характерныхъ признаковъ, отличающихъ факты большой продуктивности, является ихъ свойство допускать эти счастливыя нововведенія въ языкѣ. Самъ по себѣ голый фактъ часто бываетъ лишенъ особеннаго значенія; его можно не разъ отмѣчать, не оказывая этимъ наукѣ сколько-нибудь крупной услуги; свое значеніе онъ пріобрѣтаетъ лишь съ того дня, когда болѣе проницательный мыслитель подмѣтитъ сходство, которое онъ извлекаетъ на свѣтъ и символически обозначаетъ тѣмъ или другимъ терминомъ.

У физиковъ мы встрѣчаемся съ совершенно такимъ же пріемомъ. Они, напримѣръ, придумали слово энергія, и это слово оказалось удивительно плодотворнымъ. Изгнавъ исключенія, оно тоже создало законъ; оно дало также одно названіе вещамъ, различнымъ по содержанію, но сходнымъ по формѣ.

Изъ словъ, имѣвшихъ наиболѣе счастливое вліяніе, я отмѣчу названія „группа" и „инваріантъ". Эти слова позволили намъ проникнуть въ сущность многихъ математическихъ разсужденій. Они намъ показали, какъ часто древніе математики разсматривали группы, сами того не замѣчая, какъ они, считая себя отдѣленными другъ отъ друга цѣлой пропастью, вдругъ сходились вмѣстѣ, не понимая, какъ это могло случиться. Теперь мы сказали бы, что они разсматривали такъ называемыя „изоморфныя группы". Мы теперь знаемъ, что въ группѣ насъ мало интересуетъ содержаніе, матеріялъ, что одна только форма имѣетъ значеніе, и что, когда одна группа хорошо изучена, то тѣмъ самымъ, становятся извѣстными всѣ группы, съ нею изоморфныя. Благодаря этимъ словамъ—группа, изоморфизмъ,—резюмирующимъ въ нѣсколькихъ слогахъ этотъ трудно уловимый законъ и дѣлающимъ его сразу для всѣхъ знакомымъ, переходъ отъ одной группы къ другой, съ нею изоморфной, оказывается непосредственнымъ и совершается съ большой экономіей работы мысли. Съ другой стороны, идея группы тѣсно примыкаетъ къ идеѣ преобразованія. Почему же приписываютъ такое громадное значеніе открытію новаго преобразованія? Да потому, что изъ одной какой-нибудь теоремы это преобразованіе позволяетъ вывести десятки другихъ теоремъ; оно имѣетъ такое же значеніе, какъ нуль, приставленный справа къ цѣлому числу.

Вотъ чѣмъ до сихъ поръ обусловливалось направленіе, въ которомъ развивалась математика; этимъ же оно, несомнѣнно, будетъ опредѣляться и въ будущемъ. Но равнымъ образомъ имѣетъ значеніе и природа тѣхъ проблемъ, которыя требуютъ своего разрѣшенія. Мы не должны забывать, что должно быть нашей цѣлью; мнѣ она представляется двоякой. Вѣдь наша наука одновременно граничитъ и съ физикой и съ философіей; для этихъ двухъ нашихъ сосѣдокъ мы и работаемъ. Соотвѣтственно этому, мы всегда видѣли и будемъ видѣть, что математики движутся въ двухъ прямо-противоположныхъ направленіяхъ.

Съ одной стороны, математикѣ приходится размышлять о себѣ самой, а это полезно, такъ какъ, размышляя о себѣ, она тѣмъ самымъ размышляетъ о человѣческомъ умѣ, создавшемъ ее, тѣмъ болѣе, что среди всѣхъ своихъ твореній онъ создалъ математику съ наименьшими заимствованіями извнѣ. Вотъ чѣмъ полезны нѣкоторыя математическія изслѣдованія, каковы, напримѣръ, изслѣдованія о постулатахъ, о воображаемыхъ геометріяхъ, о функціяхъ со страннымъ ходомъ. Чѣмъ болѣе эти размышленія уклоняются отъ наиболѣе общепринятыхъ представленій, а, слѣдовательно, и отъ природы и прикладныхъ вопросовъ, тѣмъ яснѣе они показываютъ намъ, на что способенъ человѣческій умъ, когда онъ постепенно освобождается отъ тираніи внѣшняго міра, тѣмъ лучше мы его познаемъ въ его внутренней сущности.

Но все же главныя силы нашей арміи приходится направлять въ сторону противоположную, въ сторону изученія природы.

Здѣсь мы встрѣчаемся съ физикомъ или инженеромъ, которые говорятъ намъ: „Будьте любезны проинтегрировать такое-то дифференціальное уравненіе; черезъ недѣлю мнѣ понадобится рѣшеніе въ виду такого-то сооруженія, которое должно быть закончено къ такому-то сроку“. — „Но это уравненіе, отвѣчаемъ мы, не входитъ ни въ одинъ типъ интегрируемыхъ уравненій; послѣднихъ, какъ вамъ извѣстно, весьма немного“. — „Да, это мнѣ извѣстно, но какой тогда въ васъ толкъ?“ Въ большинствѣ случаевъ бываетъ достаточно понять другъ друга; въ самомъ дѣлѣ, инженеръ не имѣетъ нужды въ интегралѣ конечной формы; ему надо лишь знать общій ходъ интегральной функціи, или попросту ему нужно опредѣленное числовое значеніе, которое безъ труда можно было бы найти, если бы интегралъ уравненія былъ извѣстенъ. Обыкновенно, хотя послѣдній и неизвѣстенъ, но возможно вычислить, и не зная его, требуемое числовое значеніе, если только точно извѣстно, какое именно значеніе нужно инженеру и съ какой степенью точности.

Въ былое время уравненіе считалось рѣшеннымъ лишь въ томъ случаѣ, если рѣшеніе выражалось съ помощью конечнаго числа извѣстныхъ функцій; но это едва ли возможно даже въ одномъ случаѣ на сто. Однако, мы всегда можемъ или, вѣрнѣе, должны стремиться разрѣшить проблему, такъ сказать, качественно, т. е. должны стараться узнать общій видъ кривой, изображающей неизвѣстную функцію.

Затѣмъ остается найти количественное рѣшеніе задачи; если неизвѣстнаго нельзя опредѣлить съ помощью конечнаго вычисленія, то его всегда можно представить при помощи безконечнаго сходящагося ряда, который и позволитъ его вычислить. Но можно ли это считать настоящимъ рѣшеніемъ? Разсказываютъ, что Ньютонъ сообщилъ Лейбницу приблизительно такую анаграмму: *aaaaabbeeeeii* и т. д. Лейбницъ, разумѣется, ничего въ ней не понялъ. Но намъ теперь извѣстенъ ключъ, и мы знаемъ, что эта анаграмма въ переводѣ на современный языкъ гласитъ: „я умѣю интегрировать всѣ дифференціальныя уравненія“. Казалось бы, что либо Ньютону сильно повезло, либо онъ создалъ странный самообманъ. Но въ дѣйствительности онъ попросту хотѣлъ сказать, что онъ умѣетъ образовать (по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ) степенный рядъ, формально удовлетворяющій предложенному уравненію.

Но насъ подобное рѣшеніе не удовлетворило бы, и вотъ почему: во-первыхъ, такой рядъ сходится очень медленно; во-вторыхъ, члены его слѣдуютъ другъ за другомъ безъ всякаго закона. Напротивъ, рядъ Θ, напримѣръ, не оставляетъ желать ничего лучшаго какъ потому, что онъ сходится очень быстро (это важно для практика, желающаго получить нужное ему число какъ можно скорѣе), такъ и потому, что мы можемъ подмѣтить съ перваго взгляда законъ образованія членовъ этого ряда (это служитъ для удовлетворенія эстетическихъ потребностей теоретика).

Но въ такомъ случаѣ нѣтъ болѣе проблемъ рѣшенныхъ и проблемъ нерѣшенныхъ; есть только проблемы болѣе или менѣе рѣшенныя, смотря по быстротѣ сходимости рѣшающихъ ихъ рядовъ или по большой или меньшей гармоничности закона, управляющаго образованіемъ членовъ этихъ рядовъ. Иногда случается, что одно несовершенное рѣшеніе приводитъ насъ къ другому, болѣе совершенному. Иногда же рядъ сходится такъ медленно, что вычисленіе практически невыполнимо, и, такимъ образомъ, удается лишь доказать возможность проблемы.

Но инженеръ считаетъ такой отвѣтъ насмѣшкой надъ собой, и онъ правъ, ибо дѣйствительно такой отвѣтъ ему нисколько не поможетъ окончить сооруженіе къ назначенному сроку. Инженеру мало дѣла до того, окажетъ ли это рѣшеніе услугу инженерамъ XXII столѣтія; но мы, математики, держимся другого мнѣнія; часто мы бываемъ болѣе счастливы, если намъ удалось сберечь одинъ день труда нашихъ внуковъ, чѣмъ когда мы сберегаемъ одинъ часъ для нашихъ современниковъ.

Иногда ощупью,—такъ сказать эмпирически,—мы приходимъ къ достаточно быстро сходящейся формулѣ. „Чего же вамъ больше?“ —говоритъ инженеръ; но мы, вопреки всему, не чувствуемъ удовлетворенія; мы бы хотѣли предвидѣть эту сходимость. Почему? Да потому, что, если бы мы сумѣли предвидѣть ее однажды, мы сумѣли бы сдѣлать это и въ другой разъ. На этотъ разъ мы удачно справились съ вопросомъ; но это для насъ не имѣетъ большого значенія, если мы не надѣемся серьезно на повтореніе удачи и въ другой разъ.

По мѣрѣ развитія науки становится все болѣе труднымъ охватить ее всю; тогда ее стараются разбить на части и удовольствоваться одной такой частью, словомъ, спеціализироваться. Но если бы такъ продолжалось всегда, то это было бы значительнымъ препятствіемъ для прогресса науки. Какъ мы говорили уже, этотъ прогрессъ осуществляется именно благодаря неожиданнымъ сближеніямъ между различными частями науки. А между тѣмъ слишкомъ отдаться спеціализаціи—значитъ закрыть себѣ дорогу къ этимъ сближеніямъ. Будемъ же надѣяться, что конгрессы, подобные настоящему, создавая между нами общеніе, откроютъ передъ каждымъ изъ насъ картину дѣятельности его сосѣдей, заставятъ его сравнить ихъ дѣятельность съ его собственной, выйти нѣсколько за предѣлы своего околотка—и окажутся, такимъ образомъ, лучшимъ средствомъ противъ отмѣченной мною опасности.

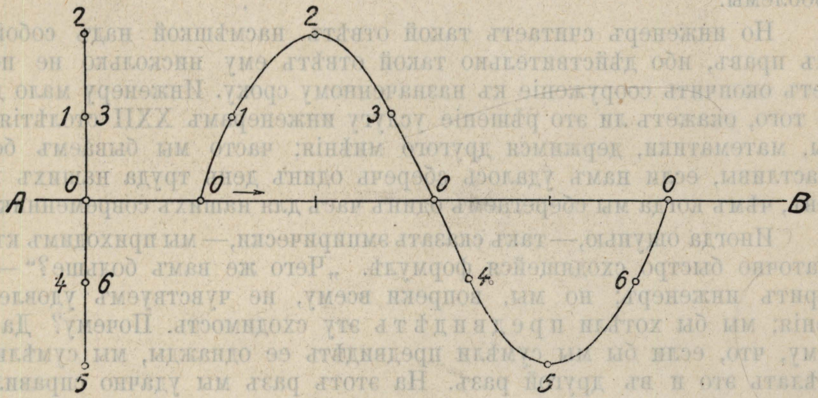
(Окончаніе слѣдуетъ).

Резонансъ и угасаніе электрическихъ волнъ.

Проф. А. Слаби.

(*Продолженіе* *).

Явленія, которыми мы теперь займемся, имѣютъ отношеніе лишь къ перемѣннымъ токамъ; для облегченія ихъ пониманія прибѣгаютъ обыкновенно къ наглядному изображенію. Представимъ себѣ (фиг. 9), что въ какомъ-нибудь мѣстѣ проволоки *AB*, по которой протекаетъ перемѣнный токъ, при точкѣ 0 включенъ аппаратъ, который указываетъ и даетъ возможность измѣрить силу тока въ каждый моментъ. Силу тока мы будемъ наносить на перпендикуляръ въ точкѣ 0; она возрастаетъ отъ 0 черезъ 1 до 2, падаетъ затѣмъ до 3 и ниже до 0. Если перемѣну направленія тока мы выразимъ такимъ образомъ, что послѣдующіе токи будемъ наносить книзу, то токъ возрастаетъ отъ 0 черезъ 4 до 5, затѣмъ падаетъ черезъ 6 снова до 0; послѣ этого тотъ же



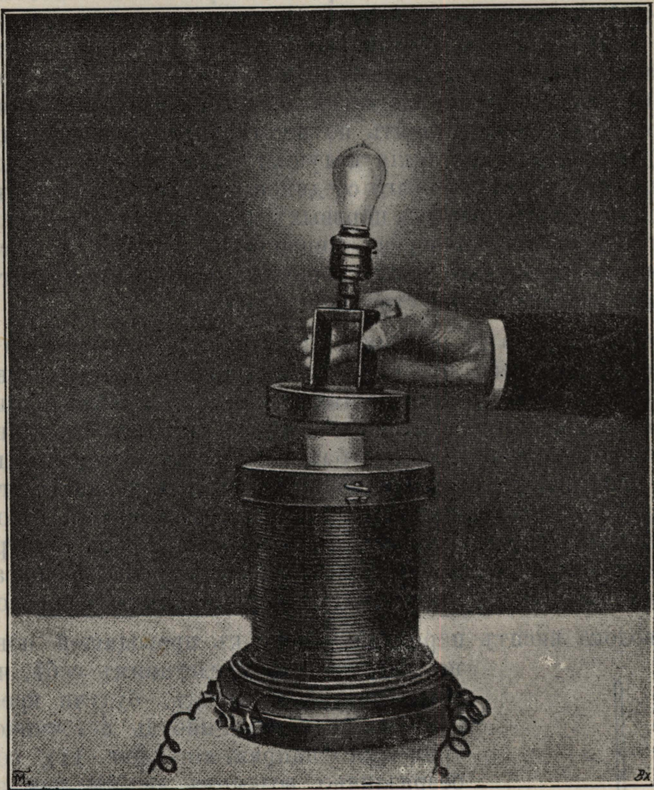
Фиг. 9.

процессъ начинается сызнова. Мы замѣчаемъ, что сила тока то наростаетъ, то падаетъ; эти измѣненія, затягиваясь на нѣкоторое время, получаютъ форму волны. Промежутокъ времени, соотвѣтствующій одному гребню и слѣдующей за ней долинѣ волны, называется періодомъ, а число періодовъ въ одну секунду называется числомъ колебаній, или частотой перемѣннаго тока.

Открытіе Эрстеда сдѣлало наши чувства болѣе тонкими: мы знаемъ, что вокругъ проволоки появляются магнитныя силы, которыя увеличиваются съ возрастаніемъ тока, уменьшаются съ его убываніемъ, и мѣняютъ свое направленіе всякій разъ, когда измѣняется направленіе тока. Вопреки утвержденіямъ магнитопатовъ, у человѣка нѣтъ магнитнаго чувства, мы не можемъ непосредственно наблюдать нара-

*) См. № 474 „Вѣстника“.

станіе и паденіе магнитной силы: намъ нужны для этой цѣли искусственные магнитные глаза. Эту роль могла бы играть магнитная стрѣлка, но вслѣдствіе инертности своей массы она не можетъ поспѣть за быстрыми колебаніями. Геній Фарадэя открылъ другой практичный способъ, основанный на упомянутомъ принципѣ дуализма. Колебанія тока вызываютъ магнитныя волны во внѣшнемъ пространствѣ; это магнитное волненіе, въ свою очередь, обусловливаетъ въ другой проволокѣ, не входящей въ составъ той же цѣпи, электрическія волны съ тѣмъ же числомъ колебаній; это называется трансформаціей.



Фиг. 10.

Колеблющіяся въ пространствѣ силы переносятъ токъ отъ проволоки къ проволокѣ безъ посредства связующаго металлическаго проводника.

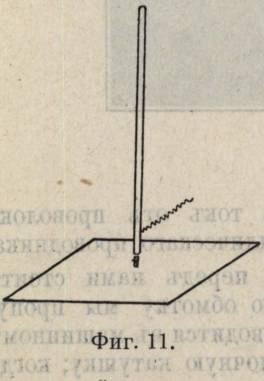
Опытъ покажетъ намъ это явленіе. Здѣсь передъ нами стоитъ электромагнитъ Араго. Черезъ его спиральную обмотку мы пропускаемъ сильный перемѣнный токъ, который производится въ машинномъ залѣ (фиг. 10). Въ рукѣ я держу другую проволочную катушку; когда я приближаю ее къ электромагниту и тѣмъ ввожу ее въ поле магнитныхъ колебаній, то она также пронизывается перемѣнными токами.

Чтобы обнаружить ихъ присутствіе, я соединилъ обороты катушки съ лампочкой накаливанія: вспыхиваніе ея указываетъ на появленіе такъ называемаго вторичнаго тока.

Здѣсь мы встрѣчаемся съ поражающей насъ возможностью передачи силы черезъ пространство. Опытъ съ неменьшимъ успѣхомъ удался бы и въ безвоздушномъ пространствѣ; стало быть, магнитныя волны возникаютъ не въ воздушномъ океанѣ; но тогда гдѣ же? —до сихъ поръ эта тайна пророды скрыта отъ насъ непроницаемой завѣсой, предъ которой техника отступаетъ съ благоговѣніемъ и робостью; пытливый физикъ оказывался смѣлѣе: онъ уже коснулся этой завѣсы. Удастся ли когда-нибудь снять ее совсѣмъ? Но мощныя дѣйствія этой таинственной силы природы составляютъ удѣлъ инженера. Онъ тотчасъ усматриваетъ возможность полезнаго ихъ примѣненія. Въ трансформаторныхъ будкахъ, которыя вы встрѣчаете такъ часто на улицахъ Шарлоттенбурга (ихъ можно узнать по подымающимся надъ ними громоотводамъ), находятся двѣ такія катушки, одна надъ другой или рядомъ съ ней, но безъ металлическаго соединенія. Перемѣнный токъ, который получается помощью мощныхъ паровыхъ машинъ въ центральной станціи на берегу Шпре, течетъ черезъ первичную обмотку, и посредствомъ вибрирующаго магнитнаго поля вторичная обмотка получаетъ нужное для даннаго участка количество электричества.

Генрихъ Герцъ обобщилъ законы, найденные Фарадеемъ. Герцъ показалъ намъ, что магнитное волненіе пространства, потрясаемаго электрическими пульсаціями, передается тѣмъ дальше, чѣмъ быстрѣе совершаются пульсаціи. Вмѣстѣ съ тѣмъ онъ нашелъ способъ получать электрическія колебанія, скорость которыхъ въ миллiоны разъ превышаетъ скорость Фарадэевскихъ колебаній. Этой задачи нельзя разрѣшить механическимъ движеніемъ проволокъ. Этому мѣшаетъ инертность вещества, треніе и возникающая при быстромъ вращеніи центробѣжная сила. Мы разсмотримъ открытіе Герца въ томъ видѣ, какой придали ему знаменитые первые опыты Маркони.

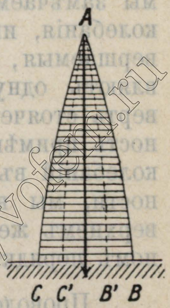
Проволока виситъ перпендикулярно къ проводящей поверхности, не касаясь ея; представимъ себѣ, что проволока получила зарядъ, будучи временно соединена съ какимъ-нибудь источникомъ электрическаго напряженія (фиг. 11); совершенно безразлично, возьмемъ ли мы для этой цѣли кусокъ натертаго янтаря или же машину, приводимую въ движеніе силой какой-нибудь стихіи. Мы говоримъ о зарядѣ проволоки; этимъ мы выражаемъ, что проволока какъ бы наполнена извѣстнымъ количествомъ электрическаго свойства такъ, какъ резиновая трубка или кишка—водой. Подобно тому, какъ трубка способна вмѣстить въ себѣ лишь опредѣленное количество воды, такъ и проволока можетъ вмѣстить въ себѣ лишь ограниченное количество этого электрическаго свойства. Такъ какъ трубка эластична, то ея емкость зави-


Фиг. 11.

ситъ отъ давленія воды; если мы поэтому пожелаемъ выразить вмѣстительность трубки числомъ, то послѣднее имѣло бы значеніе только для одного опредѣленнаго давленія. Точно такъ же и электрическая емкость зависитъ отъ давленія, или отъ электрическаго напряженія. При данномъ давленіи соотвѣтствующая емкость есть величина постоянная: она называется *электроемкостью*. Но представимъ себѣ, что давленіе воды въ трубкѣ превыситъ допустимые предѣлы, что произойдетъ тогда? Трубка лопнетъ, именно въ томъ мѣстѣ, гдѣ она имѣетъ наименьшую прочность, а вода хлынетъ изъ трубки. Проволока также допускаетъ лишь опредѣленную степень электрическаго напряженія; если мы перейдемъ границу, то электричество, т. е. электрическое свойство какъ бы вытекаетъ изъ наиболѣе слабаго мѣста; таковымъ здѣсь является нижній конецъ проволоки, такъ какъ лежащая снизу проводящая поверхность производитъ всасывающее дѣйствіе, напряженіе въ ней всегда ниже, чѣмъ въ проволокѣ. Нѣчто подобное представила бы намъ наполненная водой каучуковая трубка, если бы ея нижній конецъ охватывался капсулой, въ которой разрѣженъ воздухъ. Истеченіе электрическаго свойства происходитъ подъ сильнымъ давленіемъ; воздухъ, черезъ который, протекаетъ электричество, нагрѣвается, увлеченныя теченіемъ частички проволоки накаляются, и мы наблюдаемъ *свѣтовое явленіе*: *электрическую искру*. Теченіе электричества мы называемъ *токомъ*.

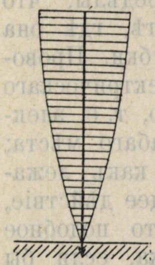
При весьма сильномъ напряженіи яленіе протекаетъ, однако, со всѣми признаками, характерными для упругости. Подобно тому, какъ натянутая пружина, когда мы ее отпустимъ, т. е. внезапно устранимъ нажимъ, подымается выше положенія равновѣсія и лишь послѣ цѣлаго ряда дрожащихъ колебаній приходитъ въ состояніе покоя, такъ и здѣсь электрическое свойство принимаетъ форму пульсирующаго движенія, переходя въ *перемѣнный токъ*, но съ огромнымъ числомъ колебаній, котораго мы даже приблизительно не можемъ достичь съ помощью механическаго движенія. Электрическое напряженіе проволоки безпрерывно переходитъ отъ избытка къ недостатку, а то мѣсто, по которому въ видѣ раскаленной ленты пробѣгаетъ искра, служитъ сообщеніемъ проволоки съ землей.

Самое *теченіе* при этомъ принимаетъ своеобразную форму; такъ какъ зарядъ стекаетъ одновременно со всѣхъ частей проволоки, то сила тока должна возрастать по направленію книзу. Поэтому въ нѣкоторый моментъ распредѣленіе тока будетъ такое, какъ изображено на кривой AB (на фиг. 12), гдѣ сила тока въ каждомъ мѣстѣ представлена горизонтальнымъ отрѣзкомъ соотвѣтствующей длины. При этомъ зарядъ постепенно уменьшается, такъ что въ ближайшій моментъ распредѣленіе тока будетъ представлено не кривой AB, но кривой AB'. Послѣ полнаго исчезновенія заряда, сообразно колебательному характеру явленія, наступаетъ обратное теченіе. Чтобы выразить перемѣну направленія, мы можемъ представить силу новаго теченія, откладывая горизонтальные отрѣзки слѣва. Нарастанію теченія соотвѣтствуетъ переходъ отъ кривой AC' къ кривой AC.



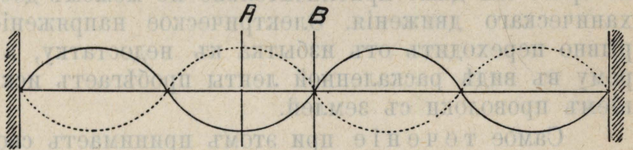
Фиг. 12.

Напряженіе распредѣляется въ обратномъ порядкѣ. Тамъ, гдѣ теченіе наиболѣе слабо, на верхнемъ концѣ проволоки, зарядъ накопляется, напряженіе здѣсь наибольшее; внизу зарядъ все время течетъ, поэтому напряженія здѣсь вовсе нѣтъ. Распредѣленіе напряженія представлено на фиг. 13, гдѣ избыточныя напряженія отложены справа, недостаточныя — слѣва. Всякому бросается въ глаза сходство этой картины съ колеблющимся стержнемъ, нижній конецъ котораго неподвижно закрѣпленъ. Электрическія напряженія соотвѣтствуютъ боковымъ отклоненіямъ стержня отъ положенія равновѣсія.



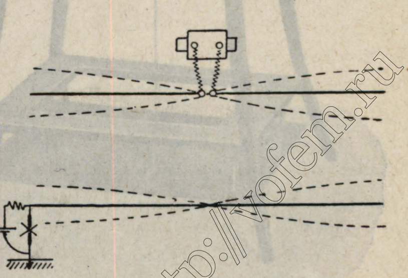
Фиг. 13.

Цѣлое колебаніе соотвѣтствуетъ одной такъ называемой стоячей волнѣ. Это станетъ намъ ясно, когда мы разсмотримъ какую-нибудь волну,—напримѣръ, волну, получаемую на растянутомъ канатѣ. Если бы длина каната была безпредѣльно велика, то каждое сотрясеніе одного конца его распространилось бы по немъ въ видѣ волны. Разсмотримъ канатъ ограниченной длины. Распространяющаяся волна отражается у конца каната, она возращается обратно, и мы получаемъ явленіе стоячей волны. Благодаря бѣгущей впередъ волнѣ каждая частица каната выпячивается то вверхъ, то внизъ; такое же дѣйствіе оказываетъ и отраженная волна; въ однихъ мѣстахъ дѣйствія обѣихъ волнъ благодаря одинаковому направленію взаимно усиливаются, въ другихъ, гдѣ направленія ихъ противоположны, они взаимно ослабляются. Есть мѣста, гдѣ перемѣщенія, вызываемыя обѣими волнами, равны и противоположны; частицы каната здѣсь остаются поэтому въ покоѣ: эти мѣста называются узловыми точками; мѣста же наибольшихъ отклоненій называются пучностями. Разстояніе между двумя узловыми точками (фиг. 14) равно длинѣ полуволны. Если мы выдѣлимъ мысленно участокъ AB, то мы сейчасъ же замѣтимъ полное сходство съ колеблющимся стержнемъ; мы замѣчаемъ, что колебанія, имъ совершаемыя, составляютъ одну четверть стоячей волны. Это обстоятельство указываетъ намъ на возможность примѣнить понятіе стоячей волны и къ случаю электрическихъ колебаній въ проволокѣ. Внизу у земли, т. е. на проводящей поверхности, мы находимъ узловую точку электрическаго напряженія, въ верхнемъ же концѣ — пучность. Колебанія тока происходятъ въ обратномъ порядкѣ: здѣсь узелъ вверху, а пучность внизу.



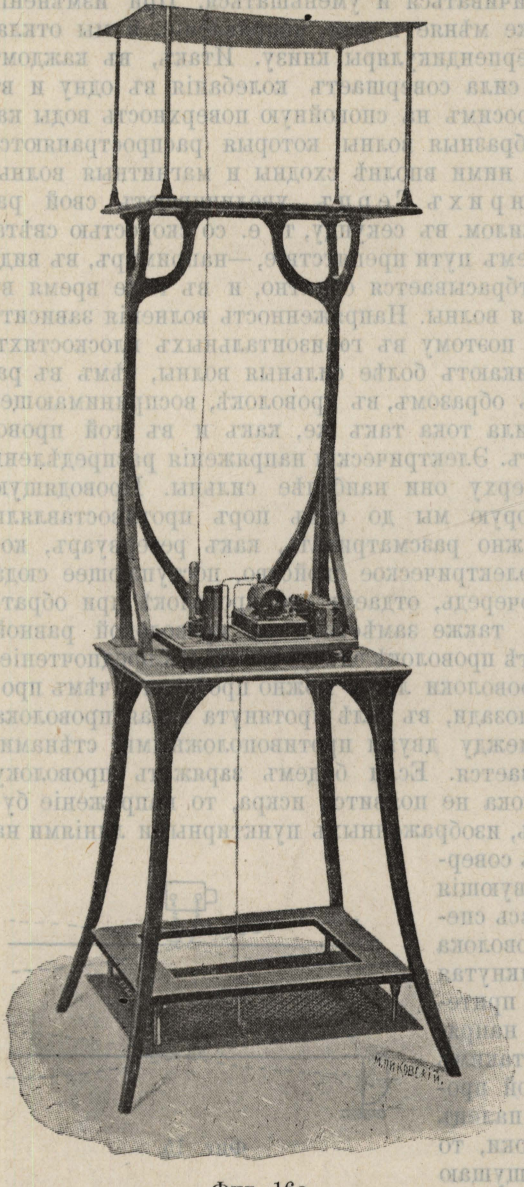
Фиг. 14.

Проволока, разряжающаяся въ землю, пронизывается электрическими пульсаціями, которыя постоянно мѣняютъ свое направленіе. Вслѣдствіе этого въ окружающемъ пространствѣ возбуждается магнитизмъ, т. е. кругомъ проволоки возникаютъ магнитные вихри, которые въ томъ же темпѣ мѣняютъ свою силу и направленіе. Если мы въ какомъ-нибудь мѣстѣ электрически колеблющейся проволоки проведемъ черезъ нее горизонтальную плоскость, и отложимъ отрѣзки, изображающіе колебанія магнитной силы, перпендикулярныя къ направленію тока, не въ самой плоскости, но перпендикулярно къ ней, то эти отрѣзки будутъ увеличиваться и уменьшаться. При измѣненіи направленія тока, сила также мѣняетъ свое направленіе, и мы откладываемъ соотвѣтствующіе перпендикуляры книзу. Итакъ, въ каждомъ мѣстѣ плоскости магнитная сила совершаетъ колебанія въ одну и въ другую сторону. Если мы бросимъ на спокойную поверхность воды камень, то возникаютъ кругообразныя волны, которыя распространяются съ извѣстной скоростью. Съ ними вполнѣ сходны и магнитныя волны, которыя, какъ показалъ Генрихъ Герцъ, увеличиваютъ свой радіусъ со скоростью 300000 килом. въ секунду, т. е. со скоростью свѣта. Если онѣ встрѣчаютъ на своемъ пути препятствіе, —напримѣръ, въ видѣ проволоки,—то часть ихъ отбрасывается обратно, и въ тоже время въ проволокѣ образуются стоячія волны. Напряженность волненія зависитъ отъ порождающаго его тока; поэтому въ горизонтальныхъ плоскостяхъ, расположенныхъ ниже, возникаютъ болѣе сильныя волны, чѣмъ въ расположенныхъ выше; такимъ образомъ, въ проволокѣ, воспринимающей колебанія, распредѣляется сила тока такъ же, какъ и въ той проволокѣ, которая ихъ испускаетъ. Электрическія напряженія распредѣлены въ обратномъ порядкѣ: наверху они наиболѣе сильны. Проводящую поверхность или землю, которую мы до сихъ поръ противоставляли колеблющейся проволокѣ, нужно разсматривать, какъ резервуаръ, который принимаетъ въ себя электрическое свойство, поступающее сюда въ видѣ искры, и, въ свою очередь, отдаетъ его проволокѣ при обратномъ колебаніи. Мы можемъ также замѣстить ее проволокой равной длины. Для опытовъ въ комнатѣ проволокѣ слѣдуетъ отдать предпочтеніе, такъ какъ изолированныя проволоки легче можно протянуть, чѣмъ проводящія поверхности. Тамъ, позади, въ залѣ протянута такая проволока на изолирующихъ нитяхъ между двумя противоположными стѣнами. Посрединѣ проволока прерывается. Если будемъ заряжать проволоку значительнаго напряженія, пока не появится искра, то напряженіе будетъ колебаться въ предѣлахъ, изображенныхъ пунктирными линіями на фиг. 15. Вся проволока теперь совершаетъ колебанія, соотвѣтствующія половинѣ стоячей волны. Здѣсь спереди находится пріемная проволока такой же длины, но неразомкнутая посрединѣ; подъ вліяніемъ притекающихъ магнитныхъ волнъ, напряженіе здѣсь распредѣляется такимъ же образомъ, какъ и на первой проволокѣ. Когда я приближаю палецъ къ свободному концу проволоки, то я вижу небольшія искры и ощущаю легкіе уколы. Чтобы сдѣлать эти искры видимыми для всѣхъ, я постараюсь съ помощью ихъ привести въ дѣйствіе бо́льшую электрическую силу. Съ этой цѣлью я помѣстилъ тамъ дуговую лампу, угли которой



Фиг. 15.

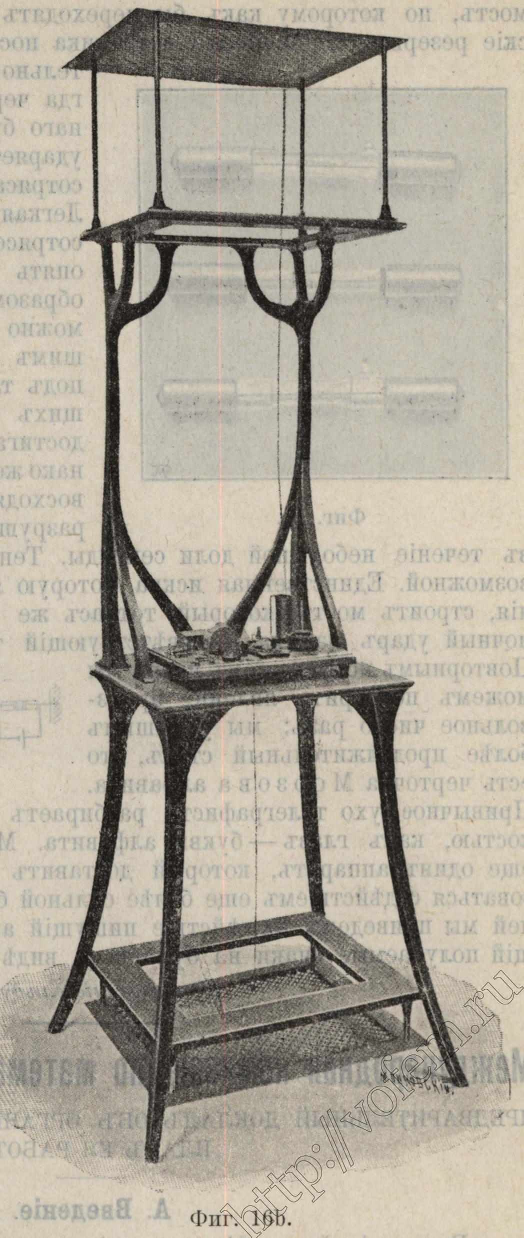
отдѣлены другъ отъ друга небольшимъ промежуткомъ. Несмотря на то, что угли соединены съ полюсами сильной батареи, токъ не можетъ пройти, потому что напряженіе батареи недостаточно для того, чтобы соединить искрой разобщенные угли. Когда же я вызываю колебанія, то электрическое напряженіе между углями возрастаетъ болѣе, чѣмъ въ тысячу разъ, искры въ изобиліи перескакиваютъ отъ одного угля къ другому, и сильно раскаленный воздушный путь искръ образуетъ мостъ для перехода тока отъ батареи. Въ этотъ моментъ лампа начинаетъ горѣть ослѣпительнымъ свѣтомъ. Одного тока, вызываемаго колебательными искрами, было бы недостаточно, чтобы зажечь лампу; на помощь должна придти батарея. Но такая установка не даетъ еще намъ возможности телеграфировать: если бы мы пожелали воспроизвести точки и черточки телеграфа Морзе посредствомъ болѣе и менѣе продолжительнаго горѣнія лампы, то мы еще должны были бы умѣть прерывать функціонированіе лампы, съ мѣста отправленія. Такой автоматическій прерыватель изобрѣлъ недавно умершій русскій профессоръ Поповъ. Это открытіе является осуществленіемъ безпроволочнаго телеграфа въ первой его стадіи. Еще при жизни изобрѣтателя его открытіе нашло себѣ великолѣпное примѣненіе во время русско-японской войны. Возложимъ вѣнокъ славы на его свѣжую могилу.



Фиг. 16а.

Я выставилъ здѣсь модель подобнаго телеграфа (фиг. 16а и 16b), посредствомъ котораго мы безъ помощи проволоки можемъ посылать телеграммы отъ одного конца залы къ другому; при соотвѣтственномъ увеличеніи такого прибора, мы могли бы посылать посредствомъ него телеграммы на разстояніе цѣлыхъ миль.

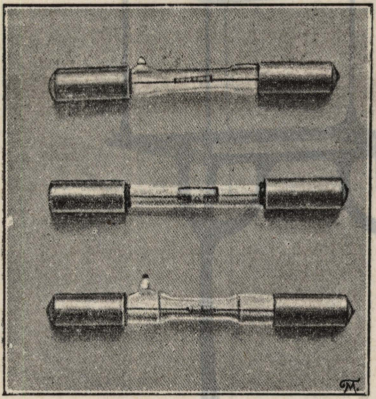
Мы воспользуемся теперь изобрѣтеніемъ французскаго изслѣдователя Бранли (Branly), замѣняющимъ дуговую лампу, которою мы пользовались раньше. Маленькая стеклянная трубочка содержитъ металлическій порошокъ, заключенный между двумя металлическими поршнями (фиг. 17). Такъ какъ отдѣльныя частички порошка соприкасаются другъ съ другомъ лишь своими остріями или чрезвычайно острыми краями, то для прохожденія тока онѣ представляютъ огромное сопротивленіе. Если такая трубочка (ее называютъ теперь когерéромъ*) находится въ томъ мѣстѣ пріемнаго проводника, гдѣ въ прежнемъ опытѣ помѣщалась дуговая лампа, то въ этомъ случаѣ источникъ постояннаго тока, соединенный съ обоими поршнями, не можетъ дать тока (фиг. 18). Огромное сопротивленіе порошка когерера дѣйствуетъ подобно перерыву въ проводникѣ. Если же мы помощью протекающихъ магнитныхъ волнъ вызовемъ въ пріемной проволокѣ электрическое напряженіе, то начнутъ перескакивать маленькія искорки, которыя можно различить подъ микроскопомъ; онѣ образуютъ такимъ образомъ проводящій мостъ для посылаемаго батареей тока постояннаго направленія. Высокая темпера-



Фиг. 16.

*) Въ Германіи „Fritter“.

тура, которую перескакивающія искры вызываютъ на соприкасающихся остріяхъ и краяхъ, спаиваетъ ихъ вмѣстѣ, образуя металлическій мостъ, по которому какъ бы переходятъ готовые въ путь электрическіе резервы, скопившіеся у источника постояннаго тока. Этотъ сравнительно сильный токъ проходитъ тогда черезъ обмотку электромагнитнаго будильника, язычекъ котораго ударяетъ по стеклянной трубки и сотрясаетъ мостикъ когерера. Легкая постройка не выдерживаетъ сотрясенія, мостъ ломается, и токъ опять не можетъ пройти. Такимъ образомъ, электрическія колебанія можно уподобить піонерамъ, наведшимъ мостъ, который обрушился подъ тяжестью первыхъ марширующихъ колоннъ; нѣкоторые все же достигали спасительнаго берега. Однако же электрическія колебанія превосходятъ въ ловкости піонеровъ; разрушенный мостъ они починяютъ въ теченіе небольшой доли секунды. Теперь сигнализація становится возможной. Единственная искра, которую я вызову въ мѣстѣ отправленія, строитъ мостъ, который тотчасъ же рушится; мы слышимъ одиночный ударъ язычка, соотвѣтствующій точкѣ Морзова алфавита. Повторнымъ испусканіемъ искръ мы можемъ повторить явленіе произвольное число разъ; мы услышимъ болѣе продолжительный стукъ, это есть черточка Морзова алфавита. Привычное ухо телеграфиста разбираетъ эти знаки съ такой же легкостью, какъ глазъ — буквы алфавита. Можно также ввести въ цѣпь еще одинъ аппаратъ, который доставитъ намъ возможность воспользоваться содѣйствіемъ еще болѣе сильной батареи; съ помощью послѣдней мы приведемъ въ дѣйствіе пишущій аппаратъ Морзе, фиксирующій получаемые знаки на бумагѣ въ видѣ черточекъ и точекъ.



Фиг. 17.

Фиг. 18.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Международная комиссія по математическому образованію.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ДОКЛАДЪ ОБЪ ОРГАНИЗАЦІИ КОМИССІИ И ОБЩІЙ ПЛАНЪ ЕЯ РАБОТЪ.

А. Введеніе.

Въ секціи философіи и исторіи преподаванія IV международнаго математическаго конгресса, засѣдавшаго въ Римѣ 6—11 апрѣля 1908 г., былъ заслушанъ рядъ докладовъ о преподаваніи математики въ важнѣйшихъ странахъ. По иниціативѣ проф. Д. Смита (D. Smith), автора доклада, относящагося къ Сѣв.-Американскимъ Соединеннымъ Штатамъ, секція постановила представить конгрессу резолюцію объ организаціи международной комиссіи съ цѣлью изученія успѣховъ преподаванія математики въ различныхъ странахъ. Это предложеніе было уже высказано упомянутымъ нью-іоркскимъ профессоромъ въ 1905 году въ его отвѣтѣ на анкету журнала „L'Enseignement mathématique", именно по вопросу „о реформахъ, подлежащихъ осуществленію". Это предложеніе было энергично поддержано конгрессомъ, который въ засѣданіи 11 апрѣля принялъ слѣдующую резолюцію:

Признавая чрезвычайно важнымъ совмѣстное изученіе методовъ и плановъ преподаванія математики въ среднихъ школахъ различныхъ странъ, конгрессъ поручаетъ профессорамъ Клейну (Klein), Грингиллю (Greenhill) и Феру (Fehr) организовать международную комиссію, которая займется изученіемъ этихъ вопросовъ и представитъ слѣдующему конгрессу общій докладъ.

Какъ извѣстно, слѣдующій съѣздъ состоится въ Кэмбриджѣ въ августѣ 1912 года.

Комитетъ конституировался слѣдующимъ образомъ: президентъ проф. Ф. Клейнъ (Гёттингенъ), вице-президентъ Грингилль (Лондонъ), главный секретарь проф. М. Феръ (Женева).

Комитетъ не замедлилъ приступить къ работѣ и въ засѣданіи, имѣвшемъ мѣсто въ Кёльнѣ въ сентябрѣ 1908 года, принялъ настоящій предварительный докладъ объ организаціи комиссіи и объ общемъ планѣ ея дѣятельности.

В. Организація комиссіи.

1. Делегаціи.

a) Комиссія составляется изъ делегатовъ, представляющихъ всѣ тѣ страны, которыя приняли участіе, по крайней мѣрѣ, въ двухъ международныхъ математическихъ конгрессахъ и имѣли въ составѣ послѣднихъ не менѣе двухъ членовъ. Страны, которыя имѣли въ среднемъ не менѣе десяти представителей, могутъ имѣть въ комиссіи двухъ или трехъ делегатовъ, но при голосованіяхъ и сужденіяхъ комиссіи каждая страна имѣетъ только одинъ голосъ.

Къ непосредственному участію въ трудахъ комиссіи сообразно этому приглашаются слѣдующія страны: Германія (2 или 3 делегата), Австрія (2 или 3), Бельгія (1), Данія (1), Испанія (1), Сѣв.-Амер. Штаты (2 или 3), Франція (2 или 3), Греція (1), Голландія (1), Венгрія (2 или 3), Великобританія (2 или 3), Италія (2 или 3), Норвегія (1), Португалія (1), Румынія (1), Россія (2 или 3), Швеція (1), Швейцарія (2 или 3).

Эти страны, будутъ считаться участвующими въ комиссіи.

b) Страны, которыя не отвѣчаютъ поставленному выше условію, но которыя по своимъ установленіямъ могутъ содѣйствовать успѣхамъ науки, также будутъ приглашены командировать въ комиссію по одному делегату; этимъ послѣднимъ будетъ предоставлено слѣдить за работами комиссіи, однако, безъ участія въ голосованіи.

Эти страны будутъ называться пріобщенными странами. Вотъ первый ихъ перечень, который можно будетъ пополнить, если въ этомъ встрѣтится надобность: Аргентина, Австралія, Болгарія, Бразилія, Канада, Чили, Китай, Капская колонія, Египетъ, Англійская Индія, Японія, Мексика, Перу, Сербія, Турція.

c) Національныя подкоммиссіи. Всѣ делегаціи приглашаются организовать у себя на родинѣ подкомиссіи, состоящія изъ представителей различныхъ отраслей преподаванія математики въ общеобразовательныхъ учрежденіяхъ и въ техническихъ или профессіональныхъ школахъ. Эти подкомиссіи имѣютъ цѣлью помогать делегатамъ въ составленіи докладовъ, о которыхъ рѣчь будетъ ниже въ рубрикѣ G.

2. Центральный Комитетъ.

Комиссія управляется особымъ комитетомъ, состоящимъ изъ трехъ членовъ, назначенныхъ 4-мъ международнымъ математическимъ конгрессомъ. Этотъ комитетъ будетъ называться Центральнымъ Комитетомъ; онъ имѣетъ самыя широкія полномочія; въ частности, одобренія комиссіи онъ сохраняетъ за собой всѣ права, касающіяся организаціи комиссіи и опубликованія общихъ ея докладовъ.

Что касается образованія самой комиссіи, то Комитетъ озаботится привлечь лицъ, проявившихъ особенный интересъ къ успѣхамъ преподаванія математики. Комитетъ будетъ просить этихъ лицъ своевременно войти въ сношенія со своими правительствами, дабы послѣднія были уже освѣдомлены о цѣляхъ и объ организаціи комиссіи, когда они получатъ офиціальное предложеніе одобрить предложеніе Комитета относительно делегаціи, а также предложеніе делегатовъ относительно національной подкомиссіи. Въ виду чрезвычайно обширной задачи, которая падаетъ на делегаціи, въ высшей степени желательно, чтобы ихъ занятія могли начаться въ самомъ непродолжительномъ времени.

3. Средства комиссіи.

Такъ какъ IV международный конгрессъ не удѣлилъ комиссіи никакой субсидіи, то правительства участвующихъ странъ будутъ приглашены представить въ распоряженіе своихъ делегацій нѣкоторую сумму, позволяющую цѣликомъ покрыть расходы делегаціи, подкомиссіи, а также принять участіе въ общихъ расходахъ комиссіи.

На общія расходы комиссіи (именно расходы главнаго секретаря и Центральнаго Комитета) будетъ образованъ особый фондъ, составляемый изъ ежегодныхъ взносовъ въ размѣрѣ 100 франковъ каждой участвующей страны. Эти взносы имѣютъ поступить къ главному секретарю въ январѣ 1909, 1910, 1911 и 1912 годовъ или, если угодно, единовременно въ январѣ 1909 года. Генеральный секретарь представитъ финансовый отчетъ общему собранію комиссіи, которая состоится въ Кембриджѣ въ 1912 году, во время V международнаго конгресса. Что касается делегатовъ пріобщенныхъ странъ, то они приглашаются непосредственно снестись съ своими правительствами по вопросу о средствахъ, которыми можетъ располагать делегація, но Комитетъ оставляетъ за собою право установить и для этихъ странъ нѣкоторый взносъ на общіе расходы комиссіи, если въ этомъ представится надобность.

C. Официальный органъ комиссіи, публикація отчетовъ подкомиссій.

Органомъ комиссіи будетъ служить журналъ „L'Enseignement mathématique", выходящій подъ редакціей Лезана (Laisant) и Фера.

Въ этомъ журналѣ будетъ опубликованъ предварительный докладъ, а также будетъ сообщенъ составъ делегацій. Впослѣдствіи этотъ журналъ будетъ правильно помѣщать отчеты о трудахъ комиссіи и подкомиссій.

Само собой разумѣется, что воспроизведеніе этихъ отчетовъ въ періодическихъ изданіяхъ и другихъ печатныхъ органахъ будетъ предоставлено всѣмъ желающимъ.

Подкомиссіи будутъ публиковать свои доклады по собственному соглашенію. Центральный Комитетъ выражаетъ, однако, свое желаніе чтобы эти доклады печатались въ форматѣ журнала „L'Enseignement Mathématique", и чтобы делегаціи различныхъ странъ присылали по 75 экземпляровъ главному секретарю, который разошлетъ ихъ всѣмъ членамъ комиссіи.

D. Офиціальные языки.

Корреспонденціи и доклады должны быть составляемы по выбору авторовъ на одномъ изъ четырехъ языковъ, допущенныхъ на международныхъ математическихъ конгрессахъ. Эти языки суть: нѣмецкій, англійскій, французскій и италіанскій.

E. Общая задача комиссіи.

Сообразно различнымъ пожеланіямъ, которыя были формулированы въ Римѣ, Центральный Комитетъ полагаетъ, что главная цѣль комиссіи должна заключаться въ слѣдующемъ:

Произвести анкету и опубликовать общій отчетъ о современныхъ направленіяхъ въ преподаваніи математики въ различныхъ странахъ.

Необходимо принять во вниманіе не только методы преподаванія и планы обученія, но также и организацію самого обученія; однако, излагать эту послѣднюю сторону дѣла во всей ея полнотѣ, а также историческое ея развитіе нѣтъ необходимости. Комиссія отнюдь не можетъ заняться работой чисто статистической.

Комиссія должна стараться, главнымъ образомъ, выяснить, каковы важнѣйшіе принципы, долженствующіе вдохновлять учителя, а не стремиться къ установленію единообразія въ деталяхъ въ программахъ различныхъ учрежденій.

F. Организація занятій комиссіи.

Для того, чтобы занятія, общій характеръ которыхъ мы намѣтили выше, принесли реальные результаты дѣлу преподаванія, необходимо, чтобы всѣ делегаты и ихъ національныя подкомиссіи вносили въ это дѣло дѣятельное и согласованное сотрудничество.

Делегаціи участвующихъ въ комиссіи странъ будутъ прежде всего приглашены представить планъ относительно общаго хода работъ комиссіи; затѣмъ, въ первый періодъ, они установятъ характеръ своего доклада при содѣйствіи своихъ субкомиссій въ согласіи съ общимъ планомъ работъ въ томъ видѣ, въ какомъ онъ будетъ окончательно установленъ Центральнымъ Комитетомъ. Для странъ пріобщенныхъ представленіе такого доклада является необязательнымъ.

Весьма желательно, чтобы главные пункты доклада были въ каждой странѣ подвергнуты предварительному обсужденію въ собраніи профессоровъ и преподавателей, въ научныхъ и техническихъ обществахъ, а также и въ другихъ учрежденіяхъ, которыя интересуются успѣхами преподаванія математики. Было бы также очень хорошо, если бы текстъ сопровождался библіографическими указаніями, по возможности, болѣе полными и болѣе точными.

Въ печатномъ видѣ эти отчеты должны быть представлены главному секретарю въ началѣ 1911 года.

Во время пасхальныхъ каникулъ 1911 года комиссія соберется на общее засѣданіе, въ которомъ будетъ подвергнута обсужденію вся совокупность вопросовъ, намѣченныхъ въ общей программѣ, а также будутъ установлены основанія общаго доклада. Что касается редактированія послѣдняго, то Центральный Комитетъ имѣетъ еще обсудить тѣ мѣры, которыя должны быть приняты, чтобы этотъ отчетъ могъ быть представленъ комиссіи на Кембриджскомъ съѣздѣ.

G. Предметъ занятій комиссіи.

I. Общія соображенія.

Въ самомъ текстѣ резолюціи Римскаго конгресса рѣчь идетъ только о преподаваніи математики въ средней школѣ; но, принимая во вниманіе, что цѣль этихъ школъ и продолжительность обученія въ нихъ значительно мѣняется отъ одного государства къ другому, Комитетъ намѣренъ распространить свою работу на всю совокупность математическаго образованія, начиная съ первыхъ шаговъ и вплоть до высшаго обученія. Онъ не ограничится изученіемъ общихъ школъ, подготовляющихъ молодыхъ людей въ университетъ, но займется также преподаваніемъ математики въ техническихъ и профессіональныхъ школахъ. Въ виду возрастающаго значенія, которое пріобрѣтаютъ послѣднія школы, а также въ виду тѣхъ требованій, которыя въ этихъ школахъ предъявляются къ обученію математики, предпринимаемая анкета должна удѣлить много мѣста прикладной математикѣ.

Дѣло сводится, такимъ образомъ, къ тому, чтобы ознакомиться съ постановкою математическаго образованія во всей его совокупности въ различныхъ школахъ на различныхъ его ступеняхъ; это изученіе будетъ имѣть главной своей задачей представить въ объективной формѣ существующія тенденціи этого преподаванія. Труды комиссіи будутъ всегда опираться на тѣ доклады, которые выработаютъ делегаты участвующихъ странъ при помощи своихъ мѣстныхъ подкомиссій по общему плану, установленному Центральнымъ Комитетомъ. Въ первой части своей эти доклады дадутъ обзоръ современной организаціи обученія математикѣ, системы экзаменовъ, методовъ обученія и приготовленія преподавательскаго персонала. Лишь послѣ того, какъ будутъ выяснены всѣ эти стороны дѣла, можно будетъ изслѣдовать и ясно представить, каковы собственно тенденціи существующаго преподаванія, которыя часто обнаруживаются въ характерѣ реформъ, предпринятыхъ въ послѣднее время. Этому будетъ посвящена вторая часть, въ которой будутъ сохранены тѣ же подраздѣленія, что и въ первой.

II. Общій планъ занятій.

Часть первая.

Современное состояніе преподаванія и методовъ обученія математикѣ.

Глава I. Различные типы школъ. Въ этой главѣ должно быть дано систематическое перечисленіе различныхъ учебныхъ заведеній, въ которыхъ производится обученіе математикѣ, съ указаніемъ цѣли каждой школы. Необходимо принять также во вниманіе и женскія школы.

Учрежденія должны быть распредѣлены по слѣдующей классификаціи:

a) начальныя школы, низшія, элементарныя и высшія;

b) среднія учебныя заведенія (лицеи, гимназіи, реальныя училища и т. д.),

c) среднія профессіональныя училища (техническія, коммерческія и т. п.),

d) нормальныя школы для подготовленія учителей (учительскія семинаріи, институты и т. д.),

e) высшія учебныя заведенія: университеты и политехническіе институты.

Очень желательно, чтобы въ этой главѣ былъ также данъ общій обзоръ послѣдовательности и взаимной связи между различными учрежденіями съ указаніемъ средняго возраста воспитанниковъ.

Глава II. Цѣль математическаго образованія и различные отдѣлы, преподаваемые въ школахъ. Необходимо разобрать этотъ вопросъ по отношенію ко всѣмъ вышеупомянутымъ типамъ учебныхъ заведеній, а также указать, преподается ли въ школахъ даннаго типа прикладная математика, въ особенности механика.

Цѣль математическаго образованія не только мѣняется отъ одного учрежденія къ другому, но большей частью она подверглась въ теченіе послѣдняго столѣтія значительнымъ измѣненіямъ даже въ школахъ одного и того же типа. Эта цѣль можетъ быть чисто формальной;

оставаясь формальной, она можетъ все же отводить мѣсто интуиціи; она можетъ заключаться въ томъ, чтобы одновременно стремиться къ логическому развитію, не пренебрегая въ то же время утилитарными задачами; она можетъ, наконецъ, носить исключительно практическій характеръ. Далѣе, можно имѣть въ виду, главнымъ образомъ, развитіе памяти или, напротивъ того, отдавать предпочтеніе развитію математическихъ способностей.

Какіе отдѣлы математики преподаются въ школахъ различнаго типа? Здѣсь нужно указать время, которое удѣляется преподаванію каждаго отдѣла, и размѣры программъ. Въ какой мѣрѣ указывается при преподаваніи на связь, существующую между различными вѣтвями, а также на связь между математикой и ея приложеніями (разумѣя подъ этимъ механику) и физикой?

Глава III. Экзамены. Не подлежитъ сомнѣнію, что система экзаменовъ оказываетъ большое вліяніе на методъ преподаванія. Необходимо, слѣдовательно, дать сводку всего того, что касается экзаменовъ въ школахъ различныхъ категорій, въ особенности экзаменовъ на аттестатъ зрѣлости, на званіе баккалавра, на званіе учителя и т. д.

Глава IV. Методы преподаванія. Какіе методы преобладаютъ въ различныхъ учрежденіяхъ, начиная отъ первоначальнаго обученія и вплоть до высшаго? Матеріалъ преподаванія, математическія модели. —Руководства, учебники, сборники задачъ и упражненій. Теоретическія упражненія; задачи, заимствуемыя изъ прикладныхъ наукъ.—Практическія занятія.

Глава V. Приготовленіе кандидатовъ на замѣщеніе учительскихъ должностей. Здѣсь вновь нужно разсмотрѣть различные типы и указать, какой требуется въ каждой школѣ отъ учителя цензъ a) въ смыслѣ теоретическаго образованія и b) въ смыслѣ практической подготовки.

Часть вторая.

Глава I. Современныя идеи, относящіяся къ организаціи школы. Реформы въ дѣлѣ обученія, новые типы школъ, вопросъ о совмѣстномъ обученіи обоихъ половъ.

Глава II. Современныя тенденціи, относящіяся къ цѣлямъ математическаго образованія и къ различнымъ отдѣламъ преподаванія. Цѣль обученія; указаніе новыхъ отдѣловъ или новыхъ главъ, которыми слѣдовало бы замѣстить безполезныя части дѣйствующихъ программъ; отдѣлы, имѣющіе небольшое значеніе, но сохраняемые вслѣдствіе традиціи или рутины.

Въ виду быстраго развитія математическихъ наукъ и ихъ приложенія Комитетъ предполагаетъ вновь чрезвычайно тщательно изслѣдовать, какіе отдѣлы этой области знаній вносятъ больше всего въ общее развитіе культуры. Изъ различныхъ предметовъ, которые въ настоящее время претендуютъ на то, чтобы имъ было удѣлено мѣсто въ элементарномъ преподаваніи, слѣдуетъ, съ одной стороны, указать на дифференціальное и интегральное исчисленіе, на аналитическую геометрію, на нѣкоторыя части начертательной и проективной геометріи, а также на изученіе физики съ математической точки зрѣнія. Съ другой стороны, многіе предлагаютъ ввести въ преподаваніе новые вопросы, носящіе болѣе спеціальный характеръ или же ввести новыя, основныя понятія (таковы понятія о функціи, о группахъ, объ ансамблѣ). Было бы очень желательно, чтобы предпринимаемая анкета выяснила, въ какой мѣрѣ можно считаться съ этими требованіями, каковъ необходимый минимумъ познаній изъ элементовъ евклидовой геометріи, начертательной и проективной геометріи, алгебры, дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія, тригонометріи и аналитической геометріи, составляющихъ основу дальнѣйшаго высшаго образованія.

Тотъ же вопросъ возникаетъ и по отношенію къ учрежденіямъ профессіональнаго характера. Какіе отдѣлы признаются полезными въ различныхъ спеціальностяхъ?

Глава III. Экзамены. Проекты, касающіеся преобразованія существующей системы экзаменовъ, а также полнаго ихъ устраненія.

Глава IV. Методы преподаванія. Современныя идеи, касающіяся методовъ преподаванія на различныхъ ступеняхъ и въ школахъ различныхъ типовъ. Связь между различными вѣтвями математики; связь между математикой и другими отраслями знанія; упражненія и практическія занятія; модели и инструменты, употребленіе руководствъ.

Нѣкоторыя замѣчанія къ послѣдней главѣ. 1. Со времени Песталоцци соображенія психологическаго характера играютъ весьма важную роль въ первоначальномъ обученіи. Въ послѣднее время съ ними считаются также въ извѣстной мѣрѣ при разработкѣ программъ для средне-учебныхъ заведеній. Было бы въ высшей степени желательно выяснить, каковы результаты, которые даетъ психологія по отношенію къ преподаванію математики, и въ какой мѣрѣ съ нею цѣлесообразно считаться при реформѣ этой науки. Въ особенности было бы желательно выяснить, что даетъ здѣсь эвристическая метода преподаванія, а также насколько необходимо предпосылать теоретическому курсу интуитивный пропедевтическій курсъ.

Съ другой стороны, съ какого момента должны получить преобладающее значеніе соображенія чисто логическаго характера, напримѣръ, при преподаваніи геометріи и дифференціальнаго или интегральнаго исчисленія.

2. Практическія приложенія. Многія школы посвятили уже много вниманія и споровъ вопросу о томъ, какую роль можно удѣлить соображеніямъ практическаго и экспериментальнаго характера.

a) Такъ, напримѣръ, въ элементарномъ преподаваніи можно пользоваться складываніемъ бумаги, вести работы на открытомъ воздухѣ, пользоваться простѣйшими измѣрительными приборами; можно указывать на практическіе и приближенные методы исчисленія (степень приближенія, логариѳмы съ различнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ, употребленіе счетной линейки), на общій вопросъ о примѣненіи графикъ въ алгебрѣ, на примѣненіе клѣтчатой бумаги, получившее въ послѣднее время широкое распространеніе.

b) Въ послѣдніе годы заходила рѣчь также о математическихъ лабораторіяхъ. Что сдѣлано въ этомъ направленіи и какіе получены результаты?—Математическія модели, изготовляемыя учащимися; роль коллекцій моделей.

Какія средства могли бы привести къ тому, чтобы въ популярномъ преподаваніи (въ народныхъ университетахъ) математикѣ было удѣлено больше мѣста? Отдѣленіе математическихъ принадлежностей въ музеяхъ.

Все это дало бы средства бороться съ предвзятымъ отношеніемъ къ математикѣ.

3. Связь между различными отдѣлами математики. Было бы очень полезно изслѣдовать, въ какой мѣрѣ было бы возможно стереть условныя границы, установившіяся между различными отдѣлами частей математики, напримѣръ, между алгеброй и геометріей, между алгеброй и дифференціальнымъ и интегральнымъ исчисленіемъ, между евклидовой и аналитической геометріей, между геометріей и тригонометріей. Слѣдовало бы не только выяснить возможность такой реформы, но нужно было бы также и учитывать неудобства и опасности, которыя могли бы отъ этого проистечь; все это вопросы большой важности.

Было бы также желательно познакомиться съ результатами слѣдующихъ преобразованій, которыя были частью предложены, частью выполнены въ послѣдніе годы: a) мѣсто, которое можетъ быть отведено геометрическимъ демонстраціямъ въ алгебрѣ, b) сліяніе плоской геометріи со стереометріей, c) болѣе тѣсное соединеніе дифференціальнаго исчисленія съ интегральнымъ и попытки предпослать интегральное исчисленіе дифференціальному.

4. Связь между математикой и другими вѣтвями знанія. Въ томъ же порядкѣ идей было бы весьма полезно выяснить точки соприкосновенія, которыя существуютъ между математикой и другими вѣтвями знанія. Такъ, напримѣръ, отношеніе математики: a) къ черченію (геометрическому, техническому и художественному), b) къ прикладнымъ наукамъ, c) къ другимъ вѣтвямъ знанія (къ физикѣ, химіи, біологіи, географіи и т. д.), d) къ философіи, e) къ задачамъ повседневной жизни.

Всѣ эти точки соприкосновенія имѣютъ большую важность въ примѣненіи къ практическому обученію. Здѣсь недостаточно только ознакомиться съ возможными и общими пожеланіями, важно выяснить, что въ этомъ направленіи дѣйствительно сдѣлано, достигнуты ли успѣхи, и какія возникаютъ на этой почвѣ опасенія. Такъ, напримѣръ, тѣ, которые настаиваютъ на болѣе тѣсной связи между математикой и физикой, должны будутъ точно установить, каковы тѣ геометрическія свѣдѣнія, которыя могутъ получить непосредственное примѣненіе въ физикѣ, а также указать тѣ вопросы элементарной физики, которые приводятся къ уравненіямъ первой степени, къ уравненіямъ второй степени съ одной или съ нѣсколькими неизвѣстными, къ прогрессіямъ и т. д.

5. Историческія соображенія. Высказывалось пожеланіе, чтобы нѣкоторое время было удѣлено исторіи развитія математики. Въ какой мѣрѣ это желательно?

Глава V. Приготовленіе учительскаго персонала. Какимъ условіямъ должна удовлетворять раціональная подготовка учительскаго персонала? Какъ нужно организовать теоретическіе и практическіе курсы?

Успѣхъ преподаванія непосредственно зависитъ отъ подготовки учителей. Это обстоятельство большой важности. Занятія кандидатовъ на учительскія мѣста и требованія, которыя къ нимъ предъявляются, естественно мѣняются отъ страны къ странѣ; они зависятъ въ большой мѣрѣ отъ количества кандидатовъ и отъ тѣхъ средствъ, которыя удѣляются дѣлу обученія. Комитетъ полагаетъ, поэтому, что было бы желательно ознакомиться съ тѣми реформами или съ проектами реформъ, которыя имѣются въ виду осуществить въ дѣлѣ подготовленія учительскаго персонала, удовлетворяющаго современнымъ требованіямъ; и это относится не только къ преподавателямъ начальныхъ и среднихъ учебныхъ заведеній, но даже къ преподавателямъ университетовъ.

Настоящая анкета должна, слѣдовательно, выяснить:

a) какія математическія занятія требуются отъ кандидатовъ;

b) каково должно быть ихъ собственное участіе въ научныхъ изысканіяхъ;

c) какія лучшія средства изложенія теоретической и практической педагогики (понимая подъ послѣдней науку о воспитаніи);

d) вопросъ о полѣ преподавателя на различныхъ ступеняхъ обученія;

e) наконецъ, вопросы о времени, которое слѣдовало бы удѣлить исторіи математики, исторіи преподаванія математики, вопросы о математическихъ развлеченіяхъ и общей литературѣ, касающейся математическаго образованія.

Общія замѣчанія.

Въ каждой изъ этихъ главъ желательно кратко подчеркнуть, съ одной стороны, то, что̀ относится къ предполагаемыхъ реформамъ, а съ другой стороны, опасности, которыхъ слѣдуетъ при этомъ избѣгать, а также аргументы и возраженія, которые противопоставляются этимъ проектамъ. Вотъ нѣкоторые изъ важнѣйшихъ вопросовъ, которые должны быть подвергнуты обсужденію:

1) Желаніе сдѣлать изложеніе привлекательнымъ можетъ понизить серьезность преподаванія—результатъ, который могъ бы быть гибельнымъ какъ для самой науки, такъ и для практическихъ приложеній математики.

2) Психологія, дурно понятая, могла бы повести къ тому, что преувеличено выдвигалось бы значеніе логическихъ основъ математики, результатомъ чего могла бы быть постоянная неувѣренность ученика.

3) Не менѣе вреднымъ могло бы показаться пренебреженіе и абстрактной стороной математики, которая представляется необходимой,

чтобы математическія истины неизгладимо запечатлѣлись въ душѣ ученика.

4) Если не отдавать себѣ отчета, что такой отдѣлъ, какъ геометрія, какъ ее въ настоящее время понимаютъ, приводитъ къ результатамъ иного рода, нежели тѣ, которые даетъ алгебра, то и это можетъ имѣть вредныя вліянія. Такимъ образомъ, соединеніе этихъ двухъ отдѣловъ могло бы привести къ урону для нѣкоторыхъ важныхъ моментовъ каждаго отдѣла. Тѣ же вопросы возникаютъ и для другихъ предметовъ.

Возможны опасности еще и другого рода. Комитетъ полагаетъ, что необходимо ихъ всѣхъ тщательно изучить для того, чтобы реформы, дѣйствительно подлежащія осуществленію, не обманули возложенныхъ на нихъ надеждъ.

Центральный Комитетъ: F. Klein, Président, 3, Wilhelm Weberstr., Göttingue (Allemagne). Sir George Greenhill, Vice-président, 1, Staple Jnn., Londres, W. C. H. Fehr, Secretaire-général, 72, Tlorissant, Genève (Suisse).

Постановка приготовленія учителей физики въ Германіи.

Привать-доцента В. Лермантова.

Съ тѣхъ поръ, какъ выяснилась необходимость вводить собственныя упражненія по физикѣ и химіи для учениковъ въ средне-учебныхъ заведеніяхъ, въ Германіи стали обсуждать, какъ надо поставить дѣло приготовленія учителей, чтобы они могли успѣшно вести подобнаго рода занятія. Современные учителя, по мнѣнію компетентныхъ людей, къ этому совершенно неподготовлены. Въ журналѣ Zeitschrift für Physicalischen und Chemischen Unterricht съ 1906 года появился цѣлый рядъ статей по этому предмету, изъ которыхъ уже выяснилось положеніе дѣла и господствующіе взгляды на него.

Оказывается, что въ Германіи окончившіе университетскій курсъ и желающіе стать учителями физики, должны преподавать первый „пробный годъ“ подъ руководствомъ одного изъ опытныхъ учителей, а при немногихъ гимназіяхъ существуютъ и учительскія семинаріи, гдѣ тоже въ теченіе года кандидатъ обучается методикѣ подъ руководствомъ опытнаго учителя. Но такую организацію признаютъ далеко недостаточной, потому что молодому учителю не представляется случаевъ обучиться на практикѣ обращенію съ приборами гимназическаго курса, умѣнью подготовлять классные опыты и приводить свои приборы въ исправность. О томъ, какъ надо устроить это дѣло, высказались многіе авторитеты.

Первымъ, въ 1906 г., высказался проф. К. Шреберъ (Schreber) въ Грейфсвальдѣ (стр. 213). Признавая этотъ недостатокъ, онъ устроилъ для будущихъ учителей особыя „упражненія въ демонстраціи физическихъ приборовъ“ разъ въ недѣлю, по одному часу. Участвующему въ этихъ упражненіяхъ студенту предлагается въ теченіе двухъ недѣль подготовить и показать передъ профессоромъ и своими сотоварищами одинъ изъ опытовъ гимназическаго курса. Приборы предоставляется выбрать изъ университетскихъ коллекцій, привести въ порядокъ и подготовить опытъ самому. На это уходитъ обыкновенно нѣсколько часовъ. Послѣ опыта и изложенія присутствующіе подвергаютъ лекцію критикѣ. Слабая сторона этихъ упражненій та, что каждый участникъ успѣваетъ сдѣлать не больше одной демонстраціи.

Проф. Видеманъ (1906 г., стр. 266) считаетъ постановку элементарнаго университетскаго курса физики такъ же, какъ и спеціальныхъ, вполнѣ правильной, а утвержденіе многихъ студентовъ, что они все это уже учили въ своей школѣ,—удобной отговоркой, чтобы не ходить на лекціи. Также и постановку практическихъ упражненій по книгѣ Видемана и Эберта онъ считаетъ вполнѣ цѣлесообразной. Въ Баваріи кандидаты на должность учителя физики сдаютъ спеціальный экзаменъ послѣ 4-го и послѣ 8-го семестровъ. При этомъ съ нихъ требуется спеціальная экспериментальная работа въ родѣ тѣхъ, которыя дѣлаютъ для докторской диссертаціи, но полегче. Эти работы нѣсколько иного характера, чѣмъ тѣ эксперименты, которые учителю придется сдѣлать; поэтому Видеманъ ввелъ у себя и упражненія въ родѣ описанныхъ выше. Но еще больше пользы для учителей онъ находитъ въ повторномъ участіи ихъ въ спеціальныхъ курсахъ для учителей, которые устраиваются въ теченіе вакаціоннаго времени при университетахъ. Въ концѣ концовъ, по мнѣнію Видемана, все обстоитъ благополучно въ нѣмецкихъ университетахъ по части приготовленія учителей физики.

Однако, сами учителя иного мнѣнія. Очень ясно высказалъ свой взглядъ учителя по этому поводу г. Гримзель, на стр. 1, 1907 г, Zeitschr. für Phys-Chem. Unterricht. Онъ утверждаетъ, что студентъ, бывшій гимназистомъ или реалистомъ, желающій изучать физику, на первомъ семестрѣ въ университетѣ получаетъ лишь повторительный курсъ, въ которомъ находитъ для себя очень мало новаго. Въ этомъ теперь легко убѣдиться русскому читателю, такъ какъ весной вышелъ въ Кіевѣ переводъ одного изъ такихъ курсовъ—проф. Варбурга. Это, дѣйствительно, курсъ повторительнаго характера, въ немъ введено много новыхъ фактовъ, но мало разъясненій и нѣтъ настоящей особенности университетскихъ курсовъ, долженствующихъ содержать и указанія, какъ сообщаемые факты были найдены.

Послушавъ такой курсъ, говоритъ Гримзель, гимназистъ, жаждущій новыхъ знаній, скоро разочаровывается, до приборовъ же его допускаютъ только черезъ годъ. Въ это время многіе забываютъ свой интересъ къ физикѣ и увлекаются интереснѣе поставленными лекціями математики. Самый этотъ „малый практикумъ", по Эберту или Кольраушу, даетъ ему очень мало: приборы всѣ установлены, продѣлывать опыты можно механически, безъ пониманія („опытнымъ путемъ", какъ у насъ говорятъ нѣкоторые студенты), да и то, „къ сожалѣнію", часто представляютъ не собственныя числа, а скопированныя у товарищей, раньше получившихъ одобреніе, или поддѣланныя подъ эти числа. Даже добросовѣстные студенты бываютъ принуждены слѣдовать такому обычаю, если руководящіе работами очень требовательны на счетъ „хорошихъ чиселъ" въ результатахъ работы.

Гринзель полагаетъ, что будущіе учителя физики должны еще въ университетѣ проходить особый курсъ ручного труда, по части управленія физическими приборами и изготовленія приспособленій для опытовъ, въ объемѣ, доступномъ неспеціалисту-механику. Но это обученіе, равно какъ и основательныя упражненія въ обращеніи съ демонстраціонными приборами гимназическаго курса, не вполнѣ умѣстно въ университетѣ за недостаткомъ времени; имъ мѣсто въ особыхъ семинаріяхъ, устроенныхъ при среднихъ учебныхъ заведеніяхъ и подъ руководствомъ опытныхъ учителей-практиковъ.

Въ томъ же духѣ высказывается К. Фишеръ (Fischer) на стр. 65—78 Т. XX. Онъ считаетъ необходимыми для будущихъ учителей упражненія въ исправленіи физическихъ приборовъ, въ изготовленіи самодѣльныхъ простыхъ приборовъ и въ демонстраціяхъ, какъ указано выше. Въ заключеніе необходимо участіе въ упражненіяхъ по чтенію оригинальныхъ работъ по физикѣ для рефератовъ въ „семинарѣ" и самостоятельная экспериментальная работа*).

Для приготовленія учителей физики Фишеръ считаетъ нужнымъ устраивать при университетахъ особыя отдѣленія съ помѣщеніемъ около 120 кв. с. поверхности, содержащимъ собраніе приборовъ, мастерскую, залъ для занятій, устроенный, частью, какъ механическая мастерская, аудиторію, библіотеку, темную комнату для оптическихъ опытовъ и лабораторію для завѣдывающаго профессора. При отдѣленіи долженъ быть служитель-механикъ, а убирать приборы послѣ опытовъ должны сами слушатели, такъ какъ они и этому дѣлу должны выучиться для успѣха въ своей будущей учительской должности.

К. Ноакъ (Noack), учитель въ Гиссенѣ, (стр. 177, Т. XX) повторяетъ сказанное раньше, но указываетъ на безполезность упражненій въ даваніи демонстративныхъ уроковъ въ университетѣ: на это не хватаетъ времени, въ этомъ можно упражняться только при гимназіи. Ноакъ указываетъ также на необходимость музея школьныхъ приборовъ и курса сравнительнаго „приборовѣдѣнія".

Проф. Г. Коненъ (H. Konen) въ Мюнстерѣ (стр. 231, XX) высказывается въ томъ же духѣ, указывая только, что веденіе такого отдѣленія при университетѣ поглотитъ все время профессора и опытнаго ассистента, такъ что необходимо назначеніе новыхъ лицъ для этого дѣла.

Почти тоже предлагаетъ Коммиссія Общества Естествоиспытателей и Врачей (XXI, стр. 52) указывая сверхъ программъ для учителей физики также программы химико-біологическаго учительскаго отдѣла.

Очень интересно констатировать, что у насъ въ С.-Петербургскомъ университетѣ уже давно осуществлено многое изъ того, чего добиваются германскіе учителя для улучшенія приготовленія кандидатовъ въ учителя физики. Начальныя практическія занятія по физикѣ у насъ перенесены

---

*) Статья Фишера переведена и напечатана въ № 5. „Физ. Обозрѣнія Т. Г. 1908 г." (когда моя статья была уже готова).

на 1-й и 2-й семестры уже съ 1887 года, такъ какъ оказалось, что прохожденіе университетскаго курса физики не вліяетъ замѣтно на подготовку для начальныхъ практическихъ занятій, а усердіе студентовъ сильно падаетъ съ переходомъ на старшіе курсы. Общій курсъ физики у насъ, споконъ вѣку, имѣлъ характеръ не повторительнаго, а настоящаго университетскаго курса, сообщающаго не одни новые факты, но и методы, которыми они были открыты. Въ осеннемъ семестрѣ, съ 1901 г. (исключая годы обструкціи), осуществлялся и необязательный курсъ методики физики и содержанія приборовъ въ исправности, при 5—6 слушателяхъ.

Дѣйствіе эманаціи радія на растворы солей мѣди.

M-me Кюри и M-lle Гледичъ.

(Faculté des Sciences de Paris. Laboratoire de physique).

Рамсай и Камеронъ годъ тому назадъ опубликовали въ цѣломъ рядѣ сообщеній, что они наблюдали образованіе щелочныхъ металловъ и литія въ растворахъ солей мѣди, подверженныхъ дѣйствію эманаціи радія*). Они пришли къ заключенію, что въ присутствіи эманаціи радія металлъ мѣдь распадается на элементы той же группы меньшаго атомнаго вѣса: калій, натрій и литій. Столь важные результаты опытовъ названныхъ изслѣдователей скоро привлекли всеобщее вниманіе и вызвали желаніе воспроизвести ихъ въ лабораторіяхъ, которыя обладаютъ достаточнымъ количествомъ радія. Вотъ въ чемъ заключается опытъ.

Растворъ соли мѣди (сѣрнокислой или азотнокислой) помѣщается въ маленькій стеклянный сосудъ, въ который введено значительное количество эманаціи радія, которую тамъ оставляютъ, предоставляя ей постепенно распадаться. Послѣ этого отдѣляютъ мѣдь; оставшійся растворъ выпаривается до суха; сухой остатокъ подвергается изслѣдованію. Тѣ же операціи и въ томъ же порядкѣ производятся надъ растворомъ той же соли мѣди, которая не была предварительно подвергнута дѣйствію эманаціи. Такіе опыты были повторены Рамсаемъ и Камерономъ много разъ. Остатокъ состоитъ, главнымъ образомъ, изъ соли натрія съ небольшой примѣсью калія и кальція. Въ четырехъ описанныхъ опытахъ, въ которыхъ дѣйствовали эманаціей радія на соль мѣди, присутствіе литія обнаруживалось посредствомъ спектроскопа. Въ параллельныхъ опытахъ (безъ эманаціи радія) сухой остатокъ замѣтно меньше, и присутствія литія въ немъ не наблюдается. Рамсай и Камеронъ сдѣлали попытку опредѣлить количество литія въ своихъ опытахъ. Они указываютъ на присутствіе около 0,00017 *mg* литія въ остаткѣ, вѣсъ котораго равенъ 1,67 *mg* на 0,27 содержанія мѣди (0,815 *mg* азотнокислой мѣди), въ то время какъ въ параллельныхъ опытахъ безъ эманаціи радія сухой остатокъ вѣситъ всего 0,79 *mg*.

*) См. „Вѣстникъ“, № 439.

Мы постарались воспроизвести опыты съ возможно большими предосторожностями. Дѣйствительно, опытъ очень тонкій и заключаетъ причины ошибокъ, изъ которыхъ главная есть употребленіе сосуда изъ стекла, какъ указалъ самъ Р а м с а й.

Наши предварительные опыты показали, что весьма трудно получить химическіе продукты, свободные отъ литія. Его находятъ въ дистиллированной водѣ, почти во всѣхъ реактивахъ; если реактивъ его не содержитъ, то, будучи оставленъ въ стеклянномъ сосудѣ, онъ черезъ нѣкоторое время уже содержитъ слѣды литія. Былъ произведенъ слѣдующій опытъ. Вода, которая была дистиллирована въ платиновомъ перегонномъ кубѣ и сохранена въ платиновомъ флаконѣ, не оставляетъ никакого видимаго остатка послѣ выпариванія въ платиновой чашкѣ 250 cm^3, и послѣдняя капля, оставшаяся при выпариваніи, не даетъ спектра литія. Но если вода, полученная такимъ же способомъ, сохранялась въ стеклянномъ флаконѣ въ теченіе 24 часовъ, то въ ней послѣ выпариванія можно было обнаружить присутствіе небольшого остатка, состоящаго, главнымъ образомъ, изъ соли натрія, но содержащаго слѣды литія.

Намъ казалось необходимымъ замѣнить стекло другимъ матеріаломъ. Мы убѣдились, что было бы одинаково опасно употреблять кварцъ, которымъ усиленно пользовался Р а м с а й, потому что продажные кварцевые сосуды содержатъ литій. Мы обработали фтористоводородной кислотой, свободной отъ литія, осколокъ непрозрачной кварцевой капсулы и кусокъ прозрачной кварцевой трубки. Въ остаткѣ можно было обнаружить присутствіе литія въ замѣтной пропорціи. Прозрачный кварцъ содержитъ литія много больше, чѣмъ кварцъ непрозрачный. Мы тогда рѣшили пользоваться платиновой посудой. Приборъ, которымъ мы пользовались, состоялъ изъ платиноваго горизонтальнаго пріемника длиной 7,5 cm, 1,5 cm внѣшняго діаметра. Этотъ пріемникъ имѣетъ на одномъ изъ концовъ маленькую платиновую вертикальную трубку, посредствомъ которой можно вводить растворъ. Маленькая трубка имѣетъ платиновую крышку, которая прикрываетъ растворъ, но не представляетъ герметическаго запора. Стеклянная трубка снаружи насажена на платиновую; она снабжена боковымъ тубусомъ съ краномъ. Растворъ былъ введенъ въ приборъ при помощи платиноваго сифона. Затѣмъ онъ былъ извлеченъ тѣмъ же способомъ и не находился ни на минуту въ соприкосновеніи со стекломъ прибора. Вода и необходимыя для опыта кислоты были очищены перегонкой въ платиновомъ перегонномъ кубѣ и хранились въ платиновой посудѣ. Мы, дѣйствительно, констатировали, что всѣ эти реактивы содержали литій, особенно сѣрная кислота. Но послѣ процесса очищенія больше нельзя было обнаружить присутствіе литія въ остаткѣ отъ выпариванія 80 cm^3 азотной, 25 cm^3 сѣрной, 25 cm^3 фтористоводородной кислоты и 250 cm воды.

Какъ замѣтилъ и Р а м с а й, чистыя продажныя соли мѣди содержатъ замѣтное количество литія. Мы испытали различные методы очищенія: повторное осажденіе сѣроводородомъ, отложеніе мѣди посредствомъ электролиза, дробную кристаллизацію.

Въ концѣ концовъ, мы примѣнили сѣрнокислую соль мѣди послѣ большого числа кристаллизаціи въ платиновой посудѣ, при чемъ каждое раствореніе производилось чистой водой. Такая обработка очень дѣйствительна, но очень трудно, если не невозможно, извлечь послѣдніе слѣды литія. Когда очищеніе было прекращено, можно было съ большимъ трудомъ открыть литій въ остаткѣ отъ обработки 50 *gr* мѣди, но совершенно нельзя было обнаружить его присутствіе въ остаткѣ отъ обработки 2 *gr* соли мѣди. Эманація получалась изъ раствора, содержащаго 0,19 *gr* радія (0,25 *gr* $RaCl_2$). Она затѣмъ была сгущена въ змѣевикѣ, погруженномъ въ жидкій воздухъ, оттуда переведена въ приборъ для опыта. Чтобы знать точно количество введенной эманаціи, мы измѣряли проникающее черезъ аппаратъ лучеиспусканіе посредствомъ сравненія съ таковымъ отъ ампульки, содержащей опредѣленное количество радія. Для этой цѣли примѣняли спеціально устроенный плоскій конденсаторъ большого размѣра. Было произведено два совершенно аналогичныхъ опыта. Въ приборъ вводилось 7 cm^3 раствора чистой сѣрнокислой мѣди. Эта жидкость въ приборѣ имѣла большую свободную поверхность сравнительно съ ея объемомъ. Приборъ запаивался. Эманація радія была введена въ нѣсколько пріемовъ. Чтобы усилить ея раствореніе, взбалтывали растворъ, наклоняя приборъ, помѣщенный въ тающемъ льдѣ. Эту операцію мы часто повторяли. Вѣсъ употребленной металлической мѣди былъ 0,26 *gr* и 0,14 *gr*. Количество всей введенной эманаціи было измѣрено въ двухъ случаяхъ по сравненію съ эманаціей, поглощенной 0,37 *gr Ra*. Количество эманаціи, которая разложилась на самомъ дѣлѣ въ приборѣ, было немного меньше. Оно измѣрялось количествомъ эманаціи, поглощенной 0,27 *gr Ra*. Когда опытъ былъ признанъ законченнымъ, жидкость перенесли изъ прибора въ платиновый тигель и прибавили нѣсколько капель азотной кислоты. Въ этотъ самый тигель провели платиновый электродъ, на который токомъ отложили металлическую мѣдь. Растворъ, лишенный мѣди, выпарили до суха и достаточно нагрѣли для удаленія сѣрной кислоты. Сухой остатокъ былъ растворенъ въ нѣсколькихъ капляхъ воды и обработанъ сѣроводородомъ, чтобы извлечь еще оставшіеся слѣды мѣди. Жидкость, отфильтрованная посредствомъ маленькой платиновой воронки, была собрана въ маленькой платиновой крышкѣ извѣстнаго вѣса и выпарена до суха при очень умѣренной температурѣ. Очень малый остатокъ былъ взвѣшенъ. Той же обработкѣ было подвергнуто 7 cm^3 раствора той же сѣрнокислой мѣди, которая не была подвергнута дѣйствію эманаціи радія. Остатки, полученные въ результатѣ опытовъ, были изслѣдованы посредствомъ спектроскопа. Вѣса ихъ были: 0,0004 *gr* и 0,0005 *gr* для главныхъ опытовъ, 0,0003 *gr* и 0,0002 *gr* для провѣрочныхъ (безъ эманаціи радія).

Можно замѣтить, что количество употребленной мѣди близко къ таковому же, употребленному Р а м с а е м ъ. Количество употребленной эманаціи приблизительно то же (1,85 mm^3 эманаціи, согласно исчисленію Р а м с а я). Во всѣхъ случаяхъ сухой остатокъ, полученный въ результатѣ опыта значительно меньше. Спектроскопическое изслѣдованіе показало, что этотъ остатокъ содержитъ, главнымъ образомъ, натрій и немного калія, присутствіе литія не было обнаружено. Опытъ, произведенный со смѣсью сѣрнокислыхъ натрія и литія, показалъ, что можно, хотя и съ большимъ трудомъ, доказать присутствіе красной полосы литія при содержаніи въ смѣси 1 ч. Li_2SO_4 на 10000 частей Na_2SO_4, и что легко замѣтить ту же полосу при содержаніи 1 ч. Li_2SO_4 на 3000 частей Na_2SO_4.

Слѣдовательно, количество металла литія, которое могло бы быть на лицо, было меньше, чѣмъ $0{,}6 \cdot 10^{-5}\,mg$. Съ тѣми же самыми количествами мѣди и эманаціи Рамсай и Камеронъ указываютъ въ своихъ опытахъ на присутствіе $1{,}7 \cdot 10^{-4}\,mg$ литія. Если, вслѣдствіе ошибки въ редакціи, это число даетъ количество хлористаго литія, то все же количество металлическаго литія было бы равно $3{,}10^{-5}\,mg$.

Остатокъ, который мы получили во всѣхъ случаяхъ, меньше, чѣмъ полученный Рамсаемъ и Камерономъ, и это, вѣроятно, происходитъ благодаря употребленію стекла. Разница въ вѣсѣ остатковъ, полученныхъ нами въ главныхъ и провѣрочныхъ опытахъ, очень мала (отъ $0{,}1\,mg$—$0{,}3\,mg$). Она, вѣроятно, объясняется тѣмъ, что въ опытѣ съ эманаціей введеніе послѣдней можетъ повести къ прибавленію слѣдовъ посторонняго вещества. Въ наиболѣе совершенномъ опытѣ Рамсая и Камерона эта самая разница была равна $0{,}88\,mg$, и мы думаемъ, что она можетъ быть приписана болѣе энергичному дѣйствію раствора на стекло въ присутствіи эманаціи. Былъ произведенъ слѣдующій провѣрочный опытъ.

Въ растворъ сѣрнокислой мѣди, содержащій $0{,}27\,gr$ метталической мѣди, мы вводили количество сѣрнокислаго литія, отвѣчающаго $1{,}7 \cdot 10^{-4}\,gr$ $LiCl$. Этотъ растворъ былъ далѣе обработанъ по методу вышеописанныхъ опытовъ. Въ полученномъ въ результатѣ опыта остаткѣ можно было легко замѣтить красную полосу литія, что доказываетъ, что литій не могъ быть потерянъ во время хода обработки.

Въ заключеніе мы должны сказать, что не можемъ подтвердить опытовъ Рамсая и Камерона. Ни въ коемъ случаѣ нельзя утверждать, что во время опыта не образовалось никакихъ слѣдовъ натрія или литія; мы все же думаемъ, что фактъ образованія этихъ элементовъ не можетъ считаться установленнымъ.

Къ теоріи прямыхъ Чевы въ треугольникѣ*).

В. Шлыгина.

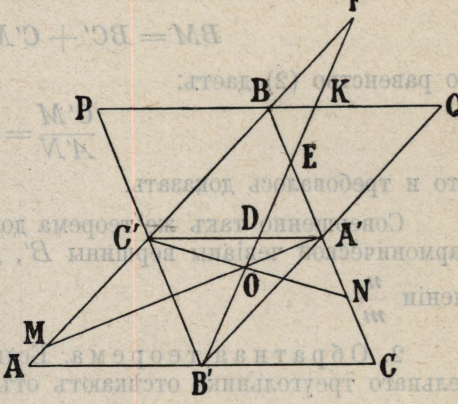
1. Теорема. Прямыя Чевы вершинъ A' и C' дополнительнаго треугольника $A'B'C'$, пересѣкающіяся на какой-либо изъ гармонически сопряженныхъ чевіанъ (внутренней или внѣшней) вершины B' этого треугольника, дѣлящихъ сторону $C'A'$ въ отношеніи $\frac{n}{m}$, отсѣкаютъ отъ сторонъ AB и BC даннаго треугольника, считая отъ точекъ C' и A', отрѣзки, отношеніе которыхъ равно $\frac{cn}{am}$.

---

*) См. № № 433 и 434 „Вѣстника“.

Пусть имѣемъ треугольникъ ABC (фиг. 1) со сторонами $AB=2c$, $BC=2a$ и $AC=2b$ и дополнительный треугольникъ $A'B'C'$, въ которомъ чевіана $B'D$ дѣлитъ сторону $C'A'$ въ отношеніи $\dfrac{C'D}{A'D}=\dfrac{n}{m}$, а чевіаны $A'M$ и $C'N$ пересѣкаются въ точкѣ O, принадлежащей чевіанѣ $B'D$. Докажемъ, что

$$\frac{C'M}{A'N}=\frac{cn}{am}.$$



Фиг. 1.

Черезъ вершину B проведемъ прямую $PQ \parallel AC$ до встрѣчи со сторонами $B'C'$ и $B'A'$ соотвѣтственно въ точкахъ P и Q. Пусть чевіана $B'D$ пересѣкается съ прямыми BC, PQ и AB соотвѣтственно въ точкахъ E, K и F. Изъ $\triangle\triangle$ $BA'C'$ и PBC', пересѣченныхъ трансверсалью $B'F$, по теоремѣ Менелая, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} A'E\,.\,BF\,.\,C'D &= BE\,.\,C'F\,.\,A'D, \\ PK\,.\,BF\,.\,C'B' &= BK\,.\,C'F\,.\,PB'. \end{aligned} \qquad (1)$$

Такъ какъ

$$BF=C'F-C'B=C'F-c,\quad C'D=\frac{bn}{m+n},$$

$$BE=A'B-A'E=a-A'E,\quad A'D=\frac{bm}{m+n},\quad PK=\frac{2bn}{m+n},$$

$$BK=PK-PB=\frac{2bn}{m+n}-b,\quad C'B'=a,\quad PB'=BC=2a,$$

то изъ равенствъ (1) находимъ:

$$A'E=\frac{ma}{n};\quad C'F=\frac{nc}{m}.$$

Примѣняя теорему Менелая къ треугольнику BEF, пересѣченному трансверсалями $C'ON$ и $A'OM$, получимъ:

$$BC'\,.\,FO\,.\,EN=FC'\,.\,EO\,.\,BN,$$

$$BA'\,.\,EO\,.\,FM=EA'\,.\,FO\,.\,BM.$$

Перемноживъ эти равенства, будемъ имѣть:

$$BC'\,.\,BA'\,.\,EN\,.\,FM=FC'\,.\,EA'\,.\,BN\,.\,BM. \qquad (2)$$

Такъ какъ

$$BC'=c,\ BA'=a,\ EN=A'E+A'N=\frac{ma}{n}+A'N,$$

$$FM=C'F+C'M=\frac{nc}{m}+C'M,\ BN=BA'+A'N=a+A'N,$$

$$BM=BC'+C'M=c+C'M,$$

то равенство (2) даетъ:

$$\frac{C'M}{A'N}=\frac{cn}{am},$$

что и требовалось доказать.

Совершенно такъ же теорема доказывается и для случая внѣшней гармонической чевіаны вершины B', дѣлящей сторону $C'A'$ въ отношеніи $\frac{n}{m}$.

2. Обратная теорема. Если чевіаны $A'M$ и $C'N$ дополнительнаго треугольника отсѣкаютъ отъ сторонъ AB и BC даннаго треугольника отрѣзки $C'M$ и $A'N$, находящіеся въ отношеніи $\frac{p}{q}$, то онѣ пересѣкаются на чевіанѣ вершины B', дѣлящей сторону $C'A'$ въ отношеніи $\frac{n}{m}=\frac{pa}{qc}$.

Дѣйствительно, проведя черезъ точку пересѣченія O чевіанъ $A'M$ и $C'N$, чевіану $B'OD$ и предположивъ:

$$\frac{C'D}{A'D}=\frac{pa}{qc}+\alpha,$$

гдѣ α не равно нулю, будемъ имѣть на основаніи прямой теоремы:

$$\frac{C'M}{A'N}=\frac{c}{a}\left(\frac{pa}{qc}+\alpha\right)=\frac{p}{q},$$

откуда $\alpha=0$, что противно допущенію: $\alpha \neq 0$. Слѣдовательно,

$$\frac{C'D}{A'D}=\frac{pa}{qc}.$$

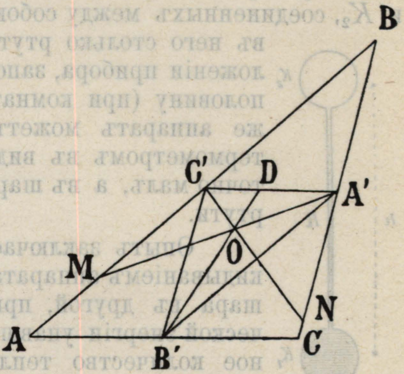
3. Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи.

a) Пусть $\frac{n}{m}=1$, т. е. разсматриваемая чевіана есть медіана стороны $C'A'$ Тогда $\frac{C'M}{A'N}=\frac{c}{a}$. Это значитъ, что чевіаны вершинъ A' и C' дополнительнаго треугольника, пересѣкающіяся на медіанѣ стороны $C'A'$, отсѣкаютъ на сторонахъ AB и BC даннаго треугольника, считая отъ C' и A', отрѣзки прямо пропорціональные этимъ сторонамъ.

b) Пусть $\frac{n}{m}=\frac{a}{c}$, т. е. разсматриваемая чевіана есть биссектрисса угла B'. Тогда имѣемъ:

$$\frac{C'M}{A'M}=1, \text{ или } C'M=A'N.$$

Такимъ образомъ, чевіаны вершинъ A' и C' дополнительнаго треугольника, пересѣкаясь на биссектриссѣ угла B' (внутренней или внѣшней), отсѣкаютъ на сторонахъ AB и BC даннаго треугольника, считая отъ ихъ срединъ, равные отрѣзки.



Фиг. 2.

Пусть $A'M$ и $C'N$ суть биссектриссы внутреннихъ угловъ A' и C' дополнительнаго треугольника $A'B'C'$ (фиг. 2), пересѣкающіяся на биссектриссѣ $B'OD$, т. е. въ центрѣ O круга, вписаннаго въ дополнительный треугольникъ, служащемъ, какъ извѣстно, центромъ тяжести периметра треугольника ABC. Треугольники $C'MA'$ и $A'NC'$ равнобедренные, ибо

$$\angle C'M'A'=2d-\angle\frac{A'}{2}-\angle A'C'M=\angle\frac{A}{2}=\angle C'A'M,$$

$$\angle A'N'C'=2d-\angle\frac{C'}{2}-\angle C'A'N=\angle\frac{A}{2}=\angle A'C'N.$$

Слѣдовательно,

$$C'M=A'N=C'A'=\frac{AC}{2}\cdot$$

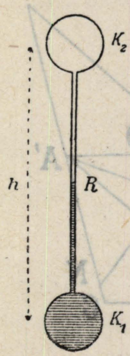
Отсюда вытекаетъ слѣдующее простое правило для построенія центра тяжести периметра треугольника ABC: отъ срединъ A' и C' сторонъ BC и AB нужно отложить отрѣзокъ $A'N=C'M=\frac{AC}{2}$ и соединить точки A' и M, C' и N; точка O пересѣченія прямыхъ $A'M$ и $C'N$ есть искомый центръ тяжести периметра треугольника ABC.

c) Пусть $\frac{n}{m}=\frac{a^2}{c^2}$, т. е. данная чевіана есть симедіана стороны $C'A'$. Тогда $\frac{C'M}{A'N}=\frac{a}{c}$, т. е. чевіаны вершинъ A' и C' дополнительнаго треугольника, пересѣкающіяся на симедіанѣ стороны $C'A'$, отсѣкаютъ отъ сторонъ AB и BC даннаго треугольника, считая отъ ихъ срединъ, отрѣзки, обратно пропорціональные этимъ сторонамъ.

Опыты и приборы.

Демонстраціонный аппаратъ для опредѣленія механическаго эквивалента тепла. Очень простой и демонстративный приборъ предложенъ Канномъ (Phys. Zeitschr.) для опредѣленія механическаго эквивалента тепла.

Приборъ состоитъ изъ двухъ одинаковаго діаметра шаровъ K_1 и K_2, соединенныхъ между собою капиллярной трубкой R. Если налить въ него столько ртути, чтобы она, при вертикальномъ положеніи прибора, заполняла нижній шаръ и, приблизительно, половину (при комнатной температурѣ) трубки R, то этотъ же аппаратъ можетъ служить довольно чувствительнымъ термометромъ въ виду того, что діаметръ капилляра достаточно малъ, а въ шарѣ содержится значительное количество ртути.



Опытъ заключается въ томъ, что многократнымъ перекидываніемъ аппарата заставляютъ ртуть падать изъ одного шара въ другой, при чемъ на мѣсто исчезнувшей механической энергіи упавшей массы ртути появляется эквивалентное количество тепловой энергіи, вслѣдствіе чего эта же масса ртути нагрѣвается, о чемъ можно заключить по болѣе высокому стоянію конца ртутнаго столбика въ капиллярѣ. Если нанести на трубкѣ R температурную шкалу, сравнивъ температурныя показанія аппарата съ показаніями термометра, можно знать, не пользуясь особымъ термометромъ, появившееся повышеніе температуры.

Расчетъ, на основаніи котораго выводится изъ этого опыта механическій эквивалентъ тепла, который обозначимъ черезъ A, здѣсь очень простъ. Если разстояніе между центрами шаровъ равно h *см*, масса ртути M *гр*, ускореніе силы тяжести въ мѣстѣ наблюденія $g\,\frac{см}{сек^2}$, а, слѣдовательно, вѣсъ ртути $M.g$ *динъ*, теплоемкость ртути c, число перекидываній $2n$ (необходимо четное число перекидываній, ибо, если аппаратъ не будетъ приведенъ въ первоначальное положеніе, имъ нельзя воспользоваться въ качествѣ термометра), наконецъ, явившееся повышеніе температуры t^0, то, пренебрегая массой ртути въ капиллярѣ, а также нагрѣваніемъ стекла, мы можемъ написать:

$$A\,.\,M\,.\,c\,.\,t = 2n\,.\,Mg\,.\,h; \qquad (1)$$

откуда

$$A = \frac{2n\,.\,g\,.\,h}{c\,.\,t}. \qquad (2)$$

Что касается конструктивныхъ особенностей аппарата, то надо стремиться къ тому, чтобы термометрическія показанія были возможно болѣе рѣзки, чтобы въ аппаратѣ было побольше ртути, дабы можно было во время демонстраціи пренебречь стекломъ, но съ другой стороны, чтобы перетеканіе ртути изъ одного шара въ другой длилось не очень долго.

Авторъ рекомендуетъ слѣдующіе размѣры: радіусъ шаровъ 2,8 *см*, разстояніе между ихъ центрами 50 *см*.

Сравнительно небольшого числа перекидываній оказывается достаточнымъ, чтобы вызвать замѣтное повышеніе температуры и отсюда съ точностью, достаточной для цѣлей демонстраціи, опредѣлить A.

Аппаратъ этотъ могъ бы служить и для болѣе точныхъ опредѣленій. Для этого надо принять во вниманіе, главнымъ образомъ, нагрѣваніе стекла (въ лѣвой части равенства (1) явится новый членъ, а потому A по (2) будетъ зависѣть и отъ M), а также потерю тепла, за время опыта, всѣмъ аппаратомъ.

Учрежденіе преміи имени Вольфскеля.

ОБЪЯВЛЕНІЕ.

Согласно духовному завѣщанію, оставленному на наше имя покойнымъ докторомъ Павломъ Вольфскелемъ въ Дармштадтѣ, симъ объявляется премія въ 100 000 марокъ (сто тысячъ марокъ) тому лицу, которому раньше всѣхъ удастся найти доказательство „великой теоремы Фермата“. Д-ръ Вольфскель обращаетъ вниманіе на то, что Ферматъ (см., напримѣръ, Oevres de Fermat, Paris, 1891, т. I, стр. 291, observ. II) высказалъ утвержденіе, которое mutatis mutandis гласитъ, что уравненіе $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній для всѣхъ нечетныхъ простыхъ показателей λ. Теорема Фермата должна быть доказана либо въ самой общей формѣ, указанной Ферматомъ, либо въ формѣ дополненія къ изслѣдованіямъ Куммера (Crelles Journal, 40, стр. 130 и сл., Abh. der Akad. d. Wiss. въ Берлинѣ, 1857), но во всякомъ случаѣ для всѣхъ тѣхъ показателей λ, для которыхъ теорема вообще имѣетъ мѣсто. Относительно дальнѣйшей литературы можно найти указанія въ слѣд. сочиненіяхъ: Hilbert, Theorie der algebraichen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, IV (1894—95), §, 172—173, и Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 1 Teil 2, Arithmetik und Algebra (1900—1904), I, C, 4, b, стр. 713.

Премія учреждается на слѣдующихъ условіяхъ:

Королевскому Ученому Обществу*) въ Гёттингенѣ принадлежитъ право свободно рѣшить, кому должна быть присуждена премія. Никакихъ рукописей, имѣющихъ отношеніе къ соисканію преміи о великой теоремѣ Фермата, оно не допускаетъ; для присужденія преміи оно принимаетъ только такія математическія сочиненія, которыя появились въ періодическихъ изданіяхъ, въ видѣ монографій, или изданы отдѣльными книгами, находящимися въ продажѣ въ книжныхъ магазинахъ. Общество предлагаетъ авторамъ подобныхъ сочиненій прислать ему 5 печатныхъ экземпляровъ.

---

*) Гёттингенская академія наукъ.

При присужденіи преміи будутъ оставлены безъ вниманія тѣ работы, которыя напечатаны на языкѣ, непонятномъ для ученыхъ — спеціалистовъ, призванныхъ для разсмотрѣнія работъ. Вмѣсто такихъ работъ могутъ быть представлены авторами точные ихъ переводы.

Общество не принимаетъ на себя отвѣтственности за неразсмотрѣніе работъ, о которыхъ оно не было поставлено въ извѣстность, а равнымъ образомъ за тѣ недоразумѣнія, которыя могли бы возникнуть изъ - за того, что истинный авторъ работы, или нѣкоторой части ея, остался обществу неизвѣстнымъ.

Въ случаѣ, если въ рѣшеніи задачи принимали участіе нѣсколько лицъ, или же если оно осуществлено благодаря работамъ многихъ ученыхъ, то Общество оставляетъ за собою полнѣйшую свободу въ присужденіи преміи, а также и въ распредѣленіи ея по своему усмотрѣнію.

Присужденіе преміи Обществомъ послѣдуетъ не ранѣе 2 лѣтъ послѣ выхода въ свѣтъ достойнаго преміи сочиненія. Въ этотъ періодъ времени будетъ предоставлена возможность нѣмецкимъ и заграничнымъ математикамъ высказаться по поводу правильности опубликованнаго рѣшенія.

По присужденіи преміи предсѣдательствующій секретарь отъ имени Общества извѣститъ лицо, удостоенное преміи, и опубликуетъ объ этомъ во всѣхъ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ въ текущемъ году было объявлено о преміи. Актъ о присужденіи Обществомъ преміи неоспоримъ.

Выдача преміи послѣдуетъ въ теченіе 3-хъ мѣсяцевъ послѣ ея присужденія либо черезъ Королевскую Университетскую Кассу въ Гёттингенѣ, либо, на счетъ получателя, въ другомъ, имъ же указанномъ, мѣстѣ; именно: по усмотрѣнію Общества, завѣщанный капиталъ будетъ уплаченъ либо наличными деньгами, либо положенными для этой цѣли на храненіе цѣнными бумагами, подъ надлежащую расписку. Уплата преміи цѣнными бумагами можетъ послѣдовать и тогда, если ихъ курсовая цѣнность не достигнетъ суммы въ 100000 марокъ.

Если премія къ 13 сентября 2007 года не будетъ присуждена, то никакихъ притязаній на нее впредь не можетъ быть предъявлено.

Учрежденіе преміи имени Вольфскеля на изложенныхъ условіяхъ вступаетъ въ силу съ нижеозначеннаго числа.

Гёттингенъ,
27-го іюня 1908 г.

Королевское Ученое Общество.

ПРИМѢЧАНІЯ.

Со времени опубликованія завѣщанія Вольфскеля въ Гёттингенское Ученое Общество поступило уже нѣсколько сотъ такъ называемыхъ доказательствъ теоремы Фермата, и можно ожидать, что, съ послѣдовавшимъ теперь офиціальнымъ объявленіемъ о преміи, число ихъ значительно возрастетъ. При этомъ число дѣйствительныхъ математиковъ, принявшихъ участіе въ соисканіи, относительно незначительно: инженеры, директора банковъ, учащіеся обоего пола, гимназисты, пасторы и учителя присылаютъ наибольшее число рѣшеній.

Характерно и то, что до сихъ поръ ни одинъ изъ конкуррентовъ не вступилъ, для цѣли доказательства теоремы, на путь трудныхъ изслѣдованій, основанныхъ на теоріи чиселъ, — путь, который во всякомъ случаѣ имѣлъ въ виду Вольфскель въ своемъ завѣщаніи, и на который ясно указываетъ Общество Наукъ въ своемъ объявленіи. А между тѣмъ все значеніе теоремы Фермата заключается въ ея связи съ ученіемъ о разложеніи на множителей алгебраическихъ чиселъ. Очевидно, желаніе выиграть 100000 марокъ гораздо болѣе распространено, чѣмъ пониманіе весьма глубокихъ соотношеній въ области современной математики.

При такомъ исключительномъ положеніи дѣла, очевидно, невозможно, — а въ большинствѣ случаевъ и совсѣмъ безполезно, — чтобы Гёттингенское Ученое Общество вступало въ корреспонденцію съ отдѣльными лицами, присылающими рѣшенія, и даже обращало ихъ вниманіе на неправильность допущенныхъ ими соображеній. Общество можетъ стоять только на той точкѣ зрѣнія, которая указана имъ въ объявленіи о преміи, а именно, оно выступаетъ только тогда, если доставленное ему доказательство теоремы Фермата окажется, по его мнѣнію, дѣйствительно правильнымъ. Пока Общество молчитъ, до тѣхъ поръ, значитъ, правильнаго доказательства, по его мнѣнію, еще не предложено. Контроль же о правильности его дѣйствій въ отношеніи предлагаемыхъ работъ основанъ на требуемомъ въ объявленіи представленіи печатныхъ работъ и на опубликованіи всѣхъ конкуррирующихъ сочиненій, что дастъ возможность ученому міру какъ настоящаго, такъ и будущаго времени составить себѣ самостоятельное сужденіе о каждомъ отдѣльномъ случаѣ.

Между тѣмъ лица, присылающія рѣшенія, отчасти, какъ кажется, недовольны такой постановкой дѣла. Въ виду близкой связи, существующей между членами Гёттингенскаго Ученаго Общества и редакціей математическаго журнала „Annalen", соискатели обращаются къ послѣдней съ просьбой о вторичномъ оттискѣ ихъ работъ. Но, вѣдь, тогда Общество вынуждено высказать свое мнѣніе объ отдѣльныхъ отвергнутыхъ имъ работахъ! Между тѣмъ редакція журнала „Annalen" не можетъ удовлетворять подобныхъ обращенныхъ къ ней просьбъ. Ибо, если бы она даже хотѣла употребить на это время, необходимое ей для удовлетворенія запросовъ во все болѣе и болѣе умножающихся случаяхъ, то она въ данномъ вопросѣ не можетъ составить особой инстанціи при Гёттингенскомъ Ученомъ Обществѣ. Итакъ, редакція математическаго журнала „Annalen" должна заявить, что она отклоняетъ всякое самостоятельное мнѣніе по поводу отношенія ея къ присылаемымъ доказательствамъ теоремы Фермата.

Ф. Клейнъ.

РЕЦЕНЗІИ.

Концентрическій учебникъ физики для среднихъ учебныхъ заведеній. Проф. **I. I. Косоногова.** Кіевъ. 1908 г. Цѣна 2 р. 25 к.

Вопросъ о томъ, какъ болѣе цѣлесообразно проходить курсъ физики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, по радіальному или же по концентрическому методу, одно время живо обсуждался въ педагогическихъ сферахъ. Нынче, послѣ нѣкотораго затишья, вопросъ этотъ вновь поднятъ, съ тою лишь разницей, что изъ области однихъ разговоровъ мы переходимъ теперь на болѣе дѣйствительную почву. Мы не думаемъ повторять здѣсь всѣ тѣ доводы, которые приводились въ пользу концентрическаго прохожденія курса физики сторонниками его*). Замѣтимъ лишь, что, если этотъ методъ признается плодотворнымъ въ отношеніи какого бы то ни было предмета въ низшей и средней школѣ, гдѣ развитіе учащихся такъ быстро мѣняется съ каждымъ годомъ, то при изученіи физики, думается намъ, онъ прямо необходимъ. Если не ознакомить ученика, въ первый же годъ изученія имъ физики, съ основными физическими явленіями, если не дать ему общей картины явленій окружающаго его физическаго міра, съ тѣмъ, чтобы далѣе расширять и углублять эту картину, а заставить его учить одинъ „отдѣлъ" за другимъ, растянувши это изученіе на три года, то легко можетъ произойти то, что очень часто и наблюдается преподавателями физики: ученики мало-по-малу теряютъ тотъ интересъ, съ которымъ они обыкновенно приступаютъ къ изученію физики, и, проходя разные „отдѣлы" физики безъ всякой внутренней связи, они начинаютъ смотрѣть различными глазами на явленія, происходящія въ „физическомъ кабинетѣ" и въ окружающей природѣ.

На пути къ разрѣшенію вопроса, какъ же лучше преподавать физику въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, появленіе концентрическаго учебника физики, написаннаго столь солиднымъ авторомъ, какъ проф. І. І. Косоноговъ, является, несомнѣнно, крупнымъ шагомъ впередъ.

Весь матеріалъ физики разбитъ авторомъ на три концентра, соотвѣтственно тремъ годамъ, посвященнымъ, обыкновенно, изученію физики въ средней школѣ. Въ основу распредѣленія матеріала положенъ принципъ „постепенности нарастанія механическихъ представленій въ объясненіи явленій". Нельзя не признать, что авторъ сталъ на вполнѣ естественную, а потому и правильную точку зрѣнія,—пожалуй, единственно правильную, если предъявить къ учебнику требованіе, чтобы между отдѣльными частями курса существовала тѣсная внутренняя связь.

Курсъ перваго года содержитъ въ себѣ предварительныя физическія понятія и тѣ основныя свѣдѣнія изъ области тепловыхъ, свѣтовыхъ, звуковыхъ, магнитныхъ и электрическихъ явленій, для уразумѣнія которыхъ учащіеся не нуждаются въ болѣе широкихъ механическихъ представленіяхъ, чѣмъ какія у нихъ есть до изученія физики, и для описанія которыхъ у учащихся имѣются достаточныя математическія познанія.

Второй годъ начинается съ болѣе или менѣе основательнаго изложенія основъ механики. Сюда же отнесено все ученіе о жидкостяхъ, газахъ и молекулярныхъ явленіяхъ. Изъ остальныхъ отдѣловъ—свѣдѣнія, расширяющія кругъ знаній, полученныхъ въ первый годъ.

Къ третьему году отнесено ученіе о работѣ и энергіи и тѣ тепловыя, свѣтовыя, звуковыя и электрически-магнитныя явленія, которыя удобно изучать съ точекъ зрѣнія законовъ энергіи. Здѣсь же глава, посвященная основамъ физической оптики.

Книга, кромѣ того, снабжена прибавленіями, содержащими свѣдѣнія изъ химіи, физической географіи, а также изъ области интересующихъ нынѣ всѣхъ радіоактивныхъ явленій.

Этотъ краткій и сухой перечень содержанія книги не можетъ, конечно, дать представленіе о достоинствахъ ея, какъ концентрическаго учебника, ибо при этомъ дѣло идетъ не только о томъ или иномъ распредѣленіи матеріала, но и, въ значительной мѣрѣ, о томъ, какъ обработанъ этотъ матеріалъ, какъ сдѣланы необходимые при этомъ нюансы. Работа тутъ трудная и тонкая, тѣмъ болѣе трудная, что нигдѣ еще физика не преподавалась и не преподается по концентрическому методу, и потому отсутствуютъ въ этомъ отношеніи непосредственныя указанія опыта, тѣ выводы, которые диктуются практикой, и которыя напередъ бываетъ трудно предвидѣть. Неудивительно, поэтому, что строгій къ себѣ авторъ, закончивъ свой трудъ, нашелъ, что онъ кое-что измѣнилъ бы въ немъ. Но эти измѣненія могли бы быть основаны только на дан-

*) Среди послѣднихъ былъ и покойный нынѣ проф. Ѳ. Н. Шведовъ.

ныхъ опыта концентрическаго изученія физики. Во всякомъ случаѣ, читая эту книгу, настолько поддаешься обаянію планомѣрнаго развитія положенной въ ея основу идеи, что какъ-то и не видишь покамѣстъ надобности въ существенныхъ измѣненіяхъ. Но не тѣмъ только исчерпывается значеніе „концентрическаго учебника", что теперь воочію показана возможность и цѣлесообразность концентрическаго изученія физики въ средней школѣ. Большія достоинства въ отношеніи обработки матеріала, какими изобилуетъ „учебникъ", заставляетъ признать, что русская учебная литература обогатилась цѣннымъ вкладомъ. Читатель, измученный тѣми большими и малыми ошибками, неясностями, неточностями, подчасъ недоразумѣніями, которыми такъ пестрятъ многіе изъ общепринятыхъ у насъ элементарныхъ учебниковъ физики (въ особенности въ нѣкоторыхъ отдѣлахъ, каковы механика, свѣтъ, электричество), съ чувствомъ удовлетворенія прочтетъ книгу проф. Косоногова, гдѣ знаніе и педагогическій опытъ соединились, чтобы дать точное, немногословное, изящное и законченное изложеніе элементарнаго курса физики. Преподаватель физики, не знающій подчасъ, какъ подступиться къ тѣмъ или инымъ тонкимъ вопросамъ, почерпнетъ отсюда много полезнаго для себя. И если „концентрическій учебникъ" не будетъ допущенъ въ нашу школу только потому, что не написанъ соотвѣтственно нынѣшнимъ программамъ (хотя, замѣтимъ, пользуясь этимъ учебникомъ, можно проходить курсъ и по дѣйствующимъ планамъ), то можно пожелать этой прекрасной книгѣ, написанной знатокомъ своего дѣла, широкаго распространенія среди лицъ, интересующихся постановкой преподаванія физики.—Книга издана хорошо. Цѣна отнюдь не высока.

К. И.

Рѣшенія задачи на премію № 1.

Выраженіе

$$\left\{1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\cdots+\frac{x^{4n}}{1.2\ldots(4n)}\right\}^2+$$
$$+\left\{x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots+\frac{x^{4n+1}}{1.2\ldots(4n+1)}\right\}^2-1 \qquad (1)$$

разложено по возрастающимъ степенямъ x. *Опредѣлить первый членъ, котораго коэффиціентъ отличенъ отъ нуля.*

Премированныя рѣшенія.

I. Рѣшеніе Г. Фихтенгольца.

Разложеніе выраженія (1) не содержитъ нечетныхъ степеней x; свободный членъ въ немъ равенъ нулю. Обозначимъ черезъ B_n^{2k} ($k=1, 2, 3, 4, \ldots$) коэффиціентъ того члена въ упомянутомъ разложеніи, который содержитъ x^{2k}. Намъ предстоитъ обнаружить, что если

$$k \leqslant 2n, \qquad (2)$$

то

$$B_n^{2k}=0. \qquad (3)$$

Всѣ члены выраженія (1), содержащіе x^{2k}, коль скоро $k \leqslant 2n$ ($2k \leqslant 4n$), исчерпываются произведеніями слѣдующихъ двухъ типовъ*):

*) Мы полагаемъ (какъ это дѣлается обыкновенно): $0!=1$, $C_t^0=1$.

$$(-1)^p \frac{x^{2p}}{2p!} \cdot (-1)^{k-p} \frac{x^{2(k-p)}}{(2k-2p)!} = (-1)^k \frac{1}{2p!\,(2k-2p)!} x^{2k} \; (p=0,1,2,\ldots,k),$$

$$(-1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!} \cdot (-1)^{k-r-1} \frac{x^{2(k-r-1)+1}}{(2k-2r-1)!} =$$

$$= (-1)^{k-1} \frac{1}{(2r+1)!\,(2k-2r-1)!} x^{2k} \; (r=0,1,2,\ldots,k-1).$$

Такимъ образомъ:

$$B_n^{2k} = (-1)^k \sum_{s=0}^{s=2k} (-1)^s \frac{1}{s!\,(2k-s)!} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2k!} \sum_{s=0}^{s=2k} (-1)^s \frac{2k!}{s!\,(2k-s)!} = \frac{(-1)^k}{2k!} \sum_{s=0}^{s=2k} (-1)^s C_{2k}^s = 0$$

(по извѣстному свойству коэффиціентовъ бинома).

Изъ соотношеній (2), (3) слѣдуетъ, что для $k=1,\ 2,\ 3, \ldots, 2n$

$$B_n^{2k} = 0,$$

т. е. коэффиціенты членовъ разсматриваемаго разложенія, содержащихъ $x^2,\ x^4,\ x^6, \ldots, x^{4n}$, исчезаютъ.

Для $k = 2n+1$ соотношеніе (2) не выполняется, но имѣетъ мѣсто неравенство

$$2n+1 < 2(n+1),$$

откуда (по аналогіи съ соотношеніями (2), (3) и въ виду произвольности n) заключаемъ, что

$$B_{n+1}^{4n+2} = 0.$$

При увеличеніи же показателя n на единицу къ членамъ выраженія (1), содержащимъ x^{4n+2}, присоединяется лишь членъ

$$2\,.\,1\,.\,(-1)^{2n+1} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} = -\frac{2}{(4n+2)!} x^{4n+2};$$

поэтому

$$B_n^{4n+2} - \frac{2}{(4n+2)!} = B_{n+1}^{4n+2} = 0,$$

откуда

$$B_n^{4n+2} = \frac{2}{(4n+2)!}\,.$$

Итакъ, въ разложеніи выраженія (1) первымъ членомъ, коэффиціентъ котораго отличенъ отъ нуля, является членъ

$$\frac{2}{(4n+2)!} x^{4n+2}.$$

II. Рѣшеніе Дм. Ефремова.

Для возведенія въ квадратъ данныхъ многочленовъ умножимъ каждый изъ нихъ самого на себя; не дѣлая приведенія, а вынося только x въ соотвѣтственныхъ степеняхъ за скобки въ членахъ одного измѣренія, получимъ:

$$\left[1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\cdots+\frac{x^{4n}}{1.2.3\ldots(4n)}\right]^2=$$

$$=\left[1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\cdots+\frac{x^{4n}}{1.2.3\ldots(4n)}\right]\times$$

$$\times\left[1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\cdots+\frac{x^{4n}}{1.2.3\ldots(4n)}\right]=$$

$$=1-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}\right)x^2+\left(\frac{1}{4!}+\frac{1}{2!\,2!}+\frac{1}{4!}\right)x^4-$$

$$-\left(\frac{1}{6!}+\frac{1}{2!\,4!}+\frac{1}{4!\,2!}+\frac{1}{6!}\right)x^6+\cdots+\left[\frac{1}{(4n)!}+\frac{1}{2!\,(4n-2)!}+\right.$$

$$+\frac{1}{4!\,(4n-4)!}+\cdots+\frac{1}{(2n)!\,(2n)!}+\cdots+$$

$$\left.+\frac{1}{(4n-4)!\,4!}+\frac{1}{(4n-2)!\,2!}+\frac{1}{(4n)!}\right]x^{4n}-$$

$$-\left[\frac{1}{2!\,(4n)!}+\frac{1}{4!\,(4n-2)!}+\cdots+\frac{1}{(2n)!\,(2n+2)!}+\frac{1}{(2n+2)!\,(2n)!}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(4n-2)!\,4!}+\frac{1}{(4n)!\,2!}\right]x^{4n+2}+\cdots+\frac{x^{8n}}{(4n)!\,(4n)!}$$

и

$$\left[x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots+\frac{x^{4n+1}}{1.2.3\ldots(4n+1)}\right]^2=$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots+\frac{x^{4n-3}}{1.2.3\ldots(4n-3)}-\right.$$

$$\left.-\frac{x^{4n-1}}{1.2.3\ldots(4n-1)}+\frac{x^{4n+1}}{1.2.3\ldots(4n+1)}\right]\times$$

$$\times\left[x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots+\frac{x^{4n-3}}{1.2.3\ldots(4n-3)}-\right.$$

$$\left.-\frac{x^{4n-1}}{1.2.3\ldots(4n-1)}+\frac{x^{4n+1}}{1.2.3\ldots(4n+1)}\right]=$$

$$=\frac{x^2}{1!\,1!}-\left(\frac{1}{1!\,3!}+\frac{1}{3!\,1!}\right)x^4+\left(\frac{1}{1!\,5!}+\frac{1}{3!\,3!}+\frac{1}{5!\,1!}\right)x^6-\cdots-$$

$$-\left[\frac{1}{1!\,(4n-1)!}+\frac{1}{3!\,(4n-3)!}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!\,(2n+1)!}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(2n+1)!\,(2n-1)!}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)!\,3!}+\frac{1}{(4n-1)!\,1!}\right]x^{4n}+$$

$$+\left[\frac{1}{1!\,(4n+1)!}+\frac{1}{3!\,(4n-1)!}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)!\,(2n+1)!}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(4n-1)!\,3!}+\frac{1}{(4n+1)!\,1!}\right]x^{4n+2}-\cdots+\frac{x^{8n+2}}{(4n+1)!\,(4n+1)!},$$

гдѣ для краткости положено

$$1!=1,\ 2!=1\,.\,2,\ 3!=1\,.\,2\,.\,3,\ldots,k!=1\,.\,2\,.\,3\ldots k.$$

Поэтому данное выраженіе, расположенное по возрастающимъ степенямъ x, будетъ имѣть такой видъ:

$$-\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{1!\,1!}+\frac{1}{2!}\right)x^2+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{1!\,3!}+\frac{1}{2!\,2!}-\frac{1}{3!\,1!}+\frac{1}{4!}\right)x^4-\cdots+$$

$$+\left[\frac{1}{(4n)!}-\frac{1}{1!\,(4n-1)!}+\frac{1}{2!\,(4n-2)!}-\cdots+\frac{1}{(2n)!\,(2n)!}-\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(4n-2)!\,2!}-\frac{1}{(4n-1)!\,1!}+\frac{1}{(4n)!}\right]x^{4n}+$$

$$+\left[\frac{1}{1!\,(4n+1)!}-\frac{1}{2!\,(4n)!}+\frac{1}{3!\,(4n-1)!}-\cdots+\frac{1}{(2n+1)!\,(2n+1)!}-\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(4n-1)!\,3!}-\frac{1}{(4n)!\,2!}+\frac{1}{(4n+1)!\,1!}\right]x^{4n+2}-\cdots-$$

$$-\left[\frac{1}{(4n-1)!\,(4n+1)!}-\frac{1}{(4n)!\,(4n)!}+\frac{1}{(4n+1)!\,(4n-1)!}\right]x^{8n}+$$

$$+\frac{1}{(4n+1)!\,(4n+1)!}x^{8n+2}.$$

Ясно, что въ этомъ многочленѣ коэффиціенты при x, отъ x^2 до x^{4n} включительно, имѣютъ видъ:

$$\frac{1}{(4k-2)!}-\frac{1}{1!\,(4k-3)!}+\frac{1}{2!\,(4k-4)!}-\cdots+$$

$$-\frac{1}{(2k-1)!\,(2k-1)!}+\cdots-\frac{1}{(4k-3)!\,1!}+\frac{1}{(4k-2)!}$$

или

$$\frac{1}{(4k)!}-\frac{1}{1!\,(4k-1)!}+\frac{1}{2!\,(4k-2)!}-\cdots+$$

$$-\frac{1}{(2k)!\,(2k)!}+\cdots-\frac{1}{(4k-1)!\,1!}+\frac{1}{(4k)!}$$

при всѣхъ цѣлыхъ значеніяхъ k отъ 1 до n. Но

$$\frac{1}{(4k-2)!}-\frac{1}{1!\,(4k-3)!}+\frac{1}{2!\,(4k-4)!}-\ldots-\frac{1}{(2k-1)!\,(2k-1)!}+\ldots-$$

$$-\frac{1}{(4k-3)!\,1!}+\frac{1}{(4k-2)!}=\frac{1}{(4k-2)!}\left[1-\frac{4k-2}{1}+\right.$$

$$\left.+\frac{(4k-2)(4k-3)}{1\,.\,2}-\ldots-\frac{(4k-2)(4k-3)\ldots(2k)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2k-1)}+\ldots-\frac{4k-2}{1}+1\right]=0$$

и

$$\frac{1}{(4k)!}-\frac{1}{1!\,(4k-1)!}+\frac{1}{2!\,(4k-2)!}-\ldots+\frac{1}{(2k)!\,(2k)!}-\ldots-$$

$$-\frac{1}{(4k-1)!\,1!}+\frac{1}{(4k)!}=\frac{1}{(4k)!}\left[1-\frac{4k}{1}+\frac{4k\,(4k-1)}{1\,.\,2}-\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{4k(4k-1)\ldots(2k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2k)}-\ldots-\frac{4k}{1}+1\right]=0,$$

ибо здѣсь множители въ скобкахъ [] суть разности суммъ нечетныхъ и четныхъ (по мѣсту) биноміальныхъ коэффиціентовъ двухъ биномовъ съ показателями $4k-2$ и $4k$. Слѣдовательно, въ данномъ выраженіи, расположенномъ по возрастающимъ степенямъ x, члены съ x^2, x^4, $x^6,\ldots,x^{4n}$ исчезаютъ.

Для упрощенія коэффиціента при x^{4n+2} замѣтимъ, что, по предыдущему,

$$\frac{1}{(4n+2)!}-\frac{1}{1!\,(4n+1)!}+\frac{1}{2!\,(4n)!}-\ldots-\frac{1}{(2n+1)!\,(2n+1)!}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(4n)!\,2!}-\frac{1}{(4n+1)!\,1!}+\frac{1}{(4n+2)!}=$$

$$=\frac{1}{(4n+2)!}\left[1-\frac{4n+2}{1}+\frac{(4n+2)(4n+1)}{1\,.\,2}-\ldots-\right.$$

$$\left.-\frac{(4n+2)\,(4n+1)\ldots(2n+2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2n+1)!}+\ldots-\frac{4n+2}{1}+1\right]=0,$$

т. е., что

$$\frac{2}{(4n+2)!}-\left[\frac{1}{1!\,(4n+1)!}-\frac{1}{2!\,(4n)!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!\,(2n+1)!}-\ldots-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(4n)!\,2!}+\frac{1}{(4n+1)!\,1!}\right]=0;$$

отсюда находимъ, что коэффиціентъ при x^{4n+2}

$$\frac{1}{1!\,(4n+1)!}-\frac{1}{2!\,(4n)!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!\,(2n+1)!}-\ldots-$$

$$-\frac{1}{(4n)!\,2!}+\frac{1}{(4n+1)!\,1!}=\frac{2}{(4n+2)!}.$$

Итакъ, первый членъ даннаго выраженія, расположеннаго по возрастающимъ степенямъ x, есть

$$\frac{2}{1.2.3\ldots(4n+1)(4n+2)}x^{4n+2}.$$

Рѣшенія съ помощью высшей математики.

I. Рѣшеніе Г. Фихтенгольца.

Въ производной выраженія (1)

$$2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots-\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}+\frac{x^{4n}}{4n!}\right)\times$$
$$\times\left(-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}\right)+$$
$$+2\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots-\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}+\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots-\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}+\frac{x^{4n}}{4n!}\right)=$$
$$=2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{4n}}{4n!}\right)\cdot\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

наинизшимъ членомъ, коэффиціентъ котораго отличенъ отъ нуля, является, очевидно, членъ

$$\frac{2}{(4n+1)!}x^{4n+1};$$

интегрируя, возстановляемъ соотвѣтствующій членъ разложенія выраженія (1):

$$\frac{2}{(4n+2)!}x^{4n+2},$$

который и будетъ искомымъ, ибо свободный членъ выраженія (1) равенъ нулю.

II. Рѣшеніе Дм. Ефремова.

Для рѣшенія той же задачи можно также воспользоваться слѣдующими рядами, сходящимися при всякомъ x:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\cdots+\frac{x^{4n}}{1.2\ldots(4n)}-\frac{x^{4n+2}}{1.2\ldots(4n+2)}+\cdots,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots+$$
$$+\frac{x^{4n+1}}{1.2\ldots(4n+1)}-\frac{x^{4n+3}}{1.2\ldots(4n+3)}+\cdots;$$

ихъ нихъ слѣдуетъ, что

$$1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots+\frac{x^{4n}}{1.2.3\ldots(4n)}=$$

$$=\cos x+\frac{x^{4n+2}}{1.2.3\ldots(4n+2)}-\frac{x^{4n+4}}{1.2\ldots(4n+4)}+\ldots,$$

$$x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots+\frac{x^{4n+1}}{1.2.3\ldots(4n+1)}=$$

$$=\sin x+\frac{x^{4n+3}}{1.2.3\ldots(4n+3)}\ldots$$

Возведя обѣ части этихъ равенствъ въ квадратъ и сложивъ, получимъ:

$$\left[1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots+\frac{x^{4n}}{1.2\ldots(4n)}\right]^2+$$

$$+\left[x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots+\frac{x^{4n+1}}{1.2\ldots(4n+1)}\right]^2-1=$$

$$=2\left[\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}-\frac{x^{4n+4}}{(4n+4)!}+\cdots\right]\cos x+$$

$$+2\left[\frac{x^{1n+3}}{(4n+3)!}-\frac{x^{4n+5}}{(4n+5)!}+\cdots\right]\sin x+$$

$$+\left[\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}-\frac{x^{4n+4}}{(4n+4)!}+\cdots\right]^2+\left[\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}-\frac{x^{4n+5}}{(4n+5)!}+\cdots\right]^2;$$

замѣнивъ здѣсь $\cos x$ и $\sin x$ соотвѣтственными рядами, находимъ, что

$$\left[1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots+\frac{x^{4n}}{1.2.3\ldots(4n)}\right]^2+$$

$$+\left[x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots+\frac{x^{4n+1}}{1.2\ldots(4n+1)}\right]^2-1=$$

$$=2\left[\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}-\frac{x^{4n+4}}{(4n+4)!}+\cdots\right]\times\left[1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\cdots\right]+$$

$$+2\left[\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}-\frac{x^{4n+5}}{(4n+5)!}+\cdots\right]\times\left[x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots\right]+$$

$$+\left[\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}-\frac{x^{4n+4}}{(4n+4)!}+\cdots\right]^2+\left[x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots\right]^2.$$

Отсюда непосредственно видно, что первый членъ даннаго выраженія, расположеннаго по восходящимъ степенямъ x, равенъ

$$\frac{2x^{4n+2}}{1.2.3\ldots(4n+2)}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 103 (5 сер.). Въ одной плоскости даны уголъ BAC и точки D и E. Построить на прямой AB точку X такъ, чтобы прямыя XD и XE пересѣкались съ AC въ точкахъ Y и Z, удовлетворяющихъ условію XY и XZ.

И. Михайловъ (Одесса).

№ 104 (5 сер.). Доказать слѣдующій признакъ дѣлимости на 7. Отбросивъ число, составленное двумя послѣдними цифрами числа, дѣлимость котораго на 7 мы желаемъ испытать, и удвоивъ оставшееся число, прикладываемъ къ результату удвоенія отброшенное раньше число. Дѣлимость или недѣлимость полученной такимъ образомъ суммы свидѣтельствуетъ о таковыхъ же свойствахъ даннаго числа. Указанную операцію слѣдуетъ повторять до тѣхъ поръ, пока не получимъ двузначнаго числа. Вмѣсто удвоенія остающагося числа можно прибавить къ нему половину отброшеннаго въ случаѣ, если послѣднее четное.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 105 (5 сер.). Построить треугольникъ ABC, зная положенія центра тяжести G, центра O описаннаго круга и вершины B.

Н. Агрономовъ (Ревель).

№ 106 (5 сер.). Опредѣлить въ функціи сторонъ разстояніе между центромъ тяжести G площади треугольника ABC и центромъ тяжести K его периметра.

В. Шлыгинъ (Москва).

№ 107 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^3-9x^2+27x-36=0.$$

(Заимств.).

№ 108 (5 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$xy=\frac{1}{2}(x+3)(y+3)$$

или вообще уравненіе вида:

$$xy=\frac{1}{2}(x+p)(y+p),$$

гдѣ p данное простое число.

(Заимств.).

НВ

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 31 (5 сер.). *Построить треугольникъ, если на одной изъ его сторонъ даны положенія четырехъ слѣдующихъ точекъ: основанія внѣшняго биссектора, основанія внутренняго биссектора, основанія высоты и основанія медіаны.*

Пусть на основаніи BC искомаго треугольника ABC даны основанія E и F внутренняго и внѣшняго биссекторовъ AE и AF, а также основанія M и D медіаны AM и высоты AD. Опишемъ около треугольника ABC кругъ и обозначимъ центръ его черезъ O. Радіусъ круга описаннаго, проходящій черезъ M, и продолженіе биссектора AE пересѣкаются въ срединѣ S дуги, на которую опирается уголъ BAC. Замѣчая, что OS и OA равны, какъ радіусы, приходимъ къ такому построенію: на EF, какъ на діаметрѣ, строимъ полуокружность и возставляемъ изъ D перпендикуляръ къ EF до встрѣчи въ A съ дугою этой полуокружности; затѣмъ возставляемъ изъ M перпендикуляръ къ MF и продолжаемъ AE до встрѣчи съ этимъ перпендикуляромъ въ S, строимъ перпендикуляръ къ AS въ срединѣ AS и изъ точки встрѣчи O этого перпендикуляра съ MS описываемъ окружность радіусомъ OA; пусть B и C суть точки встрѣчи этой окружности съ MF; тогда ABC есть искомый треугольникъ. Для возможности рѣшенія задачи необходимо и достаточно, чтобы точки M, E, D, F были заданы на MF именно въ послѣдовательности M, D, E, F (т. е. D между M и F, а E между D и F).

С. Кудинъ (Москва); *В. Добровольскій* (Брянскъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 32 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\frac{1}{3}\sqrt{x^2+\frac{x}{2}-8,5}=\frac{63-2x^2-x}{4}.$$

Умноживъ обѣ части даннаго уравненія на 2, представляемъ его въ видѣ:

$$\frac{2}{3}\sqrt{x^2+\frac{x}{2}-8,5}=31,5-x^2-\frac{x}{2}=23-\left(x^2+\frac{x}{2}-8,5\right).$$

Такимъ образомъ, полагая

$$\sqrt{x^2+\frac{x}{2}-8,5}=y, \tag{1}$$

приводимъ разсматриваемое уравненіе къ виду:

$$\frac{2}{3}y=23-y^2,$$

откуда

$$3y^2+2y-69=0, \tag{2}$$

$$y=\frac{-1\pm4\sqrt{13}}{3}. \tag{3}$$

Изъ уравненій (1), (2) находимъ:

$$x^2+\frac{x}{2}-8,5=y^2=23-\frac{2}{3}y,\ 6x^2+3x+(4y-189)=0,$$

откуда

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-24(4y-189)}}{12},$$

или, подставляя изъ равенства (3) значенія y, получимъ:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{4577\mp128\sqrt{13}}}{12}. \tag{4}$$

Условившись подъ радикаломъ $\sqrt{x^2+\frac{x}{2}-8,5}$ подразумѣвать, какъ это обыкновенно дѣлаютъ въ элементарной алгебрѣ, его положительное значеніе, мы должны въ формулѣ (3) взять радикалъ $\sqrt{13}$ со знакомъ $+$, и тогда значенія x, отвѣчающія этому предположенію, суть [см. (4)]

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{4577 - 128\sqrt{13}}}{12}.$$

Л. Барановскій (Владивостокъ); *С. Кудинъ* (Москва); *Б. Щиголевъ* (Варшава); *В. Добровольскій* (Брянскъ).

№ 36 (5 сер.). *Доказать, что равенство*

$$\sin A \sin C = \sin B \sin D$$

есть необходимое и достаточное условіе для того, чтобы четырехугольникъ ABCD *былъ параллелограмомъ или трапеціей.*

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques spéciales*).

Въ случаѣ параллелограмма $\sin A = \sin B$, $\sin C = \sin D$, откуда $\sin A \sin C = \sin B \sin D$. Въ случаѣ трапеціи тоже $\sin A = \sin B$ и $\sin C = \sin D$ (если AB и DC непараллельны) или $\sin A = \sin D$, $\sin B = \sin C$ (если AB и DC параллельны), а потому въ обоихъ случаяхъ также $\sin A \sin C = \sin B \sin D$. Наоборотъ, если это условіе выполняется, то либо обѣ пары AB, DC и AD, BC противоположныхъ сторонъ параллельны, и тогда четыреугольникъ $ABCD$ есть параллелограммъ, либо одна изъ паръ противоположныхъ сторонъ (напримѣръ, AD и BC) пересѣкается въ нѣкоторой точкѣ O. Но тогда

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\sin B}{\sin A}, \quad \frac{OD}{OC} = \frac{\sin C}{\sin D}$$

и, согласно съ условіемъ, $\sin A \sin C = \sin B \sin D$, $\dfrac{\sin B}{\sin A} = \dfrac{\sin C}{\sin D}$, а потому $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OD}{OC}$. Слѣдовательно, стороны AB и DC параллельны, т. е. четырехугольникъ $ABCD$ есть трапеція.

С. Кудинъ (Москва).

№ 40 (5 сер.). *Построить трапецію, зная положеніе и величину одного изъ основаній, положеніе точки встрѣчи діагоналей и разстояніе отъ этой точки до одной изъ непараллельныхъ сторонъ.*

(Заимств. изъ *Supplemento al periodico di matematica*).

Пусть AD есть данное основаніе искомой трапеціи $ABCD$, O — точка встрѣчи діагоналей, p — данное разстояніе отъ точки O до стороны AB. Изъ условія задачи вытекаетъ слѣдующее построеніе: описываемъ на OA, какъ на діаметрѣ, окружность, дѣлаемъ на ней изъ O засѣчку M радіусомъ p, находимъ точку встрѣчи B прямыхъ AM и OD, а затѣмъ точку встрѣчи C прямой AO съ прямой, проведенной изъ B параллельно AD. Трапеція $ABCD$ есть искомая (если только засѣчка M выбрана такъ, чтобы точка O оказалась послѣ выполненія всего построенія внутри $ABCD$).

С Кудинъ. (Москва); *В. Добровольскій* (Брянскъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
пщется

Обложка
ищется