1906-07.

№ 421./444.

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XXXVI-го Семестра № 1-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1906.

XXXVI Сем. № 1.

Вѣстникъ Опытной Физики и элементарной математики.

№ 421.

О ЧЕВІАНАХЪ,

пересѣкающихся въ одной точкѣ треугольника.

Дм. Ефремова (Иван.-Возн.).

1. *Чевіаною* тр-ка, какъ извѣстно, называется всякая прямая, соединяющая вершины тр-ка съ какою-либо точкою противолежащей стороны его; эта точка называется *основаніемъ* чевіаны.

Положеніе и длина чевіаны, проведенной изъ даннной вершины тр-ка, опредѣляется положеніемъ ея основанія, т. е. отрѣзками, образуемыми этою точкою на сторонѣ тр-ка, или отношеніемъ этихъ отрѣзковъ.

2. Если три чевіаны тр-ка AA', BB', CC', проведенныя изъ разныхъ вершинъ его, пересѣкаются въ одной точкѣ M (фиг. 1), то отрѣзки, образуемые ими на сторонахъ тр-ка, по *теоремѣ Чевы*, удовлетворяютъ условію:

$$AB'.CA'.BC' = CB'.BA'.AC',$$

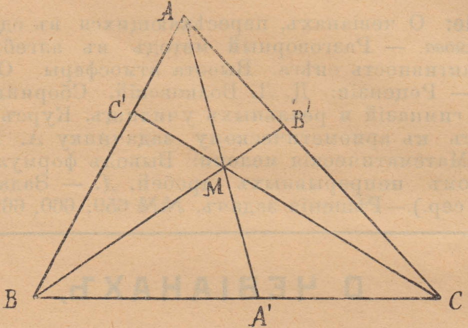
или

$$\frac{AB'}{CB'}\cdot\frac{CA'}{BA'}\cdot\frac{BC'}{AC'} = 1, \qquad (1)$$

такъ что изъ трехъ отношеній $\frac{AB'}{CB'}$, $\frac{CA'}{BA'}$, $\frac{BC'}{AC'}$ только два могутъ быть произвольно заданы, что и понятно, ибо изъ трехъ пересѣкающихся въ одной точкѣ чевіанъ тр-ка только двѣ можно взять произвольно, третья же опредѣляется точкою пересѣченія ихъ. Поэтому и отрѣзки чевіанъ, опредѣляющіеся ихъ общею точкою M, или отношенія $\frac{MA'}{AA'}$, $\frac{MB'}{BB'}$, $\frac{MC'}{CC'}$, не могутъ быть всѣ произвольны: между ними существуетъ равенство:

$$\frac{MA'}{AA'}+\frac{MB'}{BB'}+\frac{MC'}{CC'}=1, \tag{2}$$

на основаніи котораго одно изъ этихъ отношеній выражается черезъ два другія.



Фиг. 1.

3. Посмотримъ теперь, какъ выражаются отношенія отрѣзковъ чевіанъ $\frac{AM}{MA'}$, $\frac{BM}{MB'}$, $\frac{CM}{MC'}$ чрезъ отношенія отрѣзковъ сторонъ тр-ка $\frac{AB'}{CB'}$, $\frac{CA'}{BA'}$, $\frac{BC'}{AC'}$.

Положивъ для сокращенія

$$\text{пл. } ABC \equiv \triangle, \quad \text{пл. } BMC \equiv \triangle_1, \quad \text{пл. } CMA \equiv \triangle_2, \quad \text{пл } AMB \equiv \triangle_3,$$

и замѣтивъ, что

$$\frac{\triangle_1}{\triangle}=\frac{MA'}{AA'}, \quad \frac{\triangle_2}{\triangle}=\frac{MB'}{BB'}, \quad \frac{\triangle_3}{\triangle}=\frac{MC'}{CC'},$$

чрезъ дѣленіе находимъ:

$$\frac{MA'}{AA'}:\frac{MB'}{BB'}=\frac{\triangle_1}{\triangle_2}, \quad \frac{MB'}{BB'}:\frac{MC'}{CC'}=\frac{\triangle_2}{\triangle_3}, \quad \frac{MC'}{CC'}:\frac{MA'}{AA'}=\frac{\triangle_3}{\triangle_1};$$

съ другой стороны:

$$\frac{\triangle_1}{\triangle_2}=\frac{BC'}{AC'},\quad \frac{\triangle_2}{\triangle_3}=\frac{CA'}{BA'},\quad \frac{\triangle_3}{\triangle_1}=\frac{AB'}{CB'};$$

слѣдовательно,

$$\frac{MA'}{AA'}:\frac{MB'}{BB'}=\frac{BC'}{AC'},$$

$$\frac{MB'}{BB'}:\frac{MC'}{CC'}=\frac{CA'}{BA'}, \qquad (3)$$

$$\frac{MC'}{CC'}:\frac{MA'}{AA'}=\frac{AB'}{CB'}.$$

Изъ этихъ равенствъ, по теоремѣ Чевы, одно есть слѣдствіе двухъ другихъ; присоединивъ же къ нимъ равенство (2), получимъ систему независимыхъ трехъ ур-ній для опредѣленія искомыхъ отношеній.

Выразивъ изъ ур-ній (3) $\frac{MB'}{BB'}$ и $\frac{MC'}{CC'}$ чрезъ $\frac{MA'}{AA'}$ и подставивъ полученныя выраженія

$$\frac{MB'}{BB'}=\frac{MA'}{AA'}\cdot\frac{AC'}{BC'},\quad \frac{MC'}{CC'}=\frac{MA'}{AA'}\cdot\frac{AB'}{CB'}$$

въ уравненіе (2), получимъ:

$$\left(1+\frac{AC'}{BC'}+\frac{AB'}{CB'}\right)\cdot\frac{MA'}{AA'}=1,$$

откуда

$$\frac{AA'}{MA'}=1+\frac{AC'}{BC'}+\frac{AB'}{CB'};$$

отсюда, вычитая изъ обѣихъ частей равенства по единицѣ, на основаніи равенства

$$\frac{AA'}{MA'}-1=\frac{AA'-MA'}{MA'}=\frac{AM}{MA'},$$

находимъ, что

$$\frac{AM}{MA'}=\frac{AC'}{BC'}+\frac{AB'}{CB'}.$$

Такимъ образомъ, составивъ аналогичныя формулы для отношеній $\frac{BM}{MB'}$ и $\frac{CM}{MC'}$, получаемъ слѣдующую теорему.

Теорема I. *Если чевіаны AA', BB', CC' тр-ка ABC пересѣкаются въ одной общей точкѣ M, то*

$$\frac{AM}{MA'}=\frac{AC'}{BC'}+\frac{AB'}{CB'},$$

$$\frac{BM}{MB'}=\frac{BA'}{CA'}+\frac{BC'}{AC'}, \qquad (4)$$

$$\frac{CM}{MC'}=\frac{CB'}{AB'}+\frac{CA'}{BA'}.$$

4. Отношенія отрѣзковъ чевіанъ, опредѣляющіяся этими формулами, связаны между собою равенствомъ, которое получается изъ равенства (2), если въ послѣднее подставимъ вмѣсто отношеній $\frac{MA'}{AA'}$, $\frac{MB'}{BB'}$, $\frac{MC'}{CC'}$ ихъ выраженія чрезъ $\frac{AM}{MA'}$, $\frac{BM}{MB'}$, $\frac{CM}{MC'}$, опредѣляющіяся изъ равенствъ

$$\frac{AA'}{MA'}=\frac{AM}{MA'}+1,\quad \frac{BB'}{MB'}=\frac{BM}{MB'}+1,\quad \frac{CC'}{MC'}=\frac{CM}{MC'}+1,$$

т. е.

$$\frac{MA'}{AA'}=\frac{1}{\frac{AM}{MA'}+1} \text{ и т. д.;}$$

такимъ образомъ, получимъ равенство:

$$\frac{1}{\frac{AM}{MA'}+1}+\frac{1}{\frac{BM}{MB'}+1}+\frac{1}{\frac{CM}{MC'}+1}=1,$$

которое, послѣ освобожденія отъ знаменателей, раскрытія скобокъ и приведенія, принимаетъ видъ:

$$\frac{AM}{MA'}\cdot\frac{BM}{MB'}\cdot\frac{CM}{MC'}=\frac{AM}{MA'}+\frac{BM}{MB'}+\frac{CM}{MC'}+2. \qquad (5)$$

5 *Замѣчаніе* Формулы (4), полученныя на основаніи равенства (2), относятся къ тому случаю, когда точка пересѣченія чевіанъ M находится внутри тр-ка. Если же точка M находится внѣ тр-ка, напр., на продолженіи чевіаны AA' за точку A' или за точку A, то въ этихъ случаяхъ, вмѣсто равенства (2), имѣютъ мѣсто соотвѣтственно равенства

$$-\frac{MA'}{AA'}+\frac{MB'}{BB'}+\frac{MC'}{CC'}=1, \qquad (2,a)$$

и

$$\frac{MA'}{AA'} - \frac{MB'}{BB'} - \frac{MC'}{CC'} = -1, \qquad (2,b)$$

вслѣдствіе чего, вмѣсто формулъ (4), получаются формулы:

$$\frac{AM}{MA'} = \frac{AC'}{BC'} + \frac{AB'}{CB'},$$

$$\pm\frac{BM}{MB'} = \frac{BA'}{CA'} - \frac{BC}{AC'}, \qquad (4,\ a,\ b)$$

$$\pm\frac{CM}{MC'} = \frac{CA'}{BA'} - \frac{CB'}{AB'}.$$

Впрочемъ, формулы (4) и самый выводъ ихъ можно обобщить для произвольнаго положенія точки M относительно тр-ка; для этого достаточно принять слѣдующія условія:

1) площадь тр-ка $ABC \equiv \triangle$, его стороны a, b, c и чевіаны AA', BB', CC' считать всегда положительными;

2) площади тр-въ $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ принимать съ $+$ или съ $-$, такъ чтобы удовлетворялось равенство

$$\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 = \triangle;$$

3) отрѣзки сторонъ тр-ка ABC и его чевіанъ принимать также съ $+$ или $-$, такъ чтобы удовлетворялись равенства:

$$BA' + CA' = BC = a,$$

$$CB' + AB' = CA = b,$$

$$AC' + BC' = AB = c$$

и

$$AM + MA' = AA',$$

$$BM + MB' = BB',$$

$$CM + MC' = CC'.$$

6. Пользуясь доказанной теоремой, рѣшимъ слѣдующую задачу:

Найти чевіаны тр-ка, которыя, пересѣкаясь въ одной точкѣ, дѣлятся такъ, что отношенія ихъ отрѣзковъ равны.

Если искомыя чевіаны AA', BB', CC' пересѣкаются въ точкѣ M, то, обозначивъ чрезъ u величину отношеній ихъ отрѣзковъ, по условію задачи будемъ имѣть

$$\frac{AM}{MA'} = \frac{BM}{MB'} = \frac{CM}{MC'} = u;$$

равенство (5) обратится при этомъ въ ур-іе

$$u^3 - 3u - 2 = 0,$$

корни котораго суть $u_1 = 2$ и $u_2 = u_3 = -1$; такимъ образомъ, u можетъ имѣть только два значенія: или 2, или -1. При $u = -1$, отношенія

$$\frac{AM}{MA'} = \frac{BM}{MB'} = \frac{CM}{MC'} = -1,$$

какъ отрицательныя, показываютъ, что точка пересѣченія чевіанъ (M) находится на продолженіи каждой изъ нихъ и при томъ безконечно удалена, такъ что въ дѣйствительности не существуетъ; слѣдовательно, значеніе $u = -1$ соотвѣтствуетъ параллельности чевіанъ и не даетъ прямого рѣшенія задачи.

Принимая же $u = 2$, изъ равенствъ

$$\frac{AM}{MA'} = \frac{BM}{MB'} = \frac{CM}{MC'} = 2$$

заключаемъ, что искомыя чевіаны дѣлятся въ точкѣ пересѣчеія такъ, что отрѣзки ихъ отъ вершинъ тр-ка вдвое больше отрѣзковъ отъ ихъ основаній. Для опредѣленія положенія такихъ чевіанъ, воспользуемся равенствами (4), которыя въ этомъ случаѣ суть:

$$\frac{AC'}{BC'} + \frac{AB'}{CB'} = 2,$$

$$\frac{BA'}{CA'} + \frac{BC'}{AC'} = 2,$$

$$\frac{CB'}{AB'} + \frac{CA'}{BA'} = 2.$$

Положивъ въ нихъ для сокращеній

$$\frac{AC'}{BC'} = x, \quad \frac{BA'}{CA'} = y, \quad \frac{CB'}{AB'} = z,$$

получимъ уравненія:

$$x + \frac{1}{z} = y + \frac{1}{x} = z + \frac{1}{y} = 2,$$

удовлетворяющіяся только при $x = y = z = 1$, такъ что

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{BA'}{CA'} = \frac{CB'}{AB'} = 1;$$

савенства же эти обнаруживаютъ, что искомыя чевіаны дѣлятъ торроны тр-ка пополамъ, т. е. что это суть *медіаны* тр-ка.

7. Примѣнимъ выведенныя формулы для вычисленія отношеній отрѣзковъ чевіанъ въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

Положимъ, что чевіаны AA′, BB′, CC′ суть *симедіаны* тр-ка, такъ что общая точка ихъ M совпадаетъ съ точкою Лемуана тр-ка K. Въ этомъ случаѣ *)

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{b^2}{a^2} \text{ и } \frac{AB'}{CB'} = \frac{c^2}{a^2};$$

поэтому, по формулѣ (4),

$$\frac{AK}{KA'} = \frac{b^2 + c^2}{a^2},$$

$$\frac{BK}{KB'} = \frac{c^2 + a^2}{b^2},$$

$$\frac{CK}{KC'} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Если AA′—внутренняя симедіана треугольника, а BB′ и CC′—внѣшнія, то, обозначивъ ихъ точку пересѣченія черезъ K_1, по формулѣ (4, a, b), получимъ:

$$\frac{AK_1}{K_1A'} = \frac{b^2 + c^2}{a^2},$$

$$\frac{BK_1}{K_1B'} = \pm\frac{c^2 - a^2}{b^2},$$

$$\frac{CK_1}{K_1C'} = \pm\frac{b^2 - a^2}{c^2}.$$

8. Если AA′, BB′, CC′—суть *высоты* тр-ка, то общая точка ихъ M совпадаетъ съ ортоцентромъ H; въ этомъ случаѣ

$$2AC'.c = b^2 + c^2 - a^2,$$

$$2BC'.c = a^2 + c^2 - b^2,$$

$$2AB'.b = b^2 + c^2 - a^2,$$

$$2CB'.b = a^2 + b^2 - c^2,$$

откуда

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} \text{ и } \frac{AB'}{CB'} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + b^2 - c^2};$$

---

*) „Нов. Геом.“ Дм. Ефремова. VI, 15.

подставивъ эти выраженія въ равенства (4), послѣ упрощеній получимъ

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HA'}}=\frac{2a^2(b^2+c^2-a^2)}{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}$$

и т. д.

9. Обозначимъ черезъ AA″, BB″, CC″ чевіаны тр-ка, пересѣкающіяся въ центрѣ описаннаго круга O. Такъ какъ эти прямыя изогональны съ высотами тр-ка AA′, BB′, CC′, то *)

$$\frac{\mathrm{AC'}}{\mathrm{BC'}}\cdot\frac{\mathrm{AC''}}{\mathrm{BC''}}=\frac{b^2}{a^2},\quad \frac{\mathrm{AB'}}{\mathrm{CB'}}\cdot\frac{\mathrm{AB''}}{\mathrm{CB''}}=\frac{c^2}{a^2};$$

отсюда, на основаніи только что найденныхъ формулъ,

$$\frac{\mathrm{AC''}}{\mathrm{BC''}}=\frac{b^2}{a^2}:\frac{\mathrm{AC'}}{\mathrm{BC'}}=\frac{b^2(a^2+c^2-b^2)}{a^2(b^2+c^2-a^2)},$$

$$\frac{\mathrm{AB''}}{\mathrm{CB''}}=\frac{c^2}{a^2}:\frac{\mathrm{AB'}}{\mathrm{CB'}}=\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{a^2(b^2+c^2-a^2)};$$

слѣдовательно,

$$\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OA'}}=\frac{\mathrm{AC''}}{\mathrm{BC''}}+\frac{\mathrm{AB'}}{\mathrm{CB''}}=$$

$$=\frac{b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)}{a^2(b^2+c^2-a^2)}$$

и т. д.

10. Отрѣзки двухъ системъ чевіанъ, пересѣкающихся по три въ *изотомически-сопряженныхъ* точкахъ тр-ка, обладаютъ слѣдующимъ замѣчательнымъ свойствомъ.

Теорема II. *Если чевіаны тр-ка AA′, BB′, CC′ и AA″, BB″, CC″ пересѣкаются въ изотомически-сопряженныхъ точкахъ тр-ка M_1 и M_2, то*

$$\frac{\mathrm{AM_1}}{\mathrm{M_1A'}}\cdot\frac{\mathrm{BM_1}}{\mathrm{M_1B'}}\cdot\frac{\mathrm{CM_1}}{\mathrm{M_1C'}}=\frac{\mathrm{AM_2}}{\mathrm{M_2A''}}\cdot\frac{\mathrm{BM_2}}{\mathrm{M_2B''}}\cdot\frac{\mathrm{CM_2}}{\mathrm{M_2C''}}$$

и

$$\frac{\mathrm{AM_1}}{\mathrm{M_1A'}}+\frac{\mathrm{BM_1}}{\mathrm{M_1B'}}+\frac{\mathrm{CM_1}}{\mathrm{M_1C'}}=\frac{\mathrm{AM_2}}{\mathrm{M_2A''}}+\frac{\mathrm{BM_2}}{\mathrm{M_2B''}}+\frac{\mathrm{CM_2}}{\mathrm{M_2C''}}.$$

Такъ какъ AA′ и AA″, BB′ и BB″, CC′ и CC″ суть изотомическія прямыя, то *)

$$\mathrm{BA'}=\mathrm{CA''}\ \text{и}\ \mathrm{CA'}=\mathrm{BA''},$$

$$\mathrm{CB'}=\mathrm{AB''}\ \text{и}\ \mathrm{AB'}=\mathrm{CB''},$$

$$\mathrm{AC'}=\mathrm{BC''}\ \text{и}\ \mathrm{BC'}=\mathrm{AC''};$$

---

*) Ib. V, 15.

*) Ib. V, 43.

поэтому:

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{BA''}{CA''} = 1, \quad \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{CB''}{AB''} = 1, \quad \frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{AC''}{BC''} = 1.$$

Но отношенія $\frac{BA'}{CA'}$ и $\frac{CB'}{AB'}$ всегда можно представить дробями вида $\frac{m}{n}$ и $\frac{n}{p}$, при чемъ отношеніе $\frac{AC'}{BC'}$, вслѣдствіе теоремы *Чевы*, выразится дробью $\frac{p}{m}$. Если же

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{m}{n}, \quad \frac{CB'}{AB'} = \frac{n}{p}, \quad \frac{AC'}{BC'} = \frac{p}{m},$$

то, вслѣдствіе послѣднихъ равенствъ,

$$\frac{BA''}{CA''} = \frac{n}{m}, \quad \frac{CB''}{AB''} = \frac{p}{n}, \quad \frac{AC''}{BC''} = \frac{m}{p}.$$

Вводя эти выраженія въ формулы (4), получимъ:

$$\frac{AM_1}{M_1A'} = \frac{AC'}{BC} + \frac{AB'}{CB'} = \frac{p(m+n)}{mn},$$

$$\frac{BM_1}{M_1B'} = \frac{BA'}{CA'} + \frac{BC'}{AC'} = \frac{m(n+p)}{np},$$

$$\frac{CM_1}{M_1C'} = \frac{CB'}{AB'} + \frac{CA'}{BA'} = \frac{n(p+m)}{pm}$$

и

$$\frac{AM_2}{M_2A''} = \frac{AC''}{BC''} + \frac{AB''}{CB''} = \frac{m+n}{p},$$

$$\frac{BM_2}{M_2B''} = \frac{BA''}{CA''} + \frac{BC''}{AC''} = \frac{n+p}{m},$$

$$\frac{CM_2}{M_2C''} = \frac{CB''}{AB''} + \frac{CA''}{BA''} = \frac{p+m}{n};$$

отсюда

$$\frac{AM_1}{M_1A'} \cdot \frac{BM_1}{M_1B'} \cdot \frac{CM_1}{M_1C'} = \frac{AM_2}{M_2A''} \cdot \frac{BM_2}{M_2B''} \cdot \frac{CM_2}{M_2C''}$$

$$= \frac{m+n}{p} \cdot \frac{n+p}{m} \cdot \frac{p+m}{n}$$

и

$$\frac{AM_1}{M_1A'}+\frac{BM_1}{M_1B'}+\frac{CM_1}{M_1C'}=\frac{AM_2}{M_2A''}+\frac{BM_2}{M_2B''}+\frac{CM_2}{M_2C''}$$

$$=\frac{m+n}{p}+\frac{n+p}{m}+\frac{p+m}{n},$$

что и требовалось доказать.

11. Примѣромъ изотомически-сопряженныхъ точекъ тр-ка могутъ служить:

1) Центръ вписаннаго круга (I) и внутренній центръ антибиссектрисъ (I′);

2) Центры внѣвписанныхъ круговъ (I_1, I_2, I_3) и соотвѣтственные внѣшніе центры антибиссектрисъ (I'_1, I'_2, I'_3); *)

3) Точка *Жергона* (Г) и точка *Нагеля* (N);

4) Внѣшнія точки *Жергона* ($Г_1$, $Г_2$, $Г_3$) и соотвѣтственныя внѣшнія точки *Нагеля* (N_1, N_2, N_3). **)

Поэтому чевіаны треугольника, пересѣкающіяся въ этихъ точкахъ, т. е. биссектрисы и антибиссектрисы, и прямыя, соединяющія вершины треугольника съ точками касанія его сторонъ съ вписаннымъ и внѣвписанными кругами, обладаютъ свойствомъ, выраженнымъ въ послѣдней теоремѣ.

Вычисленія отношеній отрѣзковъ этихъ чевіанъ приводятъ, какъ сейчасъ увидимъ, къ нѣкоторымъ интереснымъ формуламъ.

12. Положимъ, что AA′, BB′, CC′ и AA″, BB″, CC″ суть внутреннія биссектрисы и антибиссектрисы треугольника, пересѣкающіяся въ ихъ центрахъ I и I′; такъ какъ

$$\frac{AC'}{BC'}=\frac{b}{a},\quad \frac{AB'}{CB'}=\frac{c}{a},\ \ldots$$

и

$$\frac{AC''}{BC''}=\frac{a}{b},\quad \frac{AB''}{CB''}=\frac{a}{c},\ \ldots,$$

то, по теоремѣ I,

$$\frac{AI}{IA'}=\frac{b+c}{a},\quad \frac{BI}{IB'}=\frac{c+a}{b},\quad \frac{CI}{IC'}=\frac{a+b}{c}$$

и

$$\frac{AI'}{I'A''}=\frac{a(b+c)}{bc},\quad \frac{BI'}{I'B''}=\frac{b(c+a)}{ca},\quad \frac{CI'}{I'C''}=\frac{c(a+b)}{ab};$$

*) Ib. V, 52.

**) Ib. V, 48.

слѣдовательно,

$$\frac{AI}{IA'}\cdot\frac{BI}{IB'}\cdot\frac{CI}{IC'}=\frac{AI'}{I'A''}\cdot\frac{BI'}{I'B''}\cdot\frac{CI'}{I'C''}=$$

$$=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

и

$$\frac{AI}{IA'}+\frac{BI}{IB'}+\frac{CI}{IC'}=\frac{AI'}{I'A''}+\frac{BI'}{I'B''}+\frac{CI'}{I'C''}=$$

$$=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}.$$

Кромѣ того, такъ какъ

$$\frac{AA'}{IA'}=\frac{AI}{IA'}+1=\frac{b+c}{a}+1=\frac{2p}{a},$$

$$\frac{BB'}{IB'}=\frac{BI}{IB'}+1=\frac{c+a}{b}+1=\frac{2p}{b},$$

$$\frac{CC'}{IC'}=\frac{CI}{IC'}+1=\frac{a+b}{c}+1=\frac{2p}{c}$$

и

$$\frac{AA''}{I'A''}=\frac{AI'}{I'A''}+1=\frac{a(b+c)}{bc}+1=\frac{ab+bc+ca}{bc} \text{ и т. д.},$$

то

$$\frac{AA'}{IA'}+\frac{BB'}{IB'}+\frac{CC'}{IC'}=\frac{AA''}{I'A''}+\frac{BB''}{I'B''}+\frac{CC''}{I'C''}=$$

$$=2p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{2p(ab+bc+ca)}{abc}=\frac{ab+bc+ca}{2Rr},$$

ибо

$$\frac{abc}{4R}=pr=(p-a)r_1=(p-b)r_2=(p-c)r_3=\triangle.$$

Перемноживъ отношенія $\frac{AA'}{IA'}$, $\frac{BB'}{IB'}$, $\frac{CC'}{IC'}$, находимъ еще, что

$$\frac{AA'}{IA'}\cdot\frac{BB'}{IB'}\cdot\frac{CC'}{IC'}=\frac{8p^3}{abc}=\frac{(a+b+c)^2}{2Rr}=\frac{2p^2}{Rr}.$$

(Продолженіе слѣдуетъ).

Разговорный методъ въ алгебрѣ.

Подъ этимъ заглавіемъ въ „Вѣстникѣ“, въ X-омъ № пр. семестра помѣщено начало критической статьи, принадлежащей г. Шапошникову. Окончаніе этой статьи, присланное позже, носитъ, къ сожалѣнію, настолько рѣзкій характеръ, что редакторъ вынужденъ былъ воздержаться отъ ея печатанія Тѣмъ не менѣе, по существу мысли, высказываемыя авторомъ, г-омъ Шапошниковымъ, представляются намъ въ такой мѣрѣ справедливыми и важными, что мы считаемъ необходимымъ на нихъ остановиться, хотя взгляды эти уже неоднократно проводились на страницахъ „Вѣстника“.

По существу мысль г. Шапошникова сводится къ слѣдующему. На основы ариѳметики и алгебры въ наукѣ въ настоящее время установилась строго формальная точка зрѣнія, которая разсматриваетъ опредѣленія ариѳметическихъ и алгебраическихъ операцій, какъ извѣстныя соглашенія (условія) производить надъ данными числами дѣйствія по опредѣленнымъ правиламъ, или, выражаясь точнѣе, ассоціировать каждой совокупности чиселъ, по опредѣленнымъ правиламъ, нѣкоторое опредѣленное число. Къ этому сводится опредѣленіе дѣйствій надъ отрицательными числами и надъ мнимыми числами. Но основнымъ моментомъ въ такомъ построеніи алгебры является требованіе, чтобы каждое такое соглашеніе не находилось въ противорѣчіи съ предыдущей, установленной нами теоріей. Необходимо, чтобы всякій разъ, какъ мы такого рода соглашеніе вводимъ, было доказано, что оно въ дальнѣйшемъ своемъ развитіи, въ комбинаціи съ прежней теоріей, не можетъ привести къ противорѣчію, къ логическому абсурду. Въ этомъ доказательствѣ заключается центръ тяжести метода какъ съ научной, такъ и съ педагогической точки зрѣнія. Если это не сдѣлано, въ особенности, если необходимость этого доказательства не указана, а, напротивъ, какъ это часто бываетъ, вовсе игнорируется, то вся теорія обращается „въ разговорный методъ“, т. е. въ наборъ фразъ, который съ точки зрѣнія научной не имѣетъ никакой цѣны (не смотря на то, что во имя этой научности теорія именно и строится), а съ точки зрѣнія дидактической вноситъ только сумбуръ въ головы учащихся. Научаясь по принужденію учителя по такимъ учебникамъ повторять фразы, которыя не только не ясны, но подчасъ даже какъ будто противорѣчатъ здравому смыслу, ученикъ отъ такой науки лишь разучивается правильно разсуждать, лишь пріучается повторять слова, въ которыя онъ не вкладываетъ никакого содержанія Трудно даже измѣрить весь вредъ, который такого рода разговорный методъ приноситъ учащимся. Г. Шапошниковъ иллюстрируетъ свою мысль на цѣломъ рядѣ примѣровъ. Такого рода разговорнымъ методомъ нужно признать способъ изложенія теоріи отрицательныхъ чиселъ въ популярной въ настоящее время алгебрѣ г-на Киселева. Вотъ какъ начинается это изложеніе:

> Заключая въ скобки часть многочлена, мы можемъ иногда встрѣтить затрудненія, а именно тогда, когда эта часть многочлена представляетъ собой невозможную разность. Напр., нельзя написать безъ особыхъ условій:
>
> $$10+2-5=10+(2-5),$$
>
> потому что разность 2—5 невозможна.
>
> Чтобы имѣть возможность заключить въ скобки какую угодно часть многочлена, независимо отъ численныхъ значеній буквъ, а также и для другихъ цѣлей, которыя выяснятся впослѣдствіи, въ алгебру вводятъ нѣкоторыя условія.
>
> **Условія:** 1) *Разность между одинаковыми числами принимается равной 0.* Такъ: $7-7=0$.
>
> 2) *Разность между меньшимъ числомъ и большимъ принимается равной избытку большаго числа надъ меньшимъ, взятому со знакомъ минусъ.* Такъ: $7-10=-3$, $p-(p+q)=-q$.

Какъ можно согласовать эти условія съ тѣмъ, хорошо извѣстнымъ ученику, фактомъ, что изъ меньшаго числа вычесть большее нельзя? Что это за чудесныя новыя числа со знакомъ минусъ впереди, которымъ принадлежатъ свойства, находящіяся въ прямомъ противорѣчіи со всѣмъ тѣмъ, чему ученика раньше учили? Еще большія сомнѣнія вызываютъ дальнѣйшіе выводы, которые авторъ отсюда дѣлаетъ. Мы не только убѣждены, что понять этого въ такомъ изложеніи никакой ученикъ не можетъ, но мы считаемъ даже, что тотъ ученикъ, который въ возникающей здѣсь коллизіи между старымъ и новымъ не отдастъ предпочтеніе ясному старому передъ туманнымъ и неяснымъ новымъ, уже испорченъ школой, уже привыкъ послушно повторять за учителемъ слова, которыхъ онъ не понимаетъ. Учитель же, который на этомъ настаиваетъ, практикуетъ „разговорный методъ".

Такъ же неудовлетворительно изложены нѣкоторые важные отдѣлы алгебры г. Билибина (передѣлка Бертрана). Такъ напримѣръ, въ параграфѣ 384-мъ, озаглавленномъ „опредѣленіемъ мнимаго выраженія", послѣднія опредѣляются слѣдующимъ образомъ: „мнимымъ выраженіемъ называется корень квадратный изъ отрицательнаго числа".

„Что именно и при помощи чего здѣсь опредѣляется", — говоритъ г. Шапошниковъ, „подлежащее ли опредѣленію „мнимое выраженіе" при помощи „корня квадратнаго изъ отрицательнаго числа", или этотъ, еще неопредѣленный, а стало быть подлежащій опредѣленію „корень" при помощи „мнимаго выраженія" — сказать трудно."

Далѣе слѣдуютъ слѣдующія три соглашенія.

Первое соглашеніе состоитъ во введеніи мнимой единицы или мнимаго знака, обозначаемаго знакомъ i, которому условно приписывается свойство, выражаемое равенствомъ: $i^2 = -1$.

Второе соглашеніе состоитъ въ разсмотрѣніи числа $\sqrt{-A}$, *какъ произведенія двухъ чиселъ* $\sqrt{A}$ *и* i, *такъ что* $\sqrt{-A} = \sqrt{A}\, i$.

Условимся производить всѣ дѣйствія надъ мнимыми выраженіями по тѣмъ же правиламъ, по которымъ они производятся надъ количествами дѣйствительными.

Какое содержаніе вкладывается въ слово „введеніе" въ первомъ соглашеніи? Въ чемъ заключается „разсмотрѣніе", о которомъ трактуетъ второе соглашеніе? Наконецъ, въ чемъ заключается логическое оправданіе условія производить надъ мнимыми выраженіями дѣйствія по тѣмъ же правиламъ, что и надъ дѣйствительными? Всѣ эти вопросы авторъ оставляетъ совершенно открытыми. Что, если бы мы вздумали условиться производить надъ безконечными рядами *всѣ* дѣйствія въ томъ же порядкѣ, какъ и надъ полиномами. Что, если бы мы условились, напримѣръ, дифференцировать и интегрировать почленно безконечные ряды, располагать ихъ члены въ какомъ угодно порядкѣ и т. п. Всѣ такого рода разсужденія, не дающія именно того логическаго обоснованія теоріи, безъ котораго она не только не научна, но не имѣетъ даже и опредѣленнаго содержанія, г. Шапошниковъ, на нашъ взглядъ совершенно удачно, называетъ „разговорнымъ методомъ". Тѣ же по существу мысли были изложены и г-омъ Попруженко въ рецензіи о начальномъ учебникѣ алгебры г.г. Гензеля и Цитовича.

Но какъ бы ни была правильна эта точка зрѣнія сама по себѣ, всякому, кто не только писалъ, но хотя бы преподавалъ алгебру въ средней школѣ, извѣстно, какъ трудно обойти этотъ „разговорный методъ".

Дѣло въ томъ, что полное и дѣйствительно научное обоснованіе многихъ теорій, входящихъ въ составъ такъ называемой математики, представляетъ очень большія затрудненія. Основы дисциплины гораздо труднѣе, чѣмъ ея развитіе. Не только теорія мнимыхъ величинъ, но и теорія ирраціональныхъ величинъ требуетъ очень продолжительныхъ разсужденій, доступныхъ къ тому же только лицамъ, обладающимъ уже научнымъ развитіемъ, способнымъ воспринять нить тонкихъ разсужденій. При этихъ условіяхъ, совмѣщеніе дѣйствительно научнаго изложенія теоріи мнимыхъ количествъ, теоріи ирраціональныхъ и даже теоріи отрицательныхъ чиселъ съ дидактическими требованіями сопряжено съ трудностями, почти непреодолимыми. Затрудненія эти представляются автору даже не только въ томъ случаѣ, когда онъ пишетъ руководство для элементарной школы; съ тѣми же трудностями постоянно приходится считаться авторамъ, составляющимъ учебники для высшей школы, для молодыхъ людей, имѣющихъ уже болѣе солидную подготовку. Какъ выйти изъ этого затрудненія? Съ этою цѣлью одни предлагаютъ совершенно не касаться тѣхъ вопросовъ, которые не могутъ быть изложены съ достаточной ясностью. По отношенію ко многимъ вопросамъ такая точка зрѣнія дѣйствительно представляется совершенно правильной. Мы полагаемъ, что ученію о мнимыхъ количествахъ вовсе не должно быть мѣста въ низшей школѣ; въ высшей же школѣ эта теорія можетъ быть достаточно разработана. Но какъ устранить, напримѣръ, теорію ирраціональныхъ величинъ? Вообще, для насъ несомнѣнно, что провести и эту точку зрѣнія черезъ всю элементарную математику чрезвычайно трудно. Именно поэтому очень трудно совершенно избѣжать „разговорнаго метода“, какъ бы вреднымъ мы его не считали. Мы не знаемъ ни одного руководства элементарной алгебры, ни въ русской, ни въ иностранной литературѣ, которое не платило бы извѣстной дани этому установившемуся пріему „говорить слова тамъ, гдѣ недостаетъ понятій“. Мы рѣшительно не хотимъ стать въ защиту пріемовъ, которые слѣдуютъ этому завѣту Мефистофеля, но мы полагаемъ, что врядъ ли цѣлесообразно, руководствуясь этими взглядами, впадать въ огульное осужденіе такихъ сочиненій, какъ книги Билибина и Киселева. Книга г. Билибина несомнѣнно сыграла большую роль, главнымъ образомъ для преподавателя, ознакомивъ его съ тѣми теченіями, которыя въ ту пору, около 20 лѣтъ тому назадъ, только начинали проникать въ школьную литературу. Многое изъ этого внесено г. Киселевымъ въ самое дѣло элементарнаго обученія; но что крупные пробѣлы остаются тамъ и здѣсь, это несомнѣно; на это необходимо часто и настойчиво указывать, но только твердо помня при этомъ, что указывать эти пробѣлы неизмѣримо легче, чѣмъ исправить ихъ. Мы совершенно не сомнѣваемся, что достаточно было бы появиться въ какомъ нибудь учебникѣ, на какомъ угодно языкѣ, такому изложенію теоріи отрицательныхъ чиселъ, мнимыхъ чиселъ, ирраціональныхъ чиселъ, которое соединяло бы научную разработку съ доступной въ дидактическомъ отношеніи формой, и оно въ самый короткій срокъ нашло бы себѣ мѣсто во всякой школѣ, во всякомъ учебникѣ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Радіоактивность снѣга. Радіоактивность снѣга впервые изслѣдовалъ Allan. Онъ взялъ приблизительно одинъ литръ изъ поверхностнаго слоя снѣга, выпавшаго въ теченіе сезона и, испаривъ его надъ дискомъ, обнаружилъ сильную іонизацію окружающаго воздуха, въ которомъ до опыта не было ни малѣйшихъ слѣдовъ радіоактивности. Съ другой стороны, г. Kauffmann въ 1904 г. пришелъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1. Только что выпавшій снѣгъ, при прочихъ равныхъ условіяхъ, обладаетъ большей радіоактивностью, чѣмъ дождь.

2. Въ снѣгу, собранномъ на крышахъ, по истеченіи 100 часовъ не обнаруживается никакихъ слѣдовъ радіоактивности.

3. Снѣгъ, упавшій на землю, сохраняетъ свою радіоактивность почти полностью до ста часовъ послѣ выпаденія, при чемъ замѣчаются колебанія, которыя, повидимому, имѣютъ связь съ измѣненіями барометра.

Въ недавно вышедшей статьѣ (Physikalische Zeitschrift № 10, 1906) гг. Constanzo и Negro резюмируютъ результаты своихъ изслѣдованій о радіоактивности снѣга, которыя они производили посредствомъ извѣстнаго прибора Elster и Geitel. Чтобы сохранять снѣгъ въ металлическомъ резервуарѣ надъ дисперзоромъ, они пользовались кольцеобразнымъ пріемникомъ, помѣщеннымъ на дно резервуара. Зарядъ, полученный дисперзоромъ, во всѣхъ случаяхъ превышалъ сто вольтовъ и, въ силу слабой радіоактивности испытуемаго вещества, оказывался достаточнымъ для того, чтобы произвести токъ насыщенія. Они произвели тщательные опыты, использовавъ всѣ случаи снѣга, какіе имѣли мѣсто въ прошлую зиму въ Болоньѣ; хотя найденные ими результаты не настолько согласуются другъ съ другомъ, чтобы можно было установить точный законъ (съ результатами прежнихъ изслѣдователей они совпадаютъ лишь отчасти), все-таки эти ученые считаютъ возможнымъ установить слѣдующія положенія:

1. Только что выпавшій и сейчасъ же собранный снѣгъ обладаетъ сильной радіоактивностью.

2. Эта радіоактивность, насколько можно судить по произведеннымъ опытамъ, почти полностью исчезаетъ не позже, чѣмъ по истеченіи двухъ часовъ.

3. Снѣгъ, выпадающій на землю, повидимому, сохраняетъ свою радіоактивность нѣсколько долѣе, чѣмъ снѣгъ, собранный на крышахъ.

Чтобы вполнѣ понять законъ, управляющій этими явленіями, нужно принять въ разсчетъ метеорологическія условія, въ особенности показанія барометра.

Высота атмосферы. Предѣльная высота нашей атмосферы нѣсколько разъ была опредѣлена помощью наблюденій надъ падающими звѣздами, которыя загораются, какъ только треніе дѣлается настолько сильнымъ, что составныя вещества звѣзды превращаются въ пары. Въ очень многихъ отношеніяхъ этотъ методъ оказывается удовлетворительнымъ, и астрономы, быть можетъ, и впредь будутъ пользоваться имъ. Съ другой стороны, можно по примѣру T. J. J. See, въ Вашингтонѣ, прибѣгнуть къ другому методу столь же простому и во всякомъ случаѣ не менѣе точному.

Если при наступленіи ночи наблюдать невооруженнымъ глазомъ, какъ постепенно исчезаетъ синій цвѣтъ неба, то лица, обладающія хорошимъ зрѣніемъ, при совершенно ясной погодѣ будутъ получать поразительно точныя результаты. Если затѣмъ отмѣтить время захода солнца и моментъ полнаго исчезновенія синевы, то простая тригонометрическая выкладка дастъ намъ величину солнечной депрессіи въ тотъ моментъ, когда синій цвѣтъ смѣняется черными, откуда можно опредѣлить высоту, на которой находятся освѣщенныя частицы.

Средняя высота, которую такимъ образомъ нашелъ г. See, равна 211 километрамъ, и колебанія не превышаютъ двадцати километровъ. Конечно, уловить моментъ исчезновенія синевы совершенно точно невозможно, а принимая во вниманіе постепенное уменьшеніе плотности слоевъ атмосферы, требуется также, чтобы частицы были распредѣлены достаточно густо, чтобы синій цвѣтъ могъ путемъ отраженія выдѣляться на черномъ фонѣ неба; тѣмъ не менѣе, результаты, которые нашелъ авторъ, поразительно согласуются другъ съ другомъ.

Что же еще можно возразить? При наблюденіяхъ надъ падающими звѣздами, средняя высота атмосферы оказалась равной 120 километрамъ. Но, быть можетъ, для воспламененія падающихъ звѣздъ необходима наличность достаточно плотныхъ слоевъ атмосферы, ибо только тамъ треніе можетъ оказать дѣйствіе. Не нужно забывать, что средняя скорость ихъ аналогична скорости земли (30 километровъ въ секунду).

Такимъ образомъ, нужно думать, что методъ г. See болѣе точенъ; кромѣ того, онъ даетъ возможность обнаружить присутствіе разрѣженныхъ слоевъ тамъ, гдѣ метеоры еще не могутъ загораться, и къ тому же полученные численные результаты гораздо болѣе согласны другъ съ другомъ, чѣмъ тѣ, которые найдены изъ наблюденій надъ свѣченіемъ (luminosité des étoiles filantes) весьма различныхъ діаметровъ и массъ.

О природѣ осмотическаго давленія. Какъ извѣстно, Вант-Гоффъ объясняетъ явленія осмотическаго давленія въ зависимости отъ ударовъ, которымъ полупроницаемая перепонка подвергается со стороны молекулъ разлагаемаго вещества. Этотъ взглядъ опровергается многими учеными.

A. Battelli и A. Stefanini произвели въ физическомъ институтѣ Пизанскаго Университета рядъ опытовъ, которые между прочимъ имѣли цѣлью выяснить соотношеніе между осмотическимъ давленіемъ и температурой. Приступая къ изложенію найденныхъ результатовъ, эти изслѣдователи высказываютъ слѣдующее положеніе:

Осмотическія давленія обусловливаются разностями поверхностнаго натяженія. Во всѣхъ случаяхъ осмозъ протекаетъ въ такомъ направленіи, чтобы наилучшимъ образомъ уравновѣсить поверхностныя натяженія съ обѣихъ сторонъ перепонки.

Если же поверхностныя натяженія обоихъ растворовъ, хотя бы и эквимолекулярныхъ (équimoléculaires),—равны другъ другу, то они всегда находятся во взаимномъ осмотическомъ равновѣсіи.

Эти факты дѣлаютъ весьма неправдоподобнымъ мнѣніе Вантъ-Гоффа, согласно которому осмотическое давленіе имѣетъ чисто кинетическую природу.

РЕЦЕНЗІИ.

Д. Л. Волковскій. *Собраніе ариѳметическихъ упражненій для гимназій и реальныхъ училищъ. Курсъ 3-го класса. Дополнительный курсъ къ ариѳметическому задачнику А. И. Гольденберга.* Цѣна 25 коп. Москва, 1906 г.

Въ этой работѣ авторъ добросовѣстно и весьма толково выполнилъ все, что обѣщалъ въ предисловіи. Такъ какъ въ основу задачника положены казенныя программы съ ихъ увядающимъ, безжизненнымъ характеромъ, то работа эта не можетъ и не должна имѣть широкаго вліянія. Въ преподаваніи ариѳметики давно уже пора вступить на новую свѣжую дорогу, а не чинить и исправлять пробоины стараго пути. Особенно непріятно видѣть отжившее дѣленіе задачъ по правиламъ: цѣпному, смѣшенія и проч. Нельзя также согласиться съ авторомъ въ томъ, что его трудъ написанъ въ духѣ и характерѣ А. И. Гольденберга. Покойный А. И. Гольденбергъ, думается, вполнѣ не сочувствовалъ установившемуся режиму преподаванія ариѳметики; но, считая окончательную ломку преждевременною, проявилъ въ своихъ трудахъ несомнѣнно разумную, быть можетъ, мудрую сдержанность. У г. Волковскаго на этотъ разъ этой сдержанности больше, а между тѣмъ мы живемъ уже въ другое время, школа жаждетъ обновленія.

Все сказанное отнюдь не относится къ личнымъ взглядамъ автора, извѣстнаго своимъ прогрессивнымъ направленіемъ. Составляя свой задачникъ, авторъ, очевидно, сообразовывался съ существующимъ режимомъ школы. Вспомнимъ, что задачникъ А. И. Гольденберга не былъ допущенъ къ школьному употребленію „*впредь до представленія курса 3-го класса*“. Пока же существуетъ современный школьный режимъ, нельзя не пожелать задачнику г. Волковскаго широкаго распространенія, какъ наиболѣе толковому и по направленію наиболѣе близкому къ трудамъ А. И. Гольденберга.

И. Александровъ (Москва).

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Выводъ формулы синуса кратной дуги посредствомъ непрерывныхъ дробей.

Въ статьѣ моей (см. „В. Оп. Ф." XXXIII сем., 92 стр.) былъ указанъ способъ находить $\frac{P_n}{Q_n}$ дроби

$$\cfrac{b}{2+\cfrac{b}{2+\dots}}$$

Слегка измѣнивъ ходъ разсужденій, мы можемъ найти $\frac{P_n}{Q_n}$ дроби $\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\dots}}$

Это $\frac{P_n}{Q_n}$ будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\frac{P_n}{Q_n}=\left[\frac{(a+\sqrt{a^2+4b})^n-(a-\sqrt{a^2+4b})^n}{(a+\sqrt{a^2+4b})^{n+1}-(a-\sqrt{a^2+4b})^{n+1}}\right]2b. \quad A$$

Воспользуемся этой формулой для вывода формулъ синусовъ кратныхъ дугъ.

Для этого положимъ $b=-1$, $a=2\cos\varphi$, т. е. мы беремъ дробь $\cfrac{-1}{2\cos\varphi-\cfrac{1}{2\cos\varphi-\dots}}$

Для этой дроби по формулѣ A:

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n-(\cos\varphi-i\sin\varphi)^n}{(\cos\varphi-i\sin\varphi)^{n+1}-(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{n+1}}, \qquad B.$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$.

Принимая во вниманіе теорему Моавра

$$(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)^k=\cos k\varphi\pm i\sin k\varphi,$$

мы получимъ:

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{2i\sin n\varphi}{-2i\sin(n+1)\varphi}. \qquad C.$$

Изъ равенствъ B и C находимъ:

$$2i\sin n\varphi=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n-(\cos\varphi-i\sin\varphi)^n. \qquad C_1.$$

Или

$$\sin n\varphi = \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n - (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n}{2i}. \qquad C_{ii}.$$

Развертывая формулу по биному Ньютона, мы получимъ:

$$\text{I. } \sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\sin^3\varphi + \ldots$$

Въ формулѣ C_{ii} полагаемъ $\sin\varphi = \pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$; Тогда:

$$\text{II. } \sin n\varphi = \frac{(\cos\varphi + i\sqrt{1-\cos^2\varphi})^n - (\cos\varphi - i\sqrt{1-\cos^2\varphi})^n}{2i} =$$

$$= \sin\varphi\left[(2\cos\varphi)^{n-1} - C^1_{n-2}(2\cos\varphi)^{n-3} + C^2_{n-3}(2\cos\varphi)^{n-5} - \ldots\right]$$

III. Въ формулѣ C_{ii} полагаемъ $\cos\varphi = \sin\varphi\,\mathrm{ctg}\varphi$; тогда:

$$\sin n\varphi = \frac{\sin^n\varphi[(\mathrm{ctg}\varphi + i)^n - (\mathrm{ctg}\varphi - i)^n]}{2i} = \sin n\varphi\Big(n\,\mathrm{ctg}^{n-1}\varphi -$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\mathrm{ctg}^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\mathrm{ctg}^{n-5}\varphi - \ldots\Big)$$

Въ формулѣ C_{ii} полагаемъ $\sin\varphi = \cos\varphi\,\mathrm{tg}\varphi$; тогда:

$$\text{IV } \sin n\varphi = \frac{\cos^n\varphi[(i\,\mathrm{tg}\varphi + 1)^n - (-i\,\mathrm{tg}\varphi + 1)^n]}{2i}.$$

Въ данномъ случаѣ надо разбирать: четно ли n, или нѣтъ? Это неудобство устраняется при перепискѣ равенства IV въ такомъ видѣ:

$$\sin n\varphi = \frac{\cos^n\varphi[(1 + i\,\mathrm{tg}\varphi)^n - (1 - i\,\mathrm{tg}\varphi)^n]}{2i} =$$

$$= \cos^n\varphi\left(n\,\mathrm{tg}\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\mathrm{tg}^3\varphi + \ldots\right).$$

Д.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ" и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 777 (4 сер.). Опредѣлить предѣлъ суммы безконечнаго ряда:

$$\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x}+\frac{\sin^2\frac{x}{4}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2\frac{x}{8}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}}+\ldots$$

Е. Григорьевъ (Казань)

№ 778 (4 сер.). Построить треугольникъ по положенію вершины A, центра O описанной окружности и центра O' окружности Эйлера. *)

Н. Агрономовъ (Вологда).

№ 779 (4 сер.). Доказать, что число

$$\left(2n+\frac{t^2-1}{9}\right)^{9n-1}-1$$

дѣлится на $18n-1$, если $18n-1$ есть простое число, которое не дѣлитъ t, и если $\frac{t^2-1}{9}$ есть число цѣлое.

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 780 (4 сер.). Внутри даннаго угла BAC построить въ данномъ разстояніи l отъ его вершины A точку S такъ, чтобы прямая, проходящая черезъ S и отсѣкающая отъ даннаго угла треугольникъ наименьшей площади, образовала съ AS данный уголъ α.

В. Шлыгинъ (ст. Урюпинская).

№ 781 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4+ax^3\sqrt{3}+a^4=0.$$

(Заимств.).

№ 782 (4 сер.). Сколько граммовъ вещества, плотность котораго 3, слѣдуетъ отвѣсить въ платиновой чашкѣ, абсолютный вѣсъ которой равенъ 10 граммамъ, на точныхъ вѣсахъ, чтобы поправка на потерю вѣса въ воздухѣ оказалась ненужной? Удѣльный вѣсъ разновѣсокъ равенъ 10. Температура во время взвѣшиванія равна 0°; плотности вещества и разновѣсокъ даны также при 0°.

Л. Ямпольскій (Одесса).

---

*) Такъ называется окружность, проходящая черезъ средины сторонъ треугольника.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

V **№ 659** (4 сер.). *Построить треугольникъ* ABC, *зная высоту* AD, *уголъ* A *и разность отрѣзковъ* BD—DC.

Введемъ обозначенія $AD=h$, $BD-DC=l$. Если точки B и C лежатъ по одну сторону высоты AD (что возможно лишь тогда, когда уголъ A острый), то $BD-DC=BC=l$. Такимъ образомъ, для построенія треугольника достаточно на данномъ основаніи $BC=l$ описать сегментъ, вмѣщающій данный уголъ A, и провести прямую, параллельную BC, на разстояніи h отъ нея; если эта прямая встрѣчаетъ дугу сегмента въ точкѣ A, то ABC есть искомый треугольникъ. Пусть теперь B и C лежатъ по разныя стороны высоты AD. Предполагая, что задача рѣшена, проведемъ медіану треугольника AM и на продолженіи ея отложимъ отрѣзокъ MA', равный AM. Тогда, какъ извѣстно, получаемъ параллелограммъ $ABA'C$, а потому $\angle ACA'=\pi-A$ (1). Вычитая изъ обѣихъ частей равенства $MC=\dfrac{BD+DC}{2}$ по DC, находимъ $MD=MC-DC=\dfrac{BD+DC}{2}-DC=\dfrac{BD-DC}{2}=\dfrac{l}{2}$ (2). Изъ равенствъ (1) и (2) вытекаетъ построеніе: по катетамъ $AD=h$ и (см. (2)) $MD=\dfrac{l}{2}$ строимъ прямоугольный треугольникъ AMD, откладываемъ на продолженіи прямой AM отрѣзокъ $MA'=AM$, строимъ на AA' сегментъ, вмѣщающій уголъ (см. (1)) $\pi-A$ и продолжаемъ прямую MD до встрѣчи въ точкѣ C съ дугою этого сегмента. Отложивъ на продолженіи прямой CM отрѣзокъ $MB=MC$, получимъ искомый треугольникъ ABC.

Э. Лейнъкъ (Рига); *С. Конюховъ* (Никитовка); *Н. Плахово* (Знаменка).

№ 660 (4 сер.). *Девять величинъ связаны уравненіями*

$$a^2+a'^2-k^2=1,\quad b^2+b'^2-l^2=1,\quad c^2+c'^2-m^2=-1,$$

$$ab+a'b'-kl=0,\quad bc+b'c'-lm=0,\quad ca+c'a'-mk=0,$$

$$b+c=0.$$

Выразить всѣ величины въ зависимости отъ двухъ изъ нихъ.

Изъ послѣдняго изъ данныхъ уравненій находимъ $c=-b$ (1). Подставляя въ остальныя уравненія вмѣсто c его значеніе изъ равенства (1), приводимъ ихъ къ слѣдующему виду:

$$a^2+a'^2=1+k^2\ (2),\qquad b^2+b'^2=1+l^2\ (3),\qquad b^2+c'^2=m^2-1\ (4),$$

$$ab+a'b'=kl\ (5),\qquad b'c'-b^2=lm\ (6),\qquad a'c'-ab=mk\ (7).$$

Складывая уравненія (3) и (4) съ удвоеннымъ уравненіемъ (6), получимъ $(b'+c')^2=(m+l)^2$, откуда $b'+c'=\pm(m+l)$ (8). Сложивъ равенства (5) и (7), затѣмъ (3) и (6), а потомъ (4) и (6), находимъ:

$$a'b'+a'c'=a'(b'+c')=k(m+l)\ (9),\qquad b'^2+b'c'=b'(b'+c')=1+lm+l^2\ (10),$$

$$c'^2+b'c'=c'(b'+c')=m^2+lm-1\ (11).$$

Изъ равенствъ (8) и (11) видно, что $m+l\neq 0$; дѣйствительно, при $m+l=0$ мы имѣли бы $c'(b'+c')=\pm c'(m+l)=\pm c'.0=m^2+lm-1=m(m+l)-1=$ $=m.0-1$, откуда $0=-1$, что невозможно. Подставляя значеніе $b'+c'$ изъ равенства (8) въ уравненія (9), (10), (11), находимъ изъ нихъ:

$$a' = \pm k \ (12), \quad b' = \pm \frac{lm + l^2 + 1}{m + l} = \pm \left(l + \frac{1}{m + l}\right) \ (13),$$

$$c' = \pm \frac{m^2 + ml - 1}{m + l} = \pm \left(m - \frac{1}{m + l}\right) \ (14),$$

при чемъ въ этихъ формулахъ надо взять во второй части вездѣ либо верхніе, либо нижніе знаки. Подставивъ значеніе a' изъ равенства (12) въ равенство (2), получимъ $a^2 + k^2 = 1 + k^2$, откуда $a^2 = 1$, $a = \pm 1$ (15). Подставляя значенія a, a' и b' изъ равенствъ (15), (12), (13) въ уравненіе (5), находимъ $\pm b + k\left(l + \frac{1}{m+l}\right) = kl$, откуда $\pm b = \frac{-k}{m+l}$, т. е. $b = \mp \frac{k}{m+l}$ (16), а потому (см. (1)) $c = \pm \frac{k}{m+l}$ (17). Подставивъ значенія b и b' изъ равенствъ (16) и (13) въ уравненіе (3), получимъ $\frac{k^2}{(m+l)^2} + \left(l + \frac{1}{m+l}\right)^2 = 1 + l^2$, откуда $\frac{k^2}{(m+l)^2} = 1 - \frac{1}{(m+l)^2} - \frac{2l}{(m+l)^2} = \frac{(m+l)^2 - 1 - 2l(m+l)}{(m+l)^2}$. Слѣдовательно $k^2 = (m+l)^2 - 1 - 2l(m+l) = m^2 - l^2 - 1$, откуда

$$k = \pm \sqrt{m^2 + l^2 - 1} \quad (18).$$

Итакъ, (см. (15), (16), (17), (18), (12), (13), (14))

$$a = \pm 1, \quad b = \mp \frac{(\pm\sqrt{m^2 + l^2 - 1})}{m + l}, \quad c = \pm \frac{(\pm\sqrt{m^2 + l^2 - 1})}{m + l} \quad (19),$$

$$a' = \pm(\pm\sqrt{m^2 + l^2 - 1}), \quad b' = \pm\left(l + \frac{1}{m+l}\right), \quad c' = \pm\left(m - \frac{1}{m+l}\right) \quad (20),$$

$$k = \pm\sqrt{m^2 + l^2 - 1}.$$

Въ полученныхъ формулахъ можно выбрать по произволу одно изъ значеній радикала $\pm\sqrt{m^2 + l^2 - 1}$; кромѣ того, въ каждой изъ группъ формулъ (19) и (20) (въ одной изъ группъ независимо отъ другой) можно выбрать вездѣ либо верхніе, либо нижніе знаки. Такимъ образомъ получаемъ всего 8 системъ рѣшеній.

С. Конюховъ (Никитовка); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ).

№ 662 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^{4n} - 4x^n - 1 = 0.$$

Заимств. изъ *Supplemento al Periodico di Matematica.*

Представивъ данное выраженіе въ видѣ

$$x^{4n} + 2x^{2n} + 1 - 2x^{2n} - 4x^n - 2 = (x^{4n} + 2x^{2n} + 1) - 2(x^{2n} + 2x^n + 1) =$$

$$= (x^{2n} + 1)^2 - 2(x^n + 1)^2 = \left[(x^{2n} + 1) + \sqrt{2}\,(x^n + 1)\right]\left[(x^{2n} + 1) - \sqrt{2}\,(x^n + 1)\right] = 0,$$

мы видимъ, что оно распадается на два:

$$x^{2n} + \sqrt{2}\,x^n + (1 + \sqrt{2}) = 0, \quad x^{2n} - \sqrt{2}\,x^n + (1 - \sqrt{2}) = 0,$$

откуда, принимая за неизвѣстное x^n, получимъ изъ перваго уравненія

$$x^n = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 - \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm$$

$$\pm \sqrt{-\frac{1}{2} - \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{2}} \quad (1),$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$, а изъ другого уравненія —

$$x^n = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}} \quad (2).$$

Слѣдовательно (см. (1), (2))

$$x = \sqrt[n]{-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{2}}}, \quad x = \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}}.$$

Э. Лейнъкъ (Рига); *С. Конюховъ* (Никитовка); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н/Д); *гаевъ* (Немировъ); *А. Турчаниновъ* (Брестъ); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ); *янъ* (Тифлисъ).

№ 663 (4 сер.). *Доказать, что произведеніе*

$$n(n+1)\ldots(2n-3)(2n-2),$$

гдѣ n *цѣлое положительное число, дѣлится на* 2^{n-1}.

Заимств. изъ *L'Éducation Mathématique.*

Преобразуемъ произведеніе $1.2\ldots(2n-2)$ слѣдующимъ образомъ:

$$1.2.3\ldots(n-1).n(n+1)\ldots(2n-3)(2n-2) =$$

$$= [2.4\ldots(2n-2)][1.3.5\ldots(2n-3)] =$$

$$= [(2.1).(2.2)\ldots2(n-1)][1.3.5\ldots(2n-3)] = 2^{n-1}[1.2\ldots(n-1)][1.3.5\ldots(2n-3)].$$

Итакъ,

$$[1.2.3\ldots(n-1)][n(n+1)\ldots(2n-2)] = [1.2.3\ldots(n-1)].2^{n-1}[1.3\ldots(2n-3)] \quad (1).$$

Дѣля обѣ части равенства (1) на $1.2\ldots(n-1)$, находимъ:

$$n(n+1)\ldots(2n-2) = 2^{n-1}[1.3\ldots(2n-3)],$$

откуда видно, что произведеніе $n(n+1)\ldots(2n-2)$ кратно 2^{n-1}.

Э. Лейнъкъ (Рига); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н/Д); *А. Турчаниновъ* (Брестъ); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго, д. № 66.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА **1906** ГОДЪ НА

РЕМЕСЛЕННУЮ ГАЗЕТУ.

21-й годъ изданія.

ЕЖЕНЕДѢЛЬНОЕ ОБЩЕПОЛЕЗНОЕ изданіе съ **рисунками** и чертежами въ текстѣ образцовъ новыхъ издѣлій, инструментовъ, станковъ, приспособленій и пр. предметовъ по **различнымъ ремесламъ,** а также **кустарнымъ и мелкимъ фабрично-заводскимъ** производствамъ, съ подробными описаніями и наставленіями, къ нимъ относящимися. При этомъ въ **общепонятномъ** изложеніи даются надлежащія **описанія, указанія и рецепты** практическаго свойства.

„РЕМЕСЛЕННАЯ ГАЗЕТА“ необходима спеціальнымъ школамъ, технику, ремесленнику, кустарю, торговцу, сельскому хозяину, любителю ремеслъ и потребителямъ ремесленныхъ издѣлій, т. е. во всякомъ семействѣ.

Кромѣ множества разнообразнѣйшихъ чертежей и рисунковъ, въ „Ремесл. Газетѣ“ будетъ помѣщенъ рядъ **описаній: различныхъ ремесленныхъ производствъ**, новѣйшихъ **изобрѣтеній, усовершенствованій, выставокъ**, музеевъ, **образцовыхъ** ремесленныхъ и техническихъ **школъ,** частныхъ промышленныхъ **мастерскихъ** и пр.

Кромѣ ЕЖЕНЕДѢЛЬНЫХЪ сообщеній о различныхъ **заграничныхъ новостяхъ**, редакція будетъ давать БЕЗПЛАТНО отвѣты и совѣты на запросы гг. подписчиковъ, относящіеся до ихъ спеціальности.

Получая всѣ извѣстнѣйшія иностранныя изданія по различнымъ ремесламъ, **Редакція** располагаетъ лучшими изъ помѣщенныхъ въ нихъ статей и рисунковъ и даетъ возможность своимъ подписчикамъ пользоваться массою полезнаго, необходимаго и дорогого (многимъ недоступнаго) матеріала **за крайне дешевую цѣну**.

Каждый подписчикъ получитъ въ теченіе года:

а) **50 №№** „Рем. Газ.“, содержащихъ до 1000 статей со множествомъ рисунковъ въ текстѣ и приложеніяхъ,

б) иллюстрированный настѣнный календарь и

в) **Двѣнадцать** слѣдующихъ премій-сборниковъ, составленныхъ изъ новѣйшихъ лучшихъ образцовъ, представляющихъ собою точные снимки съ натуры, сдѣланные въ Россіи и за границей, и т. п. изданій—Сборники рисунковъ мебели, столярныхъ и пр. издѣлій, Сборникъ рисунковъ мягкой мебели, Сборникъ рисунковъ драпировокъ для оконъ, дверей и пр., Сборники рисунковъ желѣзныхъ воротъ, оградъ и пр., Сборникъ плотничныхъ и т. п. работъ – дверей, воротъ, оградъ и пр.

Примѣч. I. Эти новые сборники вмѣстѣ съ изданными въ предшествующіе годы могутъ составить рѣдкія и богатыя собранія рисунковъ и чертежей образцовыхъ издѣлій по разнымъ ремесламъ.

Примѣчаніе. II. Эти сборники въ отдѣльной продажѣ будутъ стоить каждый по **1 руб** и болѣе (съ пересылкой).

Примѣчаніе. III. Къ сборникамъ будутъ приложены соотвѣтствующія описанія входящихъ въ составъ ихъ рисунковъ и чертежей.

Каждый подписчикъ всегда можетъ сборникъ, не соотвѣтствующій его нуждамъ, продать лично, или при посредствѣ мѣстнаго книжнаго магазина спеціалисту по соотвѣтствующему ремеслу.

Кромѣ того, будутъ помѣщаемы къ „Рем. Газ.“ образцы новѣйшихъ мужскихъ модъ всѣхъ сезоновъ, а также образцы модной обуви мужской и женской.

Подписавшимся среди года высылаются всѣ вышедшіе №№ съ преміями.

Подписная цѣна: 6 руб въ годъ съ пересылкой и доставкой, за полгода **4** рубля.

Полные экземпляры „Ремесленной Газеты“ со всѣми приложеніями за 1886 г. по 10 р., а за 1887, 1889, 1890, 1891, 1892 (безъ книгъ), 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902 1903, 1904 и 1905 г.г. съ преміями-сборниками рисунковъ по разнымъ ремесламъ – по 12 руб.

Экземпляры за 1885 и 1888 г г. всѣ разошлись.

„Ремесленная газета“ РЕКОМЕНДОВАНА Г. Министромъ Народ. Просвѣщенія: 1) для техническихъ и ремесленныхъ училищъ—мужскихъ и женскихъ; 2) для городскихъ и сельскихъ училищъ; 3) для учительскихъ институтовъ и семинарій, а также 4) для библіотекъ реальныхъ училищъ.

АДРЕСЪ РЕДАКЦІИ: Москва, Долгоруковская улица, домъ № 71.

Редакторъ-Издатель Ученый Инженеръ-Механикъ *К. А. КАЗНАЧЕЕВЪ.*