№ 417.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ѳ. Кагана.

XXXV-го Семестра № 9-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1906.

XXXV Сем. № 9.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

элементарной математики.

№ 417.

Іоны въ тѣлахъ твердыхъ и газообразныхъ.

Профессора **А. Риги.**

*(Продолженіе *).*

Въ электролитахъ свободные іоны, получившіеся отъ соединенія электроновъ съ нейтральными атомами, образуютъ своимъ движеніемъ электрическій токъ. Подобное объясненіе дается теперь и электрическому току, имѣющему мѣсто въ газѣ: его считаютъ состоящимъ изъ іоновъ, движущихся подъ вліяніемъ электрическихъ силъ. Гипотеза **іонизаціи** газовъ, находившая долгое время очень мало защитниковъ, стала теперь общепринятой, благодаря подтвердившимъ её за эти послѣдніе годы многочисленнымъ опытамъ.

Итакъ, по этой гипотезѣ газъ содержитъ въ себѣ свободные іоны. Обыкновенно ихъ количество такъ незначительно, что электропроводность газовъ, обусловливаемая ихъ присутствіемъ, ничтожна. Но, дѣйствуя на газъ посредствомъ нѣкоторой энер-

*) См. № 412 „Вѣстника".

гіи извнѣ, можно создать условія, при которыхъ онъ становится *іонизованнымъ*, т. е. при которыхъ многіе его атомы разлагаются на положительные іоны и отрицательные электроны. Эти последніе, если газъ не достаточно разрѣженъ, присоединяются къ нейтральнымъ атомамъ и образуютъ отрицательные іоны. Нѣкоторые факты указываютъ на то, что іоны могутъ соединяться и съ нейтральными атомами или молекулами въ особыя группы. Такая группа хотя и обладаетъ зарядомъ, соотвѣтствующимъ заряду одного іона, но масса ея во много разъ превосходитъ массу, могущую принадлежать одному іону.

Электропроводность газовъ естественнѣе всего объясняется присутствіемъ наэлектризованныхъ частицъ, свободно двигающихся среди его молекулъ; съ этимъ объясненіемъ вполнѣ согласуются всѣ извѣстные намъ факты и въ особенности слѣдующіе два, на которыхъ мы сейчасъ остановимся.

Если пропускать іонизированный газъ сквозь узкія отверстія, напримѣръ, сквозь пробку изъ стеклянной ваты или сквозь капиллярную металлическую трубку, или, наконецъ, заставлять его проходить въ видѣ пузырьковъ черезъ электропроводную жидкость [12]) (которая, однако, не должна содержать радіоактивныхъ веществъ), то она теряетъ свойство электропроводности. То же происходитъ, если пропускать такой газъ между двумя противоположно заряженными проводниками, такъ что газъ проводитъ токъ отъ одного полюса къ другому. Въ первомъ случаѣ это явленіе объясняется притяженіемъ іоновъ тѣлами, вблизи которыхъ они проходятъ; во второмъ случаѣ каждый проводникъ притягиваетъ къ себѣ и задерживаетъ тѣ іоны, заряды которыхъ противоположны его заряду; такимъ образомъ, въ обоихъ разсмотрѣнныхъ нами случаяхъ газъ становится свободнымъ отъ іоновъ.

Явленія, происходящія въ газѣ, когда онъ служитъ проводникомъ электрическаго тока, также вполнѣ согласуются съ вышеизложенной теоріей. Пояснимъ это примѣромъ. Вообразимъ себѣ двѣ параллельныя металлическія пластинки, одна изъ которыхъ соединена съ изолированнымъ полюсомъ гальванической батареи, а другая—съ электрометромъ. Если теперь воздухъ, заключенный между пластинками, сдѣлать іонизованнымъ, пропуская, напримѣръ, черезъ него Рентгеновскіе лучи, и въ то же время варіировать потенціалъ батареи, то оказывается,

[12]) J. J. Thomson & E. Rutherford.—Phil. Mag. t. 42, p. 392 (1896).

что газъ перестаетъ слѣдовать извѣстному закону Ома, который всегда остается въ силѣ, когда дѣло касается постояннаго электрическаго тока; именно, сила тока въ проводникѣ, опредѣляемая по заряду, который получаетъ въ опредѣленный промежутокъ времени соединенная съ электрометромъ пластинка, растетъ не пропорціонально разности потенціаловъ на его концахъ, а значительно медленнѣе. Болѣе того, когда разность потенціаловъ достигаетъ нѣкоторой опредѣленной величины, сила тока даже совсѣмъ перестаетъ возрастать. Когда сила тока достигаетъ этого предѣла, доходитъ до *насыщенія*, то это обозначаетъ, что всѣ іоны, образовавшіеся въ данный промежутокъ времени подъ дѣйствіемъ Рентгеновскихъ лучей (или, вообще, другой какой-нибудь причины, вызывающей іонизацію), заняты въ это самое время перенесеніемъ электричества. Дальнѣйшее увеличеніе потенціала не можетъ уже производить своего дѣйствія, потому что свободныхъ іоновъ больше нѣтъ.

Наконецъ, еще одно явленіе, констатированное авторомъ настоящаго сочиненія [13]) и получившее подтвержденіе и правильное объясненіе въ изслѣдованіяхъ Дж. Дж. Томсона и Рутерфорда, можетъ быть объяснено очень просто при помощи принятой нами теоріи. Если измѣнять разстояніе между металлическими пластинками, о которыхъ мы говорили выше, то мѣняется и сила тока, проходящаго черезъ заключенный между ними іонизованный воздухъ; но дѣло въ томъ, что измѣненіе это будетъ происходить въ сторону, обратную той, которую можно было бы предполагать: сила тока въ извѣстныхъ предѣлахъ *растетъ, а не убываетъ* съ возрастаніемъ разстоянія между пластинками. Этому легко дать объясненіе, если принять въ соображеніе, что съ увеличеніемъ разстоянія между пластинками увеличивается и количество воздуха, принимающаго участіе въ этомъ явленіи, а вслѣдствіе этого увеличивается и число іоновъ, образующихъ своимъ движеніемъ насыщенный электрическій токъ.

Іоны, двигаясь среди молекулъ газа, сталкиваются съ ними при встрѣчѣ; при этомъ, вслѣдствіе распаденія нейтральныхъ молекулъ, могутъ образоваться новые іоны, а съ другой стороны, противоположно-заряженные іоны могутъ соединяться и образовывать молекулы. Это послѣднее явленіе, т. е. исчезновеніе іоновъ, постоянно имѣетъ мѣсто и оно служитъ причиной того

[13]) A. Righi.—Mem. della R. Acc. di Bologna, 5-a serie, t. VI, p. 252 (1896).

обстоятельства, что подъ вліяніемъ агента, производящаго іонизацію, число іоновъ растетъ лишь до нѣкотораго опредѣленнаго предѣла.

Іоны, образующіеся въ одномъ какомъ нибудь мѣстѣ газа, распространяются путемъ диффузіи по всему пространству, занимаемому этимъ газомъ. При нормальномъ давленіи скорость этой диффузіи ничтожна вслѣдствіе очень частыхъ столкновеній; однако, при дѣйствіи электрическаго поля, скорость диффузіи іоновъ достигаетъ большихъ значеній: изъ первыхъ опредѣленій этой величины [14]), она оказалась равной нѣсколькимъ десяткамъ метровъ въ секунду (50—80 *m. s.*).

Причинами, вызывающими іонизацію, могутъ служить лучи Рентгеновскіе, ультрафіолетовые, катодные, лучи, излучаемые радіоактивными веществами и, наконецъ, нагрѣваніе до достаточно высокой температуры. Степень іонизаціи можетъ быть бо̀льшей либо меньшей въ зависимости отъ интенсивности причинъ, ее вызывающихъ; но, какъ было сказано выше, для нея существуетъ нѣкоторый предѣлъ, котораго она превзойти не можетъ, вслѣдствіе постояннаго возстановленія нейтральныхъ атомовъ и молекулъ, на которое уходятъ всѣ вновь образующіеся іоны.

Есть, однако, еще одна причина іонизаціи, къ которой, при внимательномъ изслѣдованіи, сводятся всѣ вышеупомянутыя причины: она заключается въ столкновеніи іоновъ или электроновъ (нѣкоторое, хотя бы переходное, количество которыхъ, вѣроятно, содержитъ въ себѣ газъ при нормальномъ давленіи) съ атомами и молекулами. Іонъ, обладающій достаточно большой скоростью, сможетъ сообщить энергію, необходимую, чтобы преобразовать атомъ въ положительный іонъ и отрицательный электронъ, или равнымъ образомъ обратить молекулу въ два іона противуположныхъ знаковъ.

Разсмотримъ вкратцѣ всѣ эти различные способы іонизаціи газа.

Свѣтовые лучи, въ особенности ультрафіолетовые, могутъ вызывать іонизацію газа двоякимъ образомъ.

Если они падаютъ на твердыя или жидкія тѣла, то послѣднія испускаютъ отрицательные электроны; подъ вліяніемъ этихъ лучей тѣла, заряженныя отрицательнымъ электричествомъ, быстро теряютъ свой зарядъ и даже пріобрѣтаютъ, какъ это было по-

[14]) A. Righi.—Atti della R. Ist. Veneto, serie 6-a, t. VII (1889).

казано авторомъ [15]), положительный зарядъ. Этотъ опытъ обыкновенно производится надъ металлами, потому что на жидкостяхъ вліяніе лучей сказывается очень слабо, а твердыя діэлектрики труднѣе поддаются количественнымъ изслѣдованіямъ; въ качествѣ активнаго излученія пользуются ультрафіолетовыми лучами Вольтовой дуги или электрической искры, хотя и видимые лучи, посылаемые нѣкоторыми тѣлами, напримѣръ, амальгамированнымъ цинкомъ или alcali metallen, способны производить замѣтное дѣйствіе. При достаточной силѣ электрическаго поля, вызваннаго отрицательнымъ зарядомъ нашего тѣла, испускаемые отрицательные электроны могутъ получить достаточныя скорости, чтобы іонизировать своими толчками нейтральные атомы.

Однако, наиболѣе преломляемые ультрафіолетовые лучи, производимые электрическими искрами, способны и непосредственно іонизировать газъ, черезъ который они проходятъ; это обнаружилъ П. Ленардъ, [16]) подвергая наэлектризованныя тѣла дѣйствію лучей электрической искры, образуемыхъ между двумя концами аллюминіевыхъ проволокъ. Наэлектризованныя тѣла теряютъ свой зарядъ приблизительно съ одинаковой быстротой, причемъ она не зависитъ ни отъ того, заряжены ли онѣ положительно или отрицательно, ни отъ ихъ природы, ни отъ состоянія ихъ поверхности. Поэтому потеря электрическаго заряда объясняется дѣйствіемъ лучей не на поверхность наэлектризованнаго тѣла, а на массу газа, сквозь который проходятъ эти лучи; дѣйствіе это и состоитъ въ іонизаціи газа. Это объясненіе подтверждается слѣдующимъ опытомъ, который можетъ быть легко произведенъ и другими іонизирующими агентами. Если струю воздуха подвергнуть іонизаціи въ нѣкоторомъ опредѣленномъ мѣстѣ и направить на какое-нибудь наэлектризованное тѣло, то оно разряжается; но лишь только причина, производящая іонизацію, будетъ устранена, струя воздуха теряетъ способность производить разрѣженіе.

Повидимому, ультрафіолетовыя волны только съ самымъ короткимъ періодомъ колебанія способны непосредственно вызывать замѣтную іонизацію въ газахъ. Подтвержденіе этому можно видѣть въ томъ, что описанный опытъ удается только въ томъ случаѣ, если путь, проходимый іонизованнымъ воздухомъ,

[15]) A. Righi.—Rend. della R. Acc. dei Lincei 1888.

[16]) P. Lenard—Drude's Ann. t. 1, p. 488, (1900).

не превосходитъ нѣсколькихъ сантиметровъ; а наиболѣе преломляемые ультрафіолетовые лучи, какъ извѣстно, поглощаются очень быстро воздухомъ при нормальномъ давленіи.

Итакъ, катодные лучи представляютъ собою движущіеся отрицательные электроны, которые іонизируютъ газъ; нѣсколько позже мы остановимся на выясненіи деталей этого явленія.

Рентгеновскіе лучи вѣроятнѣе всего представляютъ собой колебательное движеніе эѳира, вызываемое мгновенными измѣненіями скоростей электроновъ; іонизація газа, происходящая подъ дѣйствіемъ этихъ лучей, должно быть, имѣетъ причину въ электрическихъ импульсахъ, которые атомы газа получаютъ непосредственно отъ электроновъ.

Наконецъ, съ повышеніемъ температуры, которому соотвѣтствуетъ возрастаніе скоростей атомовъ и, вѣроятно, скоростей колебанія отрицательныхъ электроновъ, эти послѣдніе стремятся освободиться отъ соединенія съ положительной частью атома. Раскаленная металлическая проволока іонизируетъ газъ, находящійся съ ней въ соприкосновеніи. Точно также раскаленные газы, исходящіе изъ пламени, являются всегда сильно іонизированными.

Чтобы молекулы газа оставались іонизированными подъ вліяніемъ тѣхъ іоновъ, которые содержатся въ этомъ газѣ, обыкновенно необходимо, чтобы газъ былъ подвергнутъ дѣйствію достаточно интенсивныхъ электрическихъ силъ. При очень слабомъ электрическомъ полѣ іоны хотя и подвергаются дѣйствію электрической силы, но скорости ихъ между двумя послѣдовательными столкновеніями будутъ слишкомъ малы. Въ этомъ случаѣ результатомъ этихъ столкновеній является лишь то, что скорость іоновъ не можетъ превысить нѣкотораго, весьма низкаго, предѣла величины, такъ какъ приращеніе энергіи движенія іоновъ переходитъ на молекулы, съ которыми они сталкиваются; траэкторіи іоновъ не могутъ значительно отличаться отъ силовыхъ линій электрическаго поля, или другими словами, они должны двигаться приблизительно по направленію тѣхъ силъ, которыя на нихъ дѣйствуютъ. Явленіе, извѣстное подъ названіемъ *электрической тѣни,* и другія аналогичныя явленія представляютъ собой прямое слѣдствіе этого. Въ другой статьѣ мы подробно описали эти явленія. [17])

[17]) A. Righi.—Jl moto dei ioni etc. – Attualità Scientifiche I; Zanichelli, editore, Bologna. 1903.

Если же газъ находится подъ дѣйствіемъ сильнаго электрическаго поля, то іонизація совершается посредствомъ толчковъ, и это обстоятельство позволяетъ дать удовлетворительное объясненіе цѣлому ряду загадочныхъ и разнообразныхъ явленій, сопровождающихъ электрическіе разряды. Останавливаться подробно на этихъ явленіяхъ значило бы уклониться отъ вопроса, которымъ мы занимаемся въ настоящей главѣ; однако, для лучшаго уясненія дальнѣйшаго будетъ полезно привести въ качествѣ примѣра объясненіе причины двухъ слоевъ—отрицательнаго свѣта и заключающагося между ними темнаго пространства, образующихся при разрядахъ въ сильно разрѣженномъ газѣ.

Это явленіе вызывается немногочисленными іонами и электронами, содержащимися въ газѣ, а можетъ быть также и отрицательными электронами, испускаемыми катодами. Эти электроны двигаются съ возрастающей скоростью, которая быстро становится достаточно большой, чтобы іонизировать на нѣкоторомъ разстояніи отъ катода молекулы газа посредствомъ толчковъ, образуя такъ называемое второе отрицательное сіяніе. Такимъ образомъ, это сіяніе представляетъ собой тотъ участокъ газа, гдѣ происходитъ іонизація. Образовавшіеся при этомъ положительные іоны гонятся электрической силой къ катоду и, приблизившись къ нему, обладаютъ достаточной скоростью, чтобы іонизировать молекулы газа; этимъ объясняется появленіе перваго слоя отрицательнаго сіянія.

Электроны, образовавшіеся въ этомъ участкѣ, будутъ, въ свою очередь, двигаться, удаляясь отъ катода; оба участка, въ которыхъ происходитъ іонизація, снабжаютъ другъ друга необходимыми для этого іонами и электронами. Такимъ образомъ, темное катодное пространство есть не что иное, какъ то мѣсто, которое должны проходить электроны, образующіе катодные лучи и положительные іоны, несущіеся къ катоду, раньше чѣмъ они пріобрѣтутъ достаточную скорость, чтобы вызывать іонизацію.

Не станемъ слѣдовать за отрицательными электронами послѣ того, какъ они вышли изъ перваго отрицательнаго слоя; остановимся лишь на томъ, что происходитъ съ положительными іонами, когда они достигаютъ катода. Нѣкоторые изъ нихъ, конечно, нейтрализуются, соединяясь съ отрицательными электронами; другіе же, благодаря своимъ скоростямъ или благодаря тому, что они вслѣдствіе толчковъ мѣняютъ свое направленіе, могутъ обходить катодъ; иногда же они пронизываютъ его, если катодъ состоитъ изъ пористаго вещества или металлической сѣтки. Тогда положительные іоны образуютъ по другую сторону катода *положительные* или *анодные лучи*, вполнѣ аналогичные лучамъ катоднымъ; имъ часто присвоивается названіе *канальныхъ лучей* (Kanalstrahlen), данное Гольдштейномъ.

Электрическое поле или магнитное отклоняютъ также и положительные лучи, но въ направленіи противоположномъ тому, которое производятъ катодные лучи. Отсюда можно заключить, что эти лучи состоятъ изъ движущихся частицъ, сильно наэлектризованныхъ положительнымъ электричествомъ. Отклоненія анодныхъ лучей, при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ, однако, значительно меньше, чѣмъ соотвѣтственныя отклоненія лучей катодныхъ; а это обстоятельство указываетъ на то, что массы частицъ, образующихъ положительные лучи, значительно больше массъ отрицательныхъ электроновъ, составляющихъ катодные лучи: по величинѣ—онѣ одного порядка съ массами атомовъ или электролитиическихъ іоновъ. Такимъ образомъ, въ данномъ случаѣ мыимѣемъ дѣло не съ положительными экектронами, а съ іонами или можетъ быть даже цѣлыми группами іоновъ.

Послѣ того какъ нами установлено, что электрическій токъ какъ въ твердыхъ тѣлахъ, такъ и въ газообразныхъ обусловливается перенесеніемъ электричества частицами вещества, гипотеза о твердыхъ проводникахъ, изложенная въ первой главѣ, становится еще болѣе естественной вслѣдствіе ея аналогичности съ только что изложенной теоріей. А такъ какъ, повидимому, лишь отрицательные электроны могутъ существовать въ изолированномъ состояніи, то отсюда можно заключить, что электрическій токъ въ какомъ-нибудь проводникѣ и состоитъ, по крайней мѣрѣ, изъ движущихся отрицательныхъ электроновъ. Металлы не представляютъ собою непреодолимаго препятствія для движенія электроновъ; это подтверждается тѣмъ обстоятельствомъ, что катодные лучи, какъ мы это видѣли выше, способны проходить и сквозь металлы. Не входя въ разсмотрѣніе подробностей этого явленія, скажемъ только, что такая теорія сущности электрическаго тока позволяетъ дать простое объясненіе нѣкоторымъ его свойствамъ, напримѣръ, пропорціональности существующей между теплопроводностью и электропроводностью различныхъ тѣлъ, а также нѣкоторымъ оптическимъ свойствамъ металловъ.

Такимъ образомъ, и явленія этого рода не только не противорѣчатъ теоріи электроновъ, но, напротивъ, при ея посредствѣ получаютъ простое и естественное объясненіе.

Дѣленіе окружности на равныя части.

Проф. Г. Вебера.

(Переводъ съ нѣмецкаго).

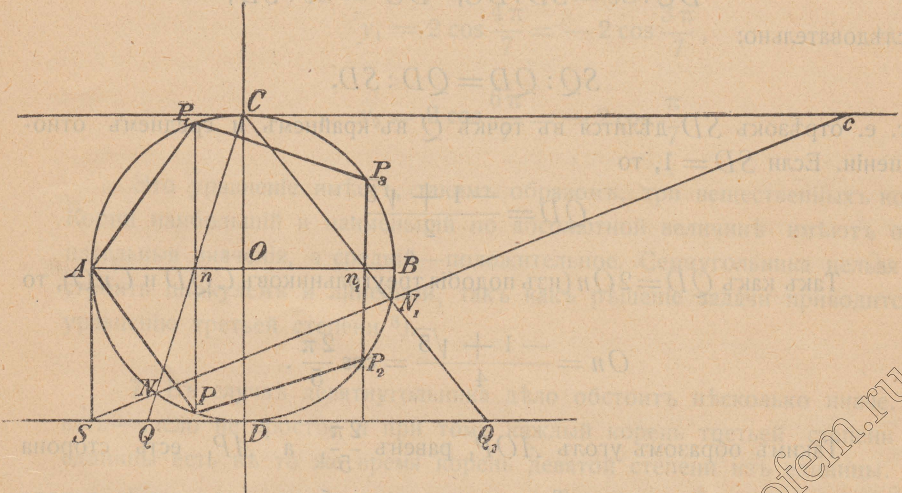
Изъ сочиненія „Энциклопедія элементарной Алгебры“.

*(Окончаніе *).*

5. Штаудтъ (v. Staudt) далъ очень изящное построеніе правильнаго пятиугольника. Это построеніе даетъ сразу всѣ пять вершинъ. Оно изображено на фиг. 23.

Проведемъ въ кругѣ два взаимно перпендикулярныхъ діаметра AB и CD и въ точкахъ A, C, D проведемъ касательныя къ кругу, т. е. перпендикуляры къ діаметрамъ.

Отложимъ отрѣзокъ Cc, равный двойному діаметру, т. е., если радіусъ $=1$, то $Cc=4$; затѣмъ проведемъ прямую cS. Она пересѣчетъ окружность въ двухъ точкахъ N и N_1. Соединимъ прямыми точки C и N, C и N_1; эти прямыя пересѣкутъ діаметръ AB въ точкахъ n и n_1. Если



Фиг. 23.

въ этихъ точкахъ возставимъ къ AB перпендикуляры, то пересѣчемъ окружность въ четырехъ точкахъ P, P_1, P_2 и P_3, которыя вмѣстѣ съ A будутъ вершинами правильнаго пятиугольника.

*) См. № 416 „Вѣстника“.

Доказательство:

Треугольникъ SNQ подобенъ треугольнику cNC (равны соотвѣтствующіе углы). Слѣдовательно,

$$SQ : Cc = NQ : NC;$$

по теоремѣ относительно касательной и сѣкущей

$$QD^2 = NQ \cdot QC,$$

откуда

$$SQ : Cc = QD^2 : NC \cdot QC$$

или

$$SQ : QD = Cc \cdot QD : NC \cdot QC.$$

Хорда DN (не обозначенная на чертежѣ) перпендикулярна къ QC, а потому изъ прямоугольнаго треугольника QDC получимъ:

$$DC^2 = NC \cdot QC.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ:

$$SQ : QD = Cc \cdot QD : DC^2.$$

Съ другой стороны, по построенію, $Cc = 2DC = 4SD$; поэтому

$$DC : Cc = SD : DC, \quad DC^2 = Cc \cdot SD;$$

слѣдовательно:

$$SQ : QD = QD : SD,$$

т. е. отрѣзокъ SD дѣлится въ точкѣ Q въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Если $SD = 1$, то

$$QD = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Такъ какъ $QD = 2On$ (изъ подобія треугольниковъ CQD и CnO), то

$$On = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \cos\frac{2\pi}{5}.$$

Такимъ образомъ уголъ AOP_1 равенъ $\frac{2\pi}{5}$, а AP_1 есть сторона правильнаго пятиугольника. Точно такимъ же образомъ выводимъ, исходя изъ подобія треугольниковъ SQ_1N_1 и cCN_1, что

$$On_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \cos\frac{\pi}{5},$$

а слѣдовательно уголъ $P_3OB = \frac{\pi}{5}$.

6. Для дѣленія окружности на 7 частей имѣемъ прежде всего уравненіе:

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-3} = -1,$$

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y_1, \quad \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y_2.$$

Въ виду соотношенія (3) на стр. 185 — y_1 есть сторона правильнаго 14-тиугольника. Далѣе,

$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y^2 - 2,$$

$$\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y^3 - 3y;$$

слѣдовательно, для y получаемъ уравненіе 3-ей степени:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0,$$

корни котораго суть:

$$y = 2\cos\frac{2\pi}{7},$$

$$y_1 = 2\cos\frac{4\pi}{7} = -2\cos\frac{3\pi}{7},$$

$$y_2 = 2\cos\frac{6\pi}{7} = -2\cos\frac{\pi}{7}.$$

Это уравненіе имѣетъ, такимъ образомъ, три вещественныхъ корня. Корни наибольшій и наименьшій по абсолютной величинѣ имѣютъ отрицательныя значенія, а средній—положительное. Семиугольника нельзя построить циркулемъ и линейкой, такъ какъ рѣшеніе задачи приводится къ уравненію третьей степени [8]).

7. Въ случаѣ девятиугольника дѣло обстоитъ нѣсколько иначе. Девять—число не простое и при томъ каждый корень третьей степени изъ единицы есть въ то же время корень девятой степени изъ единицы.

Если ε есть корень девятой степени изъ единицы, то ε^3 есть ко-

---

[8]) Если конструктивная задача аналитически приводится къ уравненію 3-ей степени, то отсюда безъ дальнѣйшихъ оговорокъ еще нельзя заключить, что построеніе не можетъ быть выполнено циркулемъ и линейкой. Это видно уже изъ того, что уравненіе 3-ей степени можетъ имѣть и раціональный корень. Чтобы утверждать, что задача не можетъ быть рѣшена циркулемъ и линейкой, требуется болѣе глубокій анализъ соотвѣтствующаго уравненія. Объ этомъ подробнѣе въ слѣдующей главѣ.

рень третьей степени изъ единицы. Ясно, что если этотъ корень третьей степени не сводится къ 1, то само ε не представляетъ собой корня третьей степени изъ единицы. Поэтому (п. 2)

$$\varepsilon^6 + \varepsilon^3 + 1 = 0.$$

Это равенство остается въ силѣ, если ε замѣнимъ черезъ ε^2, ε^4, ε^5, ε^7, ε^8. Мы получили уравненіе 6-ой степени съ 6-ью корнями. Но $\varepsilon^6 + \varepsilon^3 + 1 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} + 1$. Если положимъ

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1},$$

$$y^3 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} + 3y,$$

то для y получимъ уравненіе третьей степени:

$$y^3 - 3y + 1 = 0.$$

Корни этого уравненія суть:

$$y = 2\cos\frac{2\pi}{9}, \quad y_1 = 2\cos\frac{4\pi}{9},$$

$$y_2 = 2\cos\frac{8\pi}{9} = -2\cos\frac{\pi}{9};$$

два изъ нихъ имѣютъ положительныя значенія, одинъ—отрицательное; согласно § 96 (3), y_1 есть сторона правильнаго 18-тиугольника. Понятно, что и девятиугольника нельзя построить циркулемъ и линейкой. Еще хуже обстоитъ дѣло съ 11-тиугольникомъ: при $y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$ приходимъ къ уравненію 5-ой степени:

$$y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0.$$

8. Дѣленіе окружности на 13 частей приводится къ одному квадратному уравненію и одному кубичному. Къ этому результату приводитъ слѣдующій принципъ, примѣнимый и къ болѣе сложнымъ случаямъ. Корни 13 степени изъ единицы:

$$\varepsilon, \quad \varepsilon^2, \quad \varepsilon^3, \quad \varepsilon^4, \quad \varepsilon^5, \quad \varepsilon^6,$$

$$\varepsilon^{-1}, \ \varepsilon^{-2}, \ \varepsilon^{-3}, \ \varepsilon^{-4}, \ \varepsilon^{-5}, \ \varepsilon^{-6}$$

могутъ быть расположены въ видѣ цикла такъ, что каждый изъ нихъ будетъ получаться изъ предыдущаго однимъ и тѣмъ же способомъ, именно возвышенiемъ въ квадратъ:

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon^{-5},\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^6,\ \varepsilon^{-1},\ \varepsilon^{-2},\ \varepsilon^{-4},\ \varepsilon^5,\ \varepsilon^{-3},\ \varepsilon^{-6};$$

послѣднее по возвышенiи въ квадратъ даетъ опять первое: $\varepsilon^{-12}=\varepsilon$ [9]). Если брать члены этого ряда черезъ одинъ, то получимъ два ряда, въ каждомъ изъ которыхъ послѣдующiй членъ равенъ предыдущему въ 4-ой степени. Составимъ суммы этихъ членовъ

$$\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^3+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-4}+\varepsilon^{-3}=\eta,$$
$$\varepsilon^2+\varepsilon^{-5}+\varepsilon^6+\varepsilon^{-2}+\varepsilon^5+\varepsilon^{-6}=\eta_1,$$

и обозначимъ ихъ сокращенно

$$\eta=\Sigma\varepsilon^\alpha,\quad \eta_1=\Sigma\varepsilon^\beta,$$
$$\alpha\equiv\pm1,\ \pm3,\ \pm4,\quad \beta\equiv\pm2,\ \pm5,\ \pm6.$$

Обратимъ теперь вниманiе на слѣдующее важное обстоятельство: если a есть одно изъ чиселъ α, то числа $a\alpha$ и $a\beta$, по модулю 13, соотвѣтственно сравнимы съ числами α и β; точно также, если b есть одно изъ чиселъ β, то, наоборотъ, числа $b\alpha$ сравнимы съ числами β, а числа $b\beta$ съ числами α [10]).

Эта теорема есть слѣдствiе болѣе общихъ принциповъ. Въ данномъ случаѣ легко убѣдиться въ ея справедливости съ помощью испытанiя чиселъ α и β.

Назовемъ суммы η, η_1 **первыми перiодами**. Обѣ эти суммы могутъ быть выражены въ квадратныхъ корняхъ, если будетъ извѣстна ихъ

---

[9]) Возвышая, напримѣръ, ε^4 въ квадратъ, мы получимъ ε^8; но такъ какъ $\varepsilon^{13}=1$, то $\varepsilon^8=\varepsilon^8:\varepsilon^{13}=\varepsilon^{-5}$. Точно такъ же

$$(\varepsilon^{-6})^2=\varepsilon^{-12}=\varepsilon^{-12}.\ \varepsilon^{13}=\varepsilon.$$

[10]) Въ этомъ приходится убѣдиться непосредственно. Если, напримѣръ, $a=+3$, то числа $a\alpha$ и $a\beta$ будутъ:

$$\pm3,\ \pm9,\ \pm12;\ \pm6,\ \pm15,\ \pm18.$$

Такъ какъ

$$\pm9\equiv\mp4,\ \pm12\equiv\mp1,\ \pm15\equiv\pm2,\ \pm18\equiv\pm5\quad(\text{mod. }13).$$

то числа $a\alpha$ сравнимы съ числами α, а числа $a\beta$ — съ числами β. Если же возьмемъ b равнымъ, скажемъ—5, то получимъ:

$$\mp5,\ \mp15,\ \mp20;\ \mp10,\ \mp25,\ \mp30.$$

Такъ какъ

$$\mp15\equiv\mp2,\ \mp20\equiv\pm6,\ \mp10\equiv\mp3,\ \mp25\equiv\pm1,\ \mp30\equiv\mp4\quad(\text{mod. }13),$$

то числа $b\alpha$ сравнимы съ числами β, а числа $b\beta$ съ числами α.

сумма $\eta + \eta_1$ и произведеніе $\eta\eta_1$. Но $\eta + \eta_1$ есть сумма всѣхъ ε^k, т. е. равняется -1. Произведеніе $\eta\eta_1$ можно представить въ видѣ:

$$\eta\eta_1 = \Sigma\,\varepsilon^{\alpha+\beta}.$$

Показатель $\alpha + \beta$, какъ легко убѣдиться непосредственно, никогда не равенъ нулю и никогда не дѣлится на 13. Слѣдовательно, въ число 36 слагаемыхъ суммы $\Sigma\varepsilon^{\alpha+\beta}$ не входитъ 1.

Въ суммѣ $\Sigma\varepsilon^{\alpha+\beta}$ различныхъ слагаемыхъ имѣется только 12; каждое изъ нихъ повторяется три раза. Въ этомъ можно убѣдиться либо вычисляя всѣхъ показателей $\alpha + \beta$ непосредственно, либо съ помощью слѣдующаго простого разсужденія. Одного взгляда на значенія α и β достаточно, чтобы убѣдиться въ существованіи трехъ такихъ суммъ $\alpha + \beta$, $\alpha' + \beta'$, $\alpha'' + \beta''$, что

$$\alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \equiv \alpha'' + \beta'' \equiv k. \text{ [11]} \qquad (\text{mod. } 13)$$

Но тогда для любого числа n, не дѣлящагося на 13,

$$n\alpha + n\beta \equiv n\alpha' + n\beta' \equiv n\alpha'' + n\beta'';$$

всѣ эти три суммы заключаются между числами $\alpha + \beta$. Дѣйствительно, $n\alpha$ и $n\beta$ не могутъ находиться оба ни среди чиселъ α, ни среди чиселъ β; слѣдовательно, одно изъ нихъ фигурируетъ среди чиселъ α, а другое среди чиселъ β. И такъ, если положимъ $\alpha + \beta = k$, то каждый показатель nk долженъ повториться, по меньшей мѣрѣ, три раза; но всѣхъ членовъ суммы $\Sigma\varepsilon^{\alpha+\beta}$ имѣется 36; слѣдовательно, каждый членъ повторяется три раза. Въ результатѣ $\eta\eta_1 = 3\,\Sigma\varepsilon^k = -3$. Числа η и η_1 опредѣляются изъ уравненій:

$$\eta + \eta_1 = -1,$$
$$\eta\eta_1 = -3.$$

Если первое изъ этихъ равенствъ возведемъ въ квадратъ и вычтемъ учетверенное второе, то получимъ:

$$(\eta + \eta_1)^2 - 4\eta\eta_1 = (\eta - \eta_1)^2 = 13,$$

откуда

$$\eta = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \quad \eta_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}.$$

Изъ слѣдующихъ равенствъ легко видѣть, что мы правильно рас-

---

[11]) Напримѣръ,

$$-1 + 2, \; +3 - 2, \; -4 + 5),$$

Такимъ образомъ въ этомъ разсужденіи можно примѣнить $k = 1$.

предѣлили знаки при $\sqrt{13}$:

$$\eta = 2\cos\frac{2\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13} + 2\cos\frac{8\pi}{13} =$$

$$= 2\cos\frac{2\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13} - 2\cos\frac{5\pi}{13}$$

$$\eta_1 = 2\cos\frac{4\pi}{13} - 2\cos\frac{3\pi}{13} - 2\cos\frac{\pi}{13}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, въ первой четверти косинусъ имѣетъ положительное значеніе и большему углу соотвѣтствуетъ меньшій косинусъ; слѣдовательно, η_1 имѣетъ отрицательное значеніе, а $\eta = -\frac{3}{\eta_1}$ положительное.

9. Когда η и η_1 найдены, y опредѣляется изъ кубическаго уравненія. Дѣйствительно, пусть

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}, \quad y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4}, \quad y_2 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3},$$

что даетъ:

$$y + y_1 + y_2 = \eta,$$

$$yy_1 + yy_2 + y_1y_2 = \Sigma\varepsilon^k = -1,$$

$$yy_1y_2 = 2 + \eta_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

Слѣдовательно, y, y_1 и y_2 суть корни кубическаго уравненія

$$y^3 - \eta y^2 - y + \frac{\sqrt{13} - 3}{2} = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ два положительныхъ корня и одинъ отрицательный, а именно:

$$2\cos\frac{2\pi}{13}, -2\cos\frac{5\pi}{13}, \quad 2\cos\frac{6\pi}{13};$$

наименьшій положительный корень $2\cos\frac{6\pi}{13}$ даетъ сторону 26-тиугольника.

10. Можно также сначала составить раціональное уравненіе третьей степени. Пусть

$$\zeta = \varepsilon + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^5 = 2\cos\frac{2\pi}{13} - 2\cos\frac{3\pi}{13},$$

$$\zeta_1 = \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-3} = 2\cos\frac{4\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13},$$

$$\zeta_2 = \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-6} = -2\cos\frac{5\pi}{13} - 2\cos\frac{\pi}{13}.$$

Непосредственное вычисленіе даетъ:

$$zz_1 = -1 + z_1, \quad z_1 z_2 = -1 + z_2, \quad zz_2 = -1 + z,$$
$$z + z_1 + z_2 = -1,$$
$$zz_1 + zz_2 + z_1 z_2 = -4,$$
$$zz_1 z_2 = -z_2 + z_1 z_2 = -1,$$

т. е. z, z_1 и z_2 суть корни уравненія:

$$z^3 - z^2 - 4z + 1 = 0.$$

Если извѣстны корни z, z_1 и z_2 этого уравненія, то

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}, \quad y' = \varepsilon^5 + \varepsilon^{-5}$$

опредѣляются, какъ корни квадратнаго уравненія

$$y^2 - zy + z_2 = 0.$$

Правильный семнадцатиугольникъ.

1. Доказавъ, что правильный семнадцатиугольникъ можно построить циркулемъ и линейкой, Гауссъ обогатилъ элементарную геометрію очень интереснымъ открытіемъ *).

Если мы захотимъ расположить корни 17-ой степени изъ единицы въ такомъ порядкѣ, чтобы каждый послѣдующій былъ равенъ квадрату предыдущаго, то найдемъ, что такимъ образомъ можно получить только восемь корней:

$$\varepsilon, \ \varepsilon^2, \ \varepsilon^4, \ \varepsilon^8, \ \varepsilon^{-1} \ \varepsilon^{-2} \ \varepsilon^{-4} \ \varepsilon^{-8},$$

ибо ε^{-16} опять равно ε.

Чтобы получить всѣ ε^k, составимъ подобный же рядъ, начинающійся съ ε^3. Положимъ

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-8} = \eta,$$
$$\varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-7} = \eta_1.$$

---

*) Disq. arithmeticae, sectio septima. Разсказываютъ, что Архимедъ завѣщалъ построить надъ своей могилой памятникъ въ видѣ шара и цилиндра. Подобно Архимеду, Гауссъ выразилъ желаніе, чтобы на его памятникѣ была увѣковѣчена фигура семнадцатиугольника. Этотъ маленькій разсказъ показываетъ, какое значеніе самъ Гауссъ приписывалъ своему открытію. Это желаніе Гаусса не было, однако, достойнымъ образомъ выполнено. На его могильномъ камнѣ этого рисунка нѣтъ, но на памятникѣ, воздвигнутомъ Гауссу въ Брауншвейгѣ, статуя стоитъ на семнадцатиугольникѣ, правда, едва замѣтномъ для зрителя.

Тогда $\eta + \eta_1 = -1$; для произведенія получимъ формулу

$$\eta\eta_1 = \Sigma\varepsilon^{\alpha+\beta};$$

α принимаетъ значенія показателей перваго ряда, β — втораго. Σ содержитъ 64 члена. Совершенно тѣмъ же путемъ, какъ въ случаѣ 13-тиугольника, мы заключаемъ, что въ Σ каждый членъ ε^k повторяется четыре раза. Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$\eta\eta_1 = -4, \quad \eta + \eta_1 = -1,$$

откуда $\eta - \eta_1 = \sqrt{17}$, а слѣдовательно,

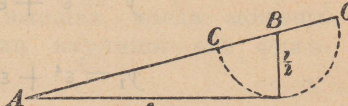
$$\eta = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \quad \eta_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}.$$

Представляя η_1 въ видѣ

$$\eta_1 = 2\cos\frac{6\pi}{17} - 2\cos\frac{5\pi}{17} - 2\cos\frac{7\pi}{17} - 2\cos\frac{3\pi}{16},$$

убѣждаемся, что η_1 имѣетъ отрицательное, а η положительное значеніе. Слѣдовательно, знаки при $\sqrt{17}$ нами взяты правильно.

2. Чтобы построить η и η_1, пользуемся тѣмъ, что 17 есть сумма квадратовъ $4^2 + 1^2$. Построимъ прямоугольный треугольникъ съ катетами 2 и $\frac{1}{2}$. Его гипотенуза будетъ $\frac{1}{2}\sqrt{17}$. Прибавляя и отнимая отъ гипотенузы отрѣзокъ $\frac{1}{2}$, получимъ η и $-\eta_1$ ($AC = \eta$, $AC' = -\eta_1$). Суммы η, η_1 называются первыми періодами. При помощи ихъ можно составить четыре вторыхъ періода, суммируя члены чрезъ одинъ:



Фиг. 24.

$$\zeta = \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} = 2\cos\frac{2\pi}{17} + 2\cos\frac{8\pi}{17},$$

$$\zeta_1 = \varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-8} = 2\cos\frac{4\pi}{17} - 2\cos\frac{\pi}{17},$$

$$\zeta_2 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^5 = 2\cos\frac{6\pi}{17} - 2\cos\frac{7\pi}{17},$$

$$\zeta_3 = \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^{-7} = -2\cos\frac{5\pi}{17} - 2\cos\frac{3\pi}{17}.$$

Складывая и умножая, получимъ:

$$z+z_1=\eta,\quad zz_1=-1,$$

$$z_2+z_3=\eta_1,\quad z_2z_3=-1.$$

Отсюда

$$z=\frac{\eta+\sqrt{\eta_2+4}}{2},\quad z_1=\frac{\eta_1-\sqrt{\eta^2+4}}{2}$$

$$z_2=\frac{\eta_1+\sqrt{\eta_1{}^2+4}}{2},\quad z_3=\frac{\eta_1-\sqrt{\eta_1{}^2+4}}{2}.$$

Имѣя въ виду формулы для z, въ зависимости отъ косинусовъ, убѣждаемся, что знаки при радикалахъ поставлены правильно. Числа z_1 и z_3 имѣютъ отрицательныя значенія, z и z_2—положительныя.

Чтобы построить z и z_1, возьмемъ прямоугольный треугольникъ съ катетами 1 и $\frac{1}{2}\eta$; его гипотенуза будетъ $\frac{1}{2}\sqrt{\eta^2+4}$; если прибавимъ къ гипотенузѣ $\frac{1}{2}\eta$ и отнимемъ $\frac{1}{2}\eta$, то соотвѣтственно получимъ z и $-z_1$. Подобнымъ же образомъ можно построить z_2 и z_3 по η.

Наконецъ, пусть

$$y=\varepsilon+\varepsilon^{-1}=2\cos\frac{2\pi}{17},$$

$$y_1=\varepsilon^4+\varepsilon^{-4}=2\cos\frac{8\pi}{17};$$

тогда

$$y+y_1=z,\quad yy_1=z_2,$$

откуда

$$y=\frac{z+\sqrt{z^2-4z_2}}{2},\quad y_1=\frac{z-\sqrt{z^2-4z_2}}{2};$$

обѣ эти формулы легко построить. Сторона правильнаго 34-угольника есть y_1.

Штаудтъ (v. Staudt) далъ оченъ изящное построеніе семнадцатиугольника, аналогичное тому, которое онъ предложилъ для построенія правильнаго пятиугольника (Crelles Journal, томъ 24).

РЕЦЕНЗІИ.

Школьная учоба и Реформа Школы. **Оливера Лоджа**, Ректора Бирмингамскаго Университета. 1905 г.

Эта книжка содержитъ четыре лекціи, которыя авторъ прочиталъ передъ собраніемъ лицъ, приготовляющихся къ профессіи учителей средней школы, развивая мысли, положенныя пр. Перри въ основу предложенной имъ реформы преподаванія. [1])

Свой собственный взглядъ на цѣли образованія Лоджъ резюмируетъ на стр. 71—77 своей книжки: „Изученіе всякаго предмета, разъ что его нашли нужнымъ преподавать, должно доводить до степени примѣнимаго значенія, а не бросать раньше". Понятіе о „примѣнимости" или „пользѣ" знанія авторъ понимаетъ не въ узко-утилитарномъ смыслѣ, но считаетъ полезнымъ всякое знаніе, увеличивающее работоспособность его обладателя, и разъясняетъ свои мысли примѣрами. Полезно не только познаніе, которое увеличиваетъ доходы обладателя или „количество бутербродовъ на землѣ", но всякое знаніе, дающее ему возможность примѣнить его на свою пользу или удовольствіе, или на пользу и удовольствіе другихъ.

Такъ, первая степень пользы отъ изученія языка чужой страны получится только тогда, когда можешь спросить дорогу и объясняться въ гостинницахъ этой страны.

Вторая степень, когда можешь свободно читать книги и даже разговаривать на этомъ языкѣ, а высшая, когда можешь самъ литературно писать на немъ или изучишь его филологически.

Отъ изученія математики первая степень пользы получается, когда можешь подводить итоги, какъ банковый конторщикъ. Вторая, когда можешь самостоятельно рѣшать задачи и дѣлать разсчеты при помощи алгебры. Третья, когда формулы, встрѣчающіяся въ элементарныхъ курсахъ, не представляютъ больше тарабарной грамоты. Четвертая, когда можешь читать курсы физики и другихъ наукъ о природѣ, гдѣ встрѣчаются дифференціалы и интегралы. Пятая, когда математика становится орудіемъ изслѣдованія въ рукахъ ее изучившаго. Шестая, когда онъ достигъ знанія высшихъ частей математики, можетъ слѣдить за ея прогрессомъ и самъ ему способствовать. Наивысшая степень доступна только геніямъ, въ родѣ Ньютона и Лагранжа, создающимъ новыя отрасли математики.

Разбирая отдѣльные вопросы, Лоджъ высказываетъ много оригинальныхъ и неожиданныхъ для насъ мыслей. Такъ, англій-

---

[1]) См. „В. О. Ф." 15 и 31 іюля 1902 г., 28 семестра.

скія „Публичныя школы“ (какъ Итонъ и Ругби), которыя недавно нѣкоторые изъ нашихъ педагоговъ стали выставлять какъ образцовые, Лоджъ считаетъ устарѣлыми и никуда негодными. Онъ жестоко характеризуетъ богатыхъ молодыхъ людей, выходящихъ изъ этихъ школъ, доступныхъ имъ однимъ, вслѣдствіе дороговизны содержанія учениковъ въ этихъ закрытыхъ заведеніяхъ: „они обладаютъ отличными манерами и получаютъ вкусъ къ хорошей и роскошной жизни, но во всѣхъ дѣлахъ они не претендуютъ ни на что другое, какъ только на высшее невѣжество“. Достаточное число блистательныхъ исключеній авторъ объясняетъ прирожденными способностями и хорошимъ вліяніемъ семейной обстановки, а не школы.

Обученіе наукамъ о природѣ: физикѣ и естественной исторіи, по мнѣнію автора, можно начинать съ развитія въ ученикахъ интереса къ предмету, посредствомъ реальнаго знакомства съ фактами, или прямо приступать къ строго научному изложенію, если факты достаточно знакомы ученикамъ изъ обыденнаго опыта. Такъ, можно начинать физику съ изложенія механики, потому что она состоитъ изъ ясныхъ, умозрительныхъ выводовъ, основанныхъ на опытѣ обыденной жизни; но при изложеніи ученія о свѣтѣ и электричествѣ лучше сначала дать ученикамъ полюбоваться солнечнымъ спектромъ и повертѣть электрическую машину, и приступить къ научнымъ объясненіямъ послѣ того, какъ знакомство съ явленіями возбудитъ интересъ къ нимъ. По личному наблюденію автора, не слѣдуетъ заставлять учениковъ дѣлать самимъ точныя физическія изложенія раньше, чѣмъ они хорошо познакомятся съ предметомъ: такія занятія для нихъ слишкомъ скучны.

О преподаваніи математики Лоджъ говоритъ мало; объ этомъ онъ издалъ въ 1905 г. особую книжку: „Легкая математика“ (Easy Mathematiks).

Практикуемые въ Англіи экзамены лицами посторонними школѣ и безъ участія учителей, преподававшихъ экзаменуемымъ, Лоджъ считаетъ большимъ зломъ: эти экзаменаторы не могутъ знать, что можно и чего нельзя требовать отъ ученика, а это ведетъ къ искусственному „наталкиванію“ къ экзамену при помощи спеціалистовъ, хорошо изучившихъ особенности и капризы каждаго экзаменатора. Но участіе постороннихъ, компетентныхъ экзаменаторовъ, сговорившихся предварительно съ преподавателями на счетъ предлагаемыхъ требованій, авторъ находитъ очень цѣлесообразной мѣрой, ведущей къ улучшенію преподаванія.

В. Лермантовъ.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 643 (4 сер.) *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$y^4 - x^3 - x^2y = 0.$$

Предполагая $y \neq 0$, раздѣлимъ данное уравненіе на y^3; тогда оно прийметь видъ

$$y - \left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 0, \text{ или } y = \left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 \quad (1)$$

Такъ какъ x и y суть по условію числа цѣлыя, то $\frac{x}{y}$ есть раціональное число, которое всегда можно изобразить въ видѣ несократимой дроби $\frac{m}{n}$, члены которой m и n суть, такимъ образомъ, числа взаимно простыя. Изъ равенства (1) находимъ

$$y = \left(\frac{m}{n}\right)^3 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^3+m^2n}{n^3} = \frac{m^2(m+n)}{n^3} \quad (2).$$

Такъ какъ y цѣлое число, то (см. (2)) $\frac{m^2(m+n)}{n^3}$ тоже цѣлое число. Но m и n числа взаимно простыя; поэтому $m+n$ дѣлится на n^3, а потому и на n; итакъ выраженіе $\frac{m+n}{n} = \frac{m}{n} + 1$ равно цѣлому числу, откуда вытекаетъ, что $\frac{m}{n}$ есть тоже цѣлое число; значитъ m, будучи взаимно простымъ съ n, дѣлится на n Слѣдовательно, $n=1$, такъ что

$$\frac{x}{y} = m \quad (3),$$

гдѣ m—число цѣлое. Такимъ образомъ (см. (1), (3))

$$y = m^3 + m^2 \quad (4), \qquad x = m(m^3 + m^2) = m^4 + m^3 \quad (5).$$

Итакъ, при $y \neq 0$ всякая пара цѣлыхъ рѣшеній даннаго уравненія выражается формулами (4) и (5), гдѣ m—нѣкоторое цѣлое число; но, полагая въ данномъ уравненіи $y=0$, находимъ $x^3=0$, т. е. $x=0$; эта пара цѣлыхъ рѣшеній, $x=y=0$, также можетъ быть получена изъ формулъ (4) и (5) при $m=0$ или $m=-1$. Слѣдовательно, *всѣ* цѣлыя рѣшенія даннаго уравненія заключаются въ формулахъ (5) и (4), гдѣ m—нѣкоторое цѣлое число. Наоборотъ, подставляя вмѣсто x и y въ данное уравненіе m^4+m^3 и m^3+m^2 мы видимъ, что эти выраженія тожественно удовлетворяютъ данному уравненію при всякомъ цѣломъ m. Слѣдовательно, формулы (4) и (5), гдѣ m есть произвольное цѣлое число, даютъ всѣ рѣшенія данной системы. Небольшое вычисленіе, которое сводится къ рѣшенію системы $m^4+m^3 = \mu^4+\mu^3$, $m^3+m^2 = \mu^3+\mu^2$, не имѣющей въ случаѣ неравныхъ m и μ другихъ цѣлыхъ корней кромѣ $m=0$, $\mu=-1$ или $m=-1$, $\mu=0$, показываетъ намъ, что формулы (4), (5) даютъ различныя рѣшенія при различныхъ цѣлыхъ значеніяхъ m, кромѣ двухъ значеній $m=0$, $m=-1$, при которыхъ получается одно и то же рѣшеніе $x=y=0$.

Замѣчаніе. Сотрудники журнала, рѣшившіе задачу, всѣ, за исключеніемъ одного, пришли къ двумъ системамъ рѣшеній $x=m^4+m^3$, $y=m^3+m^2$ и $x=m(m+1)^3$, $y=-m(m+1)^2$; но, подставляя вмѣсто m выраженіе $(-1-m')$, приводимъ вторую систему опять къ виду $x=m'^4+m'^3$, $y=m'^3+m'^2$, т. е. вторая система рѣшеній ничѣмъ не отличается отъ первой.

Г. Оганянцъ (Москва); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ); *Э. Лейнпкъ* (Рига); *А. Турчаниновъ* (Одесса).

№ 648 (4 сер.). *Построить трапецію по одному изъ основаній, по одной изъ непараллельныхъ сторонъ, по отрѣзку, отсѣкаемому непараллельными сторонами на прямой, проходящей параллельно основаніямъ черезъ точку пересѣченія діагоналей и по прямой, соединяющей средины параллельныхъ сторонъ.*

Пусть $ABCD$—трапеція, параллельныя стороны которой суть AB и DC, а діагонали—AC и BD; пусть AB—данное основаніе трапеціи, BC—данная непараллельная сторона. Назовемъ средины сторонъ AD и DC соотвѣтственно черезъ M и N, точку пересѣченія діагоналей AC и BD черезъ O, а точки пересѣченія сторонъ AD и BC съ прямой, проходящей черезъ O параллельно AB назовемъ соотвѣтственно черезъ E и F. Кромѣ того, введемъ слѣдующія обозначенія:

$$AB=a,\quad BC=p,\quad MN=q,\quad EF=l,\quad DC=x \qquad (1).$$

Изъ подобія треугольниковъ AOB и DOC имѣемъ $\dfrac{AO}{CO}=\dfrac{AB}{DC}=\dfrac{\left(\dfrac{AB}{2}\right)}{\left(\dfrac{DC}{2}\right)}=$

$=\dfrac{AM}{CN}$; итакъ, у треугольниковъ NOC и MOA стороны AO и AM соотвѣтственно пропорціональны сторонамъ CO и CN; но $\angle NCO=\angle MAO$, откуда слѣдуетъ, что треугольники MOA и NOC подобны, а потому $\angle NOC=\angle MOA$, т. е. точки M, O и N лежатъ на одной прямой. Изъ пропорцій $\dfrac{CO}{AO}=\dfrac{DO}{OB}=\dfrac{DC}{AB}$ составимъ производныя $\dfrac{CO}{AO+CO}=\dfrac{DO}{DO+OB}=\dfrac{DC}{DC+AB}$, или

$$\frac{CO}{AC}=\frac{DO}{DB}=\frac{DC}{DC+AB} \qquad (2).$$

Тогда изъ паръ подобныхъ треугольниковъ DEO и DAB, CFO и CBA находимъ (см. (2))

$$\frac{EO}{AB}=\frac{DO}{DB}=\frac{CO}{AC}=\frac{OF}{AB}=\frac{DC}{DC+AB} \qquad (3).$$

Изъ равенства $\dfrac{EO}{AB}=\dfrac{OF}{AB}$ (см. (3)) заключаемъ, что

$$EO=OF=\frac{EF}{2} \qquad (4).$$

Слѣдовательно (см. (3), (4)) $\dfrac{OF}{AB}=\dfrac{EF}{2AB}=\dfrac{DC}{DC+AB}$, или (см. (1)) $\dfrac{l}{2a}=\dfrac{x}{a+x}$, (5) откуда

$$DC=x=\frac{al}{2a-l} \qquad (6).$$

Проведя черезъ точку C прямую, параллельную NM, до встрѣчи съ AB въ точкѣ K, находимъ (см. (6))

$$KB=\pm(MB-MK)=\pm(MB-NC)=\pm\frac{AB-DC}{2}=\pm\frac{a-\dfrac{al}{2a-l}}{2} \qquad (7),$$

при чемъ въ формулѣ (7) надо вездѣ взять верхній или нижній знакъ, смотря по тому, будетъ ли найденный нами изъ равенства (6) отрѣзокъ DC меньше или больше даннаго основанія AB. Изъ формулъ (6) и (7) вытекаетъ построеніе: строимъ отрѣзокъ x (см. (6)), какъ четвертую пропорціональную къ a, l и $2a-l$, затѣмъ по формулѣ (7) строимъ отрѣзокъ KB, затѣмъ строимъ треугольникъ BCK по сторонамъ $CB=p$, $CK=NM=q$, $KB=\pm\dfrac{a-\dfrac{al}{2a-l}}{2}$ (см. (7)), откладываемъ, продолживъ BK, отрѣзокъ $BA=a$, проводимъ черезъ C полупрямую, параллельную BA, и откладываемъ на ней отрѣзокъ $CD=\frac{al}{2a-l}$ (см. (6)). Трапеція $ABCD$ есть искомая. Такъ какъ найденныя нами по формуламъ (6) и (7) значенія отрѣзковъ DC и KB не зависятъ отъ длины отрѣзка MO и величины угла OMB, то DC и KB можно построить такъ: на произвольной прямой откладываемъ отрѣзокъ $A'B'=a$, черезъ произвольную точку O' внѣ $A'B'$ проводимъ $O'F'=\frac{l}{2}$, продолжаемъ $A'O'$ и $B'F'$ до пересѣченія ихъ въ точкѣ C', а черезъ C' проводимъ прямую, параллельную $A'B'$ до встрѣчи съ $B'O'$ въ нѣкоторой точкѣ D'; затѣмъ проводимъ черезъ C' прямую, параллельную $O'M'$, гдѣ M'—средина $A'B'$, до встрѣчи въ K' съ $A'B'$; отрѣзки $C'D'$ и $B'K'$ равны соотвѣтственно искомымъ отрѣзкамъ CD и BK. Замѣтимъ еще, что для возможности задачи необходимо и достаточно соблюденіе двухъ условій: чтобы выполнялось неравенство $2a>l$ (см. (5)) и чтобы изъ отрѣзковъ $CB=p$, $CK=q$ и найденнаго нами отрѣзка KP можно было построить треугольникъ.

Д. Колянковскій (Брацлавъ); *С. Конюховъ* (Никитовка).

№ 649 (4 сер.). *На сторонахъ* $BC=a$, $AC=b$ *и* $AB=c$ *треугольника* ABC *взяты соотвѣтственно точки* M_a, M_b, M_c *такъ, что*

$$CM_a=ma,\quad AM_b=mb,\quad BM_c=mc,$$

гдѣ m — *нѣкоторое положительное число. Доказать, что*

$$4m\left(\mu_a^2+\mu_b^2+\mu_c^2\right)-2\left(\mu_a'^2+\mu_b'^2+\mu_c'^2\right)+(2-5m+2m^2)(a^2+b^2+c^2)=0,$$

гдѣ μ_a, μ_b, μ_c — *длины медіанъ треугольника, а* μ'_a, μ'_b, μ'_c *суть соотвѣтственно длины отрѣзковъ* AM_a, BM_b, CM_c.

Называя уголъ AM_aC черезъ α и опредѣляя квадраты сторонъ $AC=b$ $AB=c$ изъ треугольниковъ ACM_a и ABM_a, получимъ $\overline{AC}^2=\overline{AM_a}^2+\overline{CM_a}^2-$ $-2AM_a.CM_a\cos\alpha$, или

$$b^2=\mu_a'^2+m^2a^2-2ma\mu'_a\cos\alpha \qquad (1).$$

и

$$c^2=\mu_a'^2+\overline{M_aB}^2-2M_aB.\mu'_a\cos(\pi-\alpha)=\mu_a'^2+(a-ma)^2+2(a-ma)\mu'_a\cos\alpha,$$

или

$$c^2=\mu_a'^2+(1-m)^2a^2+2(1-m)a\mu'_a\cos\alpha \qquad (2).$$

Помножая равенства (1) и (2) соотвѣтственно на $(1-m)$ и m и затѣмъ складывая ихъ, получимъ

$$(1-m)b^2+mc^2=(1-m)\mu_a'^2+m\mu_a'^2+m^2(1-m)a^2+(1-m)^2ma^2,$$

или

$$(1-m)b^2+mc^2=\mu_a'^2+m(1-m)a^2,\ \text{откуда}$$

$$\mu_a'^2=(1-m)b^2+mc^2-m(1-m)a^2 \qquad (3).$$

Подобнымъ же образомъ находимъ

$$\mu_b'^2=(1-m)c^2+ma^2-m(1-m)b^2 \quad (4),\qquad \mu_c'^2=(1-m)a^2+mb^2-m(1-m)c^2 \quad (5).$$

Сложивъ равенства (3), (4), (5) получимъ

$$\mu_a'^2+\mu_b'^2+\mu_c'^2=(a^2+b^2+c^2)[m+1-m-m(1-m)],\ \text{или}$$

$$\mu_a'^2+\mu_b'^2+\mu_c'^2=(a^2+b^2+c^2)(1-m+m^2) \qquad (6).$$

Полагая въ формулѣ (6) $m=\frac{1}{2}$ и замѣчая, что при этомъ отрѣзки

μ'_a, μ'_b, μ'_c обращаются въ медіаны μ_a, μ_b, μ_c, находимъ $\mu_a^2+\mu_b^2+\mu_c^2=$
$=(a^2+b^2+c^2)\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$, или

$$\mu_a^2+\mu_b^2+\mu_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2) \quad (7).$$

Помноживъ равенство (7) на $4m$ и вычитая изъ него удвоенное равенство (6), имѣемъ

$$4m(\mu_a^2+\mu_b^2+\mu_c^2)-2(\mu'^2_a+\mu'^2_b+\mu'^2_c)=3m(a^2+b^2+c^2)-(2-2m+2m^2)(a^2+b^2+c^2)=$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(-2+5m-2m), \text{ откуда}$$

$$4m(\mu_a^2+\mu_b^2+\mu_c^2)-2(\mu'^2_a+\mu'^2_b+\mu'^2_c)+(2-5m+2m^2)(a^2+b^2+c^2)=0.$$

Э. Лейнъкъ (Рига); *Н. Плахово* (Знаменка); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ).

№ 654 (4 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$y^2-yx-5x+2y+1=0.$$

Представимъ данное уравненіе въ видѣ

$$(y^2+2y+1)-x(y+5)=0,$$

откуда
$$\frac{y^2+2y+1}{y+5}=x, \quad \text{или}$$

$$y-3+\frac{16}{y+5}=x \quad (1).$$

Такъ какъ x и y суть, по предположенію, числа цѣлыя, то изъ равенства (1) слѣдуетъ, что выраженіе $\frac{16}{y+5}$ есть также число цѣлое; наоборотъ, если $\frac{16}{y+5}$ и y суть числа цѣлыя, то (см. (1)) и x, удовлетворяя равенству (1), есть число цѣлое. Такимъ образомъ, для рѣшенія задачи необходимо и достаточно предположить, что число $y+5$ равно одному изъ дѣлителей 16, т. е.

$$y+5=\pm 16, \quad \pm 8, \quad \pm 4, \quad \pm 2, \quad \pm 1 \quad (2),$$

откуда (см. (2), (1))

$$\begin{array}{l} y=-21, -13, -9, -7, -6, -4, -3, -1, 3, 11, \\ x=-25, -18, -16, -78, -25, \;\; 9, \;\; 2, \;\; 0, 2, \;\; 9. \end{array} \quad (3).$$

Въ таблицѣ (3), заключающей въ себѣ всѣ цѣлыя рѣшенія даннаго уравненія, соотвѣтствующія значенія y и x подписаны одно подъ другимъ.

Н. Плахово (Знаменка); *Э. Лейнъкъ* (Рига); *В. Нерехтскій* (Кіевъ); *С. Конюховъ* (Никитовка); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *Г. Лебедевъ* (Харьковъ); *А. Турчаниновъ* (Одесса).

Поправка.

Въ № 411 „Вѣстника" на стр. 70, на 9-ой строкѣ съ конца вмѣсто $a=b=c$ слѣдуетъ читать $a=b=c=0$.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго, д. № 66.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА
ИЗВѢСТІЯ
МОСКОВСКАГО
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАГО ИНСТИТУТА.

Годъ XII.

1906.

Извѣстія выходятъ **четырьмя** книгами въ годъ, составляющими не менѣе 35 листовъ текста in 8°.

ПРОГРАММА ИЗВѢСТІЙ:

Оффиціальный отдѣлъ.

I. Правительственныя распоряженія, касающіяся М. С. Х. Института.

II. Постановленія Совѣта Института и относящіяся къ нимъ приложенія: а) програмы и планы лекцій и практическихъ занятій въ Институтѣ; б) отчеты объ экскурсіяхъ, ежегодно совершаемыхъ студентами Института подъ руководствомъ профессоровъ, преподавателей и пр.; в) работы коммиссій, назначаемыхъ Совѣтомъ Института для разслѣдованія различныхъ вопросовъ и г) отчеты о командировкахъ членовъ совѣта и другихъ лицъ, служащихъ въ Институтѣ.

III. Нѣкоторые изъ журналовъ засѣданій Сельскохозяйственнаго комитета, состоящаго при Институтѣ, а именно тѣ, которые имѣютъ особенное значеніе для учебной и ученой дѣятельности Института.

IV. Годичный отчетъ о состояніи Института.

V. Каталоги и описанія библіотеки, разнообразныхъ коллекцій и учебныхъ пособій, находящихся при Институтѣ.

Неоффиціальный отдѣлъ.

I. Труды профессоровъ, преподавателей, ассистентовъ, студентовъ Института и постороннихъ лицъ, а именно:
а) естественно-историческіе и
б) статистико-экономическіе (преимущественно касающіеся изученія русскаго народнаго хозяйства).

Сюда входятъ какъ отдѣльныя самостоятельныя изслѣдованія, такъ и совмѣстныя работы, исполненныя въ лабораторіяхъ, кабинетахъ, на опытномъ полѣ или на предполагаемой опытной станціи, пасѣкѣ, въ лѣсной дачѣ, огородѣ, питомникѣ и пр.

II. Критическія и библіографическія статьи о выдающихся произведеніяхъ народнохозяйственной и естественноисторической литературы.

III. Метеорологическія наблюденія, произведенныя на обсерваторіи Института

Работы могутъ сопровождаться рисунками, таблицами, чертежами, діаграммами и пр. и, по желанію автора, краткимъ резюме на какомъ-либо иностранномъ языкѣ (резюме должно быть составлено самимъ авторомъ и прислано въ редакцію одновременно со статьею). Оглавленія каждой книги Извѣстія, кромѣ русскаго языка, печатается еще на французскомъ языкѣ.

ПОДПИСКА принимается въ канцеляріи Московскаго Сельскохозяйственнаго Института и въ книжн. магазин. Карбасникова (Москва, Варшава, Вильна, С.-Петербургъ) и „Трудъ" (Москва, Тверская).

ПОДПИСНАЯ ЦѢНА въ годъ, за четыре книги, **5 руб.**, для студентовъ высшихъ учебныхъ заведеній **2 руб 50 к.**; цѣна отдѣльной книги **1 р. 50 коп**; отдѣльные оттиски статей естественноисторическихъ и статистико-экономическихъ высылаются названными книжными магазинами наложеннымъ платежемъ по разсчету **20 коп.** за листъ.

Редакторы: { **С. И. Ростовцевъ.**
Д. Н. Прянишниковъ.