Обложка
пщется

Обложка
ищется

XXXIII Сем.



# ВѢстникъ Опытной Физики
# и
# ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

31 Марта. № 390. 1905 г.



## ВЕРТЯЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.

### Публичный докладъ, прочитанный въ засѣданіи „Британской Ассоціаціи" въ Лидсѣ.

### *Проф. Джона Перри.*

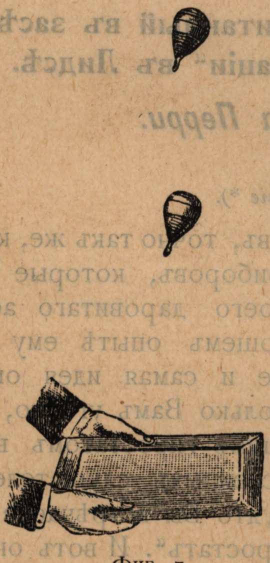
*(Продолженіе *).*

Установка почти всѣхъ опытовъ, точно такъ же, какъ и приготовленіе волчковъ и другихъ приборовъ, которые вы видѣли сегодня вечеромъ,—дѣло рукъ моего даровитаго ассистента, господина Shepherd'а. Но въ слѣдующемъ опытѣ ему не только принадлежитъ установка, но также и самая идея опыта. Онъ сказалъ мнѣ: „Вы себѣ можете, сколько Вамъ угодно, вертѣть и нагибать Ваше туловище съ большимъ гиростатомъ въ рукахъ, но многіе среди Вашихъ многочисленныхъ слушателей просто скажутъ, что Вы притворяетесь, будто Вы встрѣчаете затрудненіе, когда стараетесь наклонить гиростатъ". И вотъ онъ установилъ на колесахъ столъ, на которомъ я могу стоять. Теперь, какъ Вы видите, если я стараюсь повернуть гиростатъ, то онъ

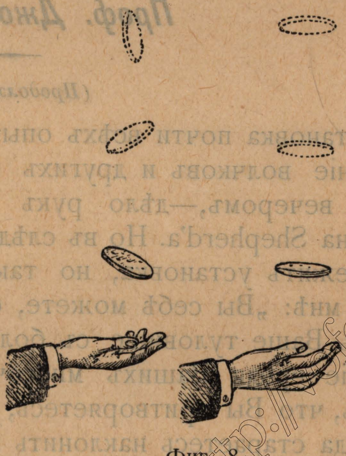
*) См № 388 „Вѣстника".

не поворачивается; какъ я ни напрягаюсь, онъ сохраняетъ свое положенiе, оставаясь постоянно направленнымъ вотъ къ тому концу зала, и всѣ мои усилiя могутъ заставить повернуться лишь мое тѣло и столъ, но не гиростатъ. Теперь Вы легко поймете, что барабанъ только тогда оказываетъ сопротивленiе, если мы стараемся сообщить другое направленiе оси вращенiя скрытаго внутри него махового колеса; и если Вы, интересуясь этимъ предметомъ, сдѣлаете нѣкоторыя дальнѣйшiя наблюденiя, то Вы сейчасъ же увидите, что всякое вращающееся тѣло, какъ и помѣщенное внутри барабана колесо, болѣе или менѣе сопротивляется измѣненiю направленiя оси вращенiя. Если маховыя колеса паровой машины, динамомашины или другихъ быстро движущихся машинъ вращаются, находясь на суднѣ, то Вы можете быть вполнѣ увѣрены, что они оказываютъ зигзагообразному, круговому или вращательному или, вообще, всякому другому движенiю судна, которое стремится измѣнить направленiе оси вращенiя, большее сопротивленiе, чѣмъ въ состоянiи покоя.

Вотъ волчокъ, который лежитъ на плоской дощечкѣ и который я подбрасываю въ воздухъ (фиг. 7). Вы видите, что трудно про-



Фиг. 7.



Фиг. 8.

слѣдить его движенiе, и никто не могъ бы предсказать заранѣе, пока онъ не упадетъ, въ какомъ положенiи онъ вернется обратно на дощечку; онъ можетъ упасть острымъ концомъ впередъ, назадъ или въ сторону. Но, если я его заверчу и теперь подброшу его въ воздухѣ, то совершенно не можетъ быть никакого сомнѣнія относительно того, въ какомъ положеніи онъ вернется назадъ. Ось вращенія остается параллельной сама себѣ, и я могу подбрасывать волчекъ вверхъ по нѣскольку разъ подрядъ, не измѣняя замѣтно его вращательнаго движенія.

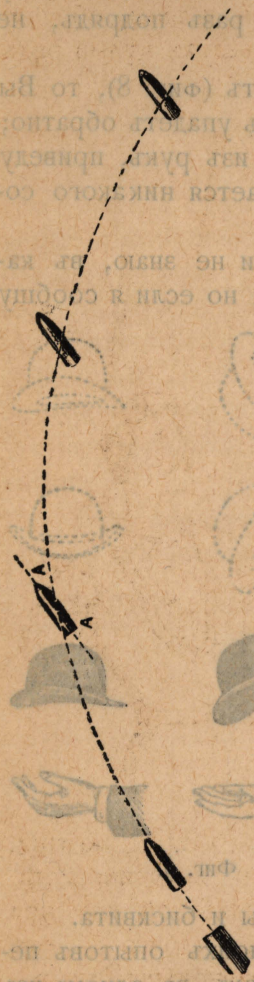
Если я подброшу вверхъ этотъ бисквитъ (фиг. 8), то Вы видите, что я не могу знать заранѣе, какъ онъ упадетъ обратно; но, если я передъ тѣмъ, какъ выпустить его изъ рукъ, приведу его во вращеніе, то на этотъ счетъ не остается никакого сомнѣнія.

Вотъ шляпа; я подбрасываю ее вверхъ и не знаю, въ какомъ положеніи она упадетъ обратно (фиг. 9); но если я сообщу ей вращеніе, то вы видите, что ось, вокругъ которой происходитъ вращеніе, какъ и у волчка и у бисквита, остается параллельной сама себѣ, и Вы можете быть увѣрены, что въ данномъ случаѣ шляпа упадетъ на землю полями внизъ.

Я считаю лишнимъ приводить въ видѣ примѣра еще разъ очень мягкую шляпу, которой мы нѣсколько минутъ тому назадъ сообщали нѣкоторую твердость; вспомните, что мой ассистентъ бросалъ ее въ воздухъ на подобіе бомбы послѣ того, какъ она была приведена во вращеніе, и что ея ось вращенія оставалась параллельной самой себѣ точно такъ же, какъ и ось этой твердой шляпы и бисквита.

Фиг. 9.

Однажды я показывалъ нѣкоторые изъ моихъ опытовъ передъ публикой, пившей кофе и курившей табакъ, въ одномъ изъ великолѣпныхъ помѣщеній концертной залы Викторіи въ Лондонѣ. Я старался заинтересовать моихъ слушателей, насколько могъ, вышеописанными явленіями и разсказывалъ о томъ, что метательному диску надо сообщить вращеніе, если его желаютъ бросить такъ, чтобы можно было точно указать напередъ, гдѣ онъ упадетъ; точно такъ же поступаютъ, если желаютъ кому-нибудь бросить обручъ или шляпу такъ, чтобы онъ могъ поймать эти предметы палкой. Всегда можно разсчитывать на сопротивленіе, которое оказываетъ тѣло, когда измѣняютъ направленіе его оси. Далѣе я объяснялъ моимъ слушателямъ, что, отполировавъ гладко дуло пушки, никогда нельзя разсчитывать на точность прицѣла *); что вращеніе, въ которое проходитъ обыкновенное ядро, зависитъ прежде всего отъ того, какимъ образомъ ядро случайно коснется отверстія пушки въ тотъ моментъ, когда оно изъ нея вылетаетъ; вслѣдствіе этого, теперь дѣлаютъ нарѣзныя дула, т. е. теперь вырѣзываютъ на внутренней сторонѣ дула пушекъ спиралеобразные желобы, въ которые приходятся выступы ядра или снаряда, такъ что послѣдній долженъ получить опредѣленное вращательное движеніе, когда сила взрыва пороха заставляетъ его двигаться вдоль дула пушки. Слѣдовательно, теперь снарядъ покидаетъ пушку съ точно опредѣленнымъ вращательнымъ движеніемъ, относительно котораго не можетъ возникнуть никакого сомнѣнія; рисунокъ 10-ый указываетъ на видъ движенія, которое затѣмъ совершаетъ снарядъ; совершенно такъ же, какъ и у шляпы или бисквита, его ось вращенія остается почти параллельной сама себѣ. Это было все, что я могъ сдѣлать во время этой лекціи, такъ какъ я не обладаю никакой ловкостью въ бросаніи шляпъ или дисковъ. Но послѣ того, какъ я закончилъ свою лекцію и затѣмъ молодая дама пропѣла комическую пѣсню, на подмостки выступили два жонглера, господинъ и дама, и я не могъ пожелать никакой лучшей иллюстраціи упомянутыхъ выше законовъ, нежели та, которую да-



Фиг. 10.

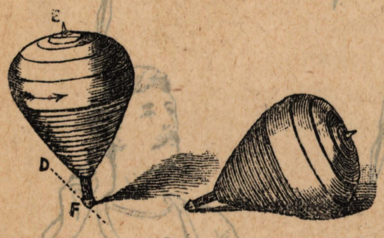
*) Въ 1746 году Веньяминъ Робинсъ установилъ основы ружейнаго дѣла въ томъ видѣ, въ какомъ мы пользуемся ими сейчасъ. Онъ показалъ, что вращеніе круглаго снаряда надо разсматривать, какъ вещь весьма важную; даже изгибъ пушечнаго дула никоимъ образомъ не ведетъ къ отклоненію снаряда въ той мѣрѣ, въ какой вращеніе снаряда можетъ произвести отклоненіе отъ прицѣла въ направленіи, противоположномъ вращенію.

валъ каждый отдѣльный фокусъ, показанный этими двумя артистами. Они бросали другъ другу вращающіяся шляпы, обручи тарелки. Одинъ изъ жонглеровъ бросалъ въ воздухъ цѣлый рядъ ножей, ловилъ ихъ опять и снова подбрасывалъ ихъ съ большой точностью вверхъ; моя аудиторія, только что прослушавъ объясненіе этихъ явленій, ликовала отъ удовольствія и обнаруживала самымъ явнымъ образомъ, что она замѣчала вращеніе, которое жонглеръ сообщалъ каждому ножу, какъ только онъ выпускалъ его изъ руки, такъ что онъ могъ навѣрно знать, въ какомъ положеніи ножъ снова вернется къ нему (фиг. 11). Я былъ тогда пораженъ, что почти безъ исключенія всякій изъ жонглерскихъ фокусовъ, показанныхъ въ тотъ вечеръ, представлялъ иллюстрацію изложеннаго выше принципа. И если Вы все еще сомнѣваетесь въ моихъ словахъ, то спросите только ребенка, когда его об-

Фиг. 11.

ручъ легче опрокидывается, тогда ли, когда онъ быстро катится, или когда онъ двигается медленно; спросите велосипедиста, когда ему легче удержать равновѣсіе, при медленной или при скорой ѣздѣ; спросите балетную танцовщицу, долго ли она могла бы устоять наноскѣ, не поддерживая равновѣсія при помощи рукъ или палки, если бы она не кружилась; спросите астронома, сколько мѣсяцевъ земная ось сохраняла бы то же самое направленіе относительно полярной звѣзды, если бы земля не вращалась; и прежде всего другого спросите какого-нибудь подростка, когда его волчокъ легче стоитъ на своемъ остромъ концѣ, когда онъ вращается или когда онъ не вращается.

Изслѣдуемъ теперь внимательнѣе свойства обыкновеннаго волчка (фиг. 12). Когда онъ не вращается, то Вы видите, что онъ сразу опрокидывается; если же я хочу поставить его вертикально на его остріѣ, то онъ оказывается совершенно неустойчивымъ. Но теперь, обратите вниманіе, когда онъ кружится, то онъ остается не только вертикально на своемъ остріѣ, но даже, если я его ударю и такимъ образомъ нарушу его устойчивое состояніе, то онъ, придя въ „предходящее“ движеніе, обходитъ кругъ, который постепенно дѣлается все меньше и меньше, и волчокъ вскорѣ приходитъ опять въ свое вертикальное положеніе. Я надѣюсь, Вы никоимъ образомъ не думаете, что время, употребленное на наблюденіе явленій такого рода, потрачено непроизводительно. Научное наблюденіе самыхъ обыкновенныхъ явленій, которыя встрѣчаются въ нашей повседневной жизни, никогда не пропадаетъ даромъ, и часто я чувствую, что если бы рабочіе, т. е. тѣ лица, которыя наиболѣе освоились съ неорганической природой, могли примѣнять научные законы къ своимъ дѣйствіямъ, то, вмѣсто одного великаго открытія въ каждое столѣтіе, мы имѣли бы великое открытіе каждый годъ.



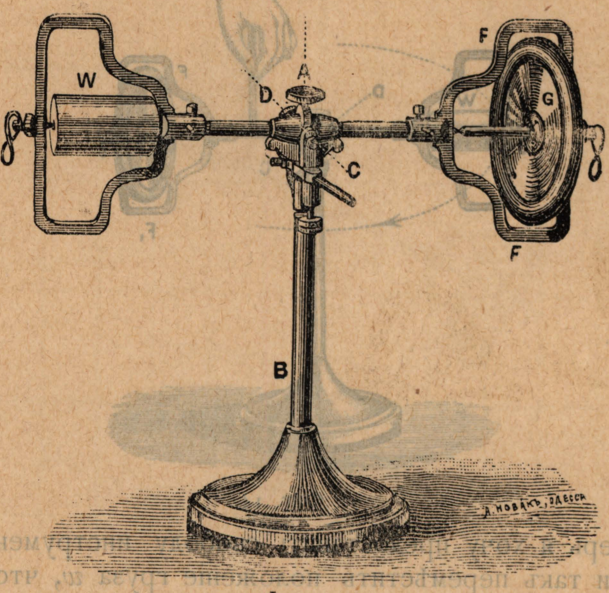
Фиг. 12.

Возвратимся къ нашему волчку; тутъ слѣдуетъ сдѣлать прежде всего два важныхъ наблюденія, при чемъ мы желаемъ на короткое время оставить безъ вниманія легкія колебательныя движенія, которыя имѣютъ мѣсто при вращеніи волчка.

Первое наблюденіе, которое мы дѣлаемъ, состоитъ въ томъ, что волчокъ наклоняется не въ сторону удара. Если я направлю ударъ къ югу, то волчокъ наклоняется къ западу; если же къ западу, то волчокъ наклоняется къ сѣверу. Причина этихъ явленій извѣстна всѣмъ научно-образованнымъ лицамъ, и законъ, которому подчиняется въ этомъ случаѣ волчокъ, во многихъ отношеніяхъ въ высшей степени важенъ; я надѣюсь сдѣлать его понятнымъ для Васъ. Второй фактъ, что волчокъ опять достигаетъ мало-по-малу своего вертикальнаго положенія, равнымъ образомъ извѣстенъ каждому; но нельзя сказать того же самаго о причинѣ этого факта; однако, я думаю, что усмотрѣть эту причину не представитъ для Васъ никакихъ затрудненій.

Первое явленіе можно наблюдать на томъ барабанѣ, который я Вамъ уже показывалъ. Этотъ барабанъ (фиг. 5) съ маховымъ колесомъ внутри называется гиростатомъ. Если я толкаю барабанъ, то онъ не опрокидывается, но медленно поворачивается по кругу. Второго явленія на этомъ гиростатѣ нельзя показать; если я установлю его такъ, что онъ выйдетъ изъ своего вертикальнаго положенія, то тогда онъ не выпрямится снова, но, наоборотъ, онъ будетъ „предходить“ по все большимъ и большимъ кругамъ и все больше и больше будетъ удаляться отъ своего вертикальнаго положенія.

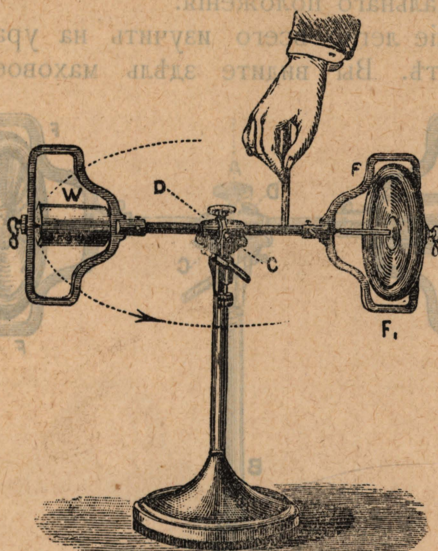
Первое явленіе легче всего изучить на уравновѣшенномъ (фиг. 13) гиростатѣ. Вы видите здѣль маховое колесо *G* въ




Фиг. 13.

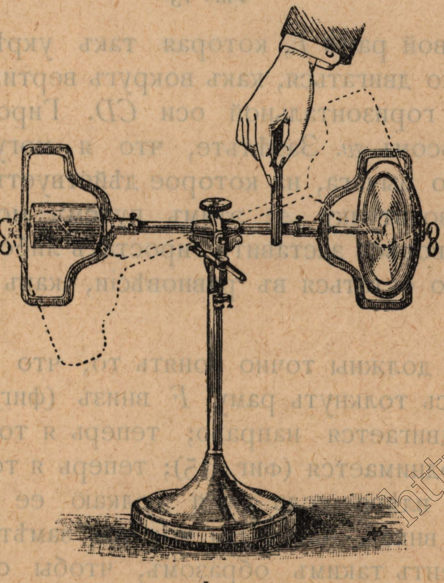
прочной бронзовой рамѣ *F*, которая такъ укрѣплена, что она можетъ свободно двигаться, какъ вокругъ вертикальной оси *AB*, такъ и вокругъ горизонтальной оси *CD*. Гиростатъ уравновѣшенъ противовѣсомъ *w*. Замѣтьте, что я могу увеличить или уменьшить плечо рычага, на которое дѣйствуетъ грузъ *w*, мѣняя его положеніе во втулкѣ *A*; этимъ путемъ можно достигнуть того, что противовѣсъ заставитъ гиростатъ либо подняться, либо опуститься, либо остаться въ равновѣсіи, какъ это и сейчасъ имѣетъ мѣсто.

Теперь Вы должны точно понять то, что мы желали изучить. Я стараюсь толкнуть раму *F* внизъ (фиг. 14), но она на самомъ дѣлѣ двигается направо; теперь я толкаю раму *F* направо, и она поднимается (фиг. 15); теперь я толкаю ее вверхъ, и она двигается влѣво; если же я толкаю ее налѣво, то она поворачивается внизъ. Далѣе Вы можете замѣтить, что если я зажму инструментъ такимъ образомъ, чтобы онъ не могъ двигаться вертикально, то онъ сейчасъ послѣ удара приходитъ въ движенiе въ горизонтальномъ направленiи; напротивъ, онъ движется вертикально, если я помѣшаю горизонтальному движе-



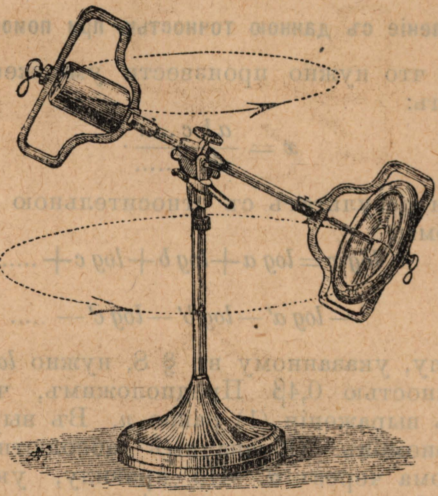

Фиг. 14.

нiю. Теперь я хочу предоставить свободу инструменту, какъ и прежде, и такъ перемѣстить положенiе груза *w*, чтобы онъ по-



Фиг. 15.

стоянно стремился поднять гиростатъ; и Вы видите теперь, что инструментъ не поднимается, но начинаетъ медленно двигаться «предходящимъ» движенiемъ. Теперь я опять передвигаю грузъ *w* такъ, что гиростатъ долженъ былъ бы упасть, если бы онъ не находился въ состоянiи быстраго вращенiя вокругъ оси (фиг. 16), и теперь онъ двигается горизонтально медленнымъ



Фиг. 16.

«предходящимъ» движенiемъ, которое противоположно прежнему. Эти явленiя, какъ я упоминалъ объ этомъ, легко разъясняются, но раньше они должны быть точно наблюдены. Всѣ вы теперь приблизительно знаете основную ихъ причину, а именно: если я пытаюсь измѣнить направленiе оси быстровращающагося тѣла, то эта ось, хотя и измѣняетъ свое направленiе, но не такимъ образомъ, какъ я это предполагаю сдѣлать. Это еще, пожалуй, удивительнѣе, чѣмъ исторiя со свиньей крестьянина, который тѣмъ только и могъ заставить ее идти въ городъ, что убѣдилъ ее, будто она идетъ домой. Его правило было весьма простое, и мы должны найти подобное же правило также и для нашего вращающагося тѣла, которое, подобно раку, только тогда идетъ вдоль по прямой линiи, если его толкать сбоку.

(*Продолженiе слѣдуетъ*).

# ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНІЕ.

*Проф. В. П. Ермакова.*

*(Окончаніе *).*

## 9.

### Умноженіе и дѣленіе съ данною точностью при помощи логариѳмовъ.

Положимъ, что нужно произвести умноженіе и дѣленіе нѣсколькихъ чиселъ:

$$x = \frac{abc\ldots\ldots}{a'b'c'\ldots\ldots}. \tag{1}$$

Требуется найти результатъ съ относительною погрѣшностью $\beta$. Беремъ логариѳмы:

$$\begin{aligned} \log x = \log a + \log b + \log c + \ldots\ldots \\ - \log a' - \log b' - \log c' - \ldots\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Согласно правилу, указанному въ § 8, нужно $\log x$ вычислить съ абсолютною точностью $0{,}4\beta$. Предположимъ, что число заданныхъ чиселъ въ выраженіи (1) равно $n$. Въ выраженіи (2) также имѣемъ $n$ логариѳмовъ. Обозначимъ абсолютную погрѣшность каждаго логариѳма черезъ $\alpha$. По правилу, указанному въ § 4, абсолютная погрѣшность при сложеніи и вычитаніи равна суммѣ абсолютныхъ погрѣшностей, т. е. равна $n\alpha$, что должно быть равно $0{,}4\beta$. Изъ равенства $n\alpha = 0{,}4\beta$ находимъ:

$$\alpha = \frac{n}{0{,}4\beta}. \tag{3}$$

Такова абсолютная погрѣшность логариѳма каждаго изъ данныхъ чиселъ; она намъ показываетъ, сколько въ каждомъ логариѳмѣ нужно удержать десятичныхъ цифръ. Поясним сказанное на частномъ примѣрѣ.

Положимъ, что нужно вычислить выраженіе (1) съ относительною точностью до одного процента; положимъ, что число заданныхъ чиселъ равно 8. Въ такомъ случаѣ имѣемъ $n=8$, $\beta=0{,}01$. По формулѣ (3) находимъ $\alpha=0{,}0005$. Такова должна быть абсолютная погрѣшность каждаго логариѳма. Но эта точность достигается трехзначными логариѳмами. Въ механической и инженерной практикѣ постоянно приходится дѣлать вычисленія, относительная точность которыхъ не превосходитъ одного процента; для такихъ вычисленій вполнѣ достаточны трехзначные логариѳмы.

Легко найти болѣе общее правило:

*Если требуется перемножить и раздѣлить не болѣе 8 чиселъ и*

* См. № 389 „Вѣстника".

*результатъ нужно вычислить съ относительною точностью до* $\frac{1}{10^n}$, *то въ логариѳмахъ нужно удерживать* $n+1$ *цифръ.*

Предположимъ, что нужно произвести возвышеніе въ степень или извлеченіе корня:

$$x = a^n.$$

Въ этой формулѣ показатель $n$ можетъ быть числомъ цѣлымъ и дробнымъ. Предположимъ, что $x$ нужно вычислить съ относительною погрѣшностью $\beta$. Беремъ логариѳмы:

$$\log x = n \log a.$$

Абсолютная погрѣшность $\log x$, какъ показано въ § 8, будетъ $0{,}4\beta$. Обозначимъ абсолютную погрѣшность $\log a$ черезъ $\alpha$; тогда абсолютная погрѣшность $n \log a$ будетъ $n\alpha$, что должно быть равно $0{,}4\beta$. Изъ равенства $n\alpha = 0{,}4\beta$, находимъ:

$$\alpha = \frac{0{,}4\beta}{n}. \qquad (3)$$

Такова абсолютная погрѣшность $\log a$; она показываетъ, сколько въ этомъ логариѳмѣ нужно удержать десятичныхъ цифръ. Пояснимъ на частномъ примѣрѣ.

Положимъ, что нужно извлечь квадратный корень съ относительною точностью до 0,0006. Въ такомъ случаѣ $n = {}^1/_2$, $\beta = 0{,}0006$. По формулѣ (3) находимъ $\alpha = 0{,}0005$. Эта точность достигается трехзначными логариѳмами.

## 10.

### Вычисленіе съ данною точностью многочленныхъ выраженій.

Положимъ, что намъ дано для вычисленія многочленное выраженіе:

$$A_1 + A_2 - A_3 - A_4 + \ldots\ldots + A_n, \qquad (1)$$

при чемъ каждый членъ опредѣляется перемноженіемъ и дѣленіемъ нѣсколькихъ приближенныхъ чиселъ. Требуется вычислить выраженіе (1) съ данною абсолютною погрѣшностью $\alpha$.

Обозначимъ абсолютную погрѣшность каждаго члена черезъ $\alpha'$. По доказанному въ § 4, $n\alpha' = \alpha$; отсюда

$$\alpha' = \frac{\alpha}{n}.$$

Такъ выражается абсолютная погрѣшность каждаго члена. Теперь нужно вычислить каждый членъ, т. е. произвести умноженія и дѣленія, обозначенныя въ этомъ членѣ. Но умноженіе и дѣленіе производятся по данной относительной погрѣшности результата. Поэтому нужно найти относительную погрѣшность каждаго члена. Для этой цѣли прежде всего вычисляемъ грубое приближенное значеніе каждаго члена съ одною вѣрною цифрою; пусть эти грубыя приближенія будутъ:

$$A_1', \ A_2', \ \ldots, A_n'.$$

Тогда относительная погрѣшность члена $A_i$ будетъ

$$\beta_i = \frac{\alpha'}{A_i'} = \frac{\alpha}{nA_i'}. \tag{2}$$

Теперь нужно произвести умноженія и дѣленія, указанныя въ выраженіи для $A_i$. Если эти дѣйствія производятся безъ логариѳмовъ, то поступаемъ по правилу, указанному въ § 6; если же употребимъ логариѳмы, то поступаемъ по правилу, указанному въ § 9.

Приведемъ примѣръ для поясненія:

$$\frac{2{,}30457}{5{,}08301} - 0{,}87412 \times 0{,}257134. \tag{3}$$

Требуется сдѣлать вычисленіе съ абсолютною точностью $\alpha = 0{,}001$.

Прежде всего вычислимъ грубыя приближенныя значенія членовъ:

$$A_1' = 0{,}4, \qquad A_2' = 0{,}2.$$

Далѣе, по формулѣ (2) вычислимъ относительныя погрѣшности:

$$\beta_1 = 0{,}001, \qquad \beta_2 = 0{,}0025.$$

Самое вычисленіе разнится, смотря по тому, употребимъ ли мы логариѳмы или нѣтъ.

Произведемъ сначала вычисленія безъ логариѳмовъ.

По формулѣ 1 § 3 найдемъ показатели точности для чиселъ, входящихъ въ каждый членъ:

$$N_1 = \frac{0{,}5}{\beta_1} = 500, \qquad N_2 = \frac{0{,}5}{\beta_2} = 200.$$

По правилу, указанному въ § 3, удержимъ въ каждомъ числѣ необходимое число значащихъ цифръ. Вмѣсто выраженія (3) получимъ слѣдующее:

$$\frac{2{,}305}{5{,}68} - 0{,}873 \times 0{,}257.$$

Остается произвести указанныя дѣйствія

$$2{,}305 : 5{,}68 = 0{,}406$$
$$0{,}873 \times 0{,}257 = 0{,}224$$
$$0{,}406 - 0{,}224 = 0{,}182.$$

Произведемъ теперь вычисленія при помощи логариѳмовъ.

По формулѣ 3 § 9 вычислимъ абсолютныя ошибки логариѳмовъ чиселъ, входящихъ въ каждый членъ:

$$\alpha_1 = \frac{0{,}4\beta_1}{2} = 0{,}0002, \qquad \alpha_2 = \frac{0{,}4\beta_2}{2} = 0{,}0005.$$

Отсюда заключаемъ, что логариѳмы чиселъ перваго члена должны быть вычислены съ четырьмя цифрами, а второго съ тремя.

Сначала вычислимъ первый членъ

$$\log 2{,}30457 = 0{,}3626$$
$$\log 5{,}68301 = 0{,}7546$$
$$\log A_1 = \overline{1}{,}6080$$
$$A_1 = 0{,}4055.$$

Далѣе вычислимъ второй членъ.

$$\log 0{,}873412 = \overline{1}{,}941$$
$$\log 0{,}257134 = \overline{1}{,}410$$
$$\log A_2 = \overline{1}{,}351.$$

По таблицамъ искомое число $A_2$ заключается между 0,2242 и 0,2245. Окончательный результатъ:

$$A_1 - A_2 = 0{,}181.$$

Разница съ прежнимъ результатомъ на одну единицу въ послѣдней цифрѣ возможна, потому что, согласно требованію, абсолютная ошибка не должна превосходить единицы послѣдней цифры. Точный результатъ заключается между двумя найденными приближенными числами.

11.

## Сокращенное умноженіе и дѣленіе приближенныхъ чиселъ.

Покажемъ, какъ нужно производить умноженіе и дѣленіе приближенныхъ чиселъ, чтобы избѣжать лишнихъ дѣйствій.

Замѣтимъ прежде всего, что намъ всегда приходится перемножать числа съ одинаковымъ числомъ значащихъ цифръ, либо въ одномъ числѣ на единицу болѣе цифръ. Мы знаемъ, какъ измѣняется произведеніе съ перестановкою запятыхъ въ множимомъ и множителѣ; поэтому мы можемъ ограничиться случаемъ, когда въ множителѣ запятая стоитъ послѣ первой цифры. Положимъ, что надо перемножить 0,8734 на 4,356. Дѣйствіе производится, какъ показано:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,8734 | 0,8734 | 0,8734 | 0,8734 |
| 2,356 | 2,356 | 2,356 | 2,356 |
| 1,7468 | 1,7468 | 1,7468 | 1,7468 |
| | 2620 | 2620 | 2620 |
| | | 437 | 437 |
| | | | 52 |
| | | | 2,0577 |

Объясненіе: умножимъ множимое на первую цифру множителя; зачеркнемъ послѣднюю цифру множимаго и первую цифру множителя, снова умножимъ множимое на первую цифру множителя; продолжаемъ эти дѣйствія до конца. При этомъ нужно принять во вниманіе первую зачеркнутую цифру множимаго. Такъ, при второмъ умноженіи первая зачеркнутая цифра 4, ее нужно умножить на 3, что даетъ 12, въ умѣ удерживаемъ 1 и прибавляемъ къ произведенію. При третьемъ умноженіи первая зачеркнутая цифра 3, ее нужно умножить на 5, что даетъ 15, что близко къ 20, въ умѣ удерживаемъ 2 и прибавляемъ къ произведенію.

Если перемножаются два числа съ неодинаковымъ числомъ цифръ, то за множитель нужно принять число съ меньшимъ числомъ цифръ.

Сокращенное дѣленіе производится, какъ показано.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,0577 | 2,356 | 2,0577 | 2,35$\cancel{6}$ | 2,0577 | 2,3$\cancel{5}\cancel{6}$ | 2,0577 | 2,$\cancel{3}\cancel{5}\cancel{6}$ |
| 18848 | 0,8 | 18848 | 0,87 | 18848 | 0,873 | 18848 | 0,8734 |
| 1729 | | 1729 | | 1729 | | 1729 | |
| | | 1649 | | 1649 | | 1649 | |
| | | 80 | | 80 | | 80 | |
| | | | | 71 | | 71 | |
| | | | | 9 | | 9 | |

Объясненіе: найдемъ первую цифру частнаго; умножимъ дѣлителя на найденную цифру, и полученное произведеніе вычтемъ изъ дѣлимаго; зачеркнемъ послѣднюю цифру дѣлителя; найдемъ вторую цифру частнаго; умножимъ дѣлителя на найденную цифру, и полученное произведеніе вычтемъ изъ остатка; продолжимъ эти дѣйствія до конца. При этомъ нужно принимать во вниманіе первую зачеркнутую цифру дѣлителя. Такъ, на вторую цифру частнаго умножаемъ зачеркнутую цифру 6, что даетъ 42, въ умѣ удерживаемъ 4 и прибавляемъ къ произведенію. На третью цифру частнаго умножаемъ зачеркнутую цифру 5, что даетъ 15, что близко къ 20, въ умѣ удерживаемъ 2 и прибавляемъ къ произведенію.

## 12.

## Точное правило для отбрасыванія лишнихъ цифръ при умноженіи и дѣленіи приближенныхъ чиселъ.

До сихъ поръ мы не имѣли дѣла съ ошибками, а лишь съ ихъ предѣлами, т. е. погрѣшностями. Для дальнѣйшаго упрощенія вычисленій намъ придется вычислять относительную ошибку, происшедшую отъ отбрасыванія послѣдней цифры въ данномъ числѣ, при чемъ эту ошибку нужно представить въ формѣ десятичной дроби и достаточно вычислить только первую значащую цифру. Мы предполагаемъ, что читатель уже настолько освоился съ приближенными вычисленіями, что въ состояніи сдѣлать указанное вычисленіе въ умѣ; тѣмъ не менѣе, поясним это вычисленіе на нѣсколькихъ примѣрахъ. Даны числа:

$$0{,}0013424 \qquad 23{,}123 \qquad 0{,}7866 \qquad 8{,}057. \tag{1}$$

Отбросимъ въ каждомъ изъ этихъ чиселъ послѣднюю цифру и вычислимъ происшедшія отъ этого относительныя ошибки. Прежде всего замѣтимъ, что въ двухъ послѣднихъ числахъ (1) послѣдняя цифра болѣе 5, а потому, какъ сказано въ § 1, отбрасывая послѣднюю цифру, нужно предыдущую цифру увеличить на единицу. При отбрасываніи послѣднихъ цифръ абсолютныя ошибки будутъ:

$$+0{,}0000004; \quad +0{,}003; \quad -0{,}0004; \quad -0{,}003.$$

Раздѣливъ эти ошибки на соотвѣтствующія числа (1), найдемъ относительныя ошибки. Такъ какъ отношеніе двухъ чиселъ не измѣняется, когда мы каждое число увеличимъ въ нѣсколько разъ, то относительныя ошибки могутъ быть приведены къ слѣдующему виду:

$$+\frac{4}{13424} \quad +\frac{3}{23123} \quad -\frac{4}{7866} \quad -\frac{3}{8057}. \tag{2}$$

Нужно эти ошибки представить въ формѣ десятичной дроби и вычислить первую значащую цифру; получимъ:

$$+0{,}00003; \quad +0{,}00001; \quad -0{,}00005; \quad -0{,}00004.$$

Числа, стоящія въ знаменателяхъ дробей (2), получаются, когда мы въ данныхъ приближенныхъ числахъ перенесемъ запятую на самый конецъ, т. е. отбросимъ запятую. Отсюда получается правило для нахожденія относительной ошибки при отбрасываніи послѣдней цифры.

*Нужно въ данномъ числѣ перенести запятую на самый конецъ, при чемъ получимъ цѣлое число; далѣе, могутъ быть два случая. Если, отбрасывая послѣднюю цифру, предыдущую цифру оставляемъ безъ перемѣны, то относительная ошибка будетъ положительною; она получится, когда послѣднюю цифру раздѣлимъ на цѣлое число. Если, отбрасывая послѣднюю цифру, предыдущую цифру увеличимъ на единицу, то относительная ошибка будетъ отрицательною; она получится, когда мы послѣднюю цифру вычтемъ изъ 10 и разность раздѣлимъ на цѣлое число.*

Предположимъ, что нужно произвести съ данною точностью умноженіе и дѣленіе нѣсколькихъ чиселъ. По правилу, указанному въ § 6, отбросимъ лишнія цифры; пусть упрощенное такимъ образомъ выраженіе будетъ:

$$\frac{cc'c''\ldots}{\partial\partial'\partial''\ldots} \tag{3}$$

Далѣе нужно рѣшить вопросъ: можно ли въ нѣкоторыхъ изъ найденныхъ чиселъ еще отбросить послѣднія цифры. Назовемъ числа $c$, $c'$, $c''$, ...., стоящія въ числителѣ выраженія (3), множителями; назовемъ числа $d$, $d'$, $d''$, ...., стоящія въ знаменателѣ выраженія (1), дѣлителями. Пусть число всѣхъ заданныхъ чиселъ равно $n$; положимъ, что требуется найти результатъ съ относительною точностью $\beta$. Въ каждомъ изъ чиселъ (3) отбросимъ послѣднюю цифру и найдемъ происшедшія относительныя ошибки; пусть относительныя ошибки множителей будутъ $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, ...., относительныя ошибки дѣлителей будутъ $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, .... Изъ изслѣдованій § 5 мы замѣчаемъ, что при умноженіи приближенныхъ чиселъ относительныя ошибки складываются, при дѣленіи приближенныхъ чиселъ относительныя ошибки вычитаются. Принявъ это во вниманіе, мы должны перемѣнить знаки въ относительныхъ ошибкахъ дѣлителей; получимъ слѣдующія ошибки:

$$\begin{matrix} \gamma, & \gamma', & \gamma'', \cdots \\ -\delta, & -\delta', & -\delta'', \ldots \end{matrix} \tag{4}$$

Далѣе отбрасываніе послѣдней цифры совершается по слѣдующимъ правиламъ.

*Если какая-нибудь изъ ошибокъ* (4) *по абсолютной величинѣ не превосходитъ* $\frac{\beta}{n}$, *то въ соотвѣтствующемъ числѣ* (3) *послѣднюю цифру можно отбросить.*

*Если алгебраическая сумма какихъ-нибудь* k *ошибокъ* (4) *по абсолютной величинѣ не превосходитъ* $\frac{k\beta}{n}$, *то послѣднія цифры въ соотвѣтствующихъ числахъ* (3) *могутъ быть отброшены.*

*Если алгебраическая сумма всѣхъ ошибокъ* (4) *не превосходитъ* $\beta$, *то во всѣхъ числахъ* (3) *послѣднія цифры могутъ быть отброшены.*

Возьмемъ примѣръ для поясненія:

$$\frac{0{,}146138 \times 4{,}62293 \times 64{,}3453}{77{,}0852 \times 8{,}69232 \times 0{,}094939}.$$

Положимъ, требуется произвести вычисленіе съ относительною точностью $\beta = 0{,}001$. Прежде всего по формулѣ 1 § 6 вычислимъ показатель точности данныхъ чиселъ:

$$\frac{0{,}5 \times 6}{0{,}001} = 3000.$$

По правилу, указанному въ § 3, удержимъ въ каждомъ числѣ необходимое число цифръ; получимъ слѣдующее выраженіе:

$$\frac{0{,}14614 \times 4{,}623 \times 64{,}35}{77{,}09 \times 8{,}692 \times 0{,}09494}.$$

Теперь отбросимъ въ каждомъ числѣ послѣднюю цифру и найдемъ, какъ показано выше, относительныя ошибки. Въ ошибкахъ дѣлителей перемѣнимъ знаки; получимъ слѣдующія выраженія ошибокъ:

$$+0{,}0003; \quad +0{,}0007; \quad \pm 0{,}0007$$

$$+0{,}0001; \quad -0{,}0002; \quad -0{,}0004.$$

Въ третьей ошибкѣ знакъ плюсъ или минусъ зависитъ отъ того, оставляемъ ли мы предыдущую цифру безъ перемѣны или увеличиваемъ на единицу.

Теперь производимъ оцѣнку ошибокъ.

Если въ третьей ошибкѣ удержимъ минусъ, то алгебраическая сумма всѣхъ ошибокъ не превзойдетъ 0,001; поэтому послѣднія цифры во всѣхъ числахъ могутъ быть отброшены.

Послѣ этого выраженіе, данное для вычисленія, приведется къ простѣйшей формѣ:

$$\frac{0{,}1461 \times 4{,}62 \times 64{,}4}{77{,}1 \times 8{,}69 \times 0{,}0949}.$$

Дальнѣйшее упрощеніе невозможно; еслибъ мы еще отбросили какую-нибудь послѣднюю цифру, то уже не получили бы результата съ желаемою точностью. Результатъ будетъ невѣренъ даже въ томъ случаѣ, когда мы какую-нибудь послѣднюю цифру измѣнимъ на единицу. Остается произвести указанныя дѣйствія.

*Заключеніе.* Сложеніе и вычитаніе приближенныхъ чиселъ не представляетъ затрудненій; труднѣе умноженіе и дѣленіе. Для лицъ, незнакомыхъ съ приближеннымъ вычисленіемъ, можно рекомендовать слѣдующее правило.

*Чтобы при умноженіи и дѣленіи приближенныхъ чиселъ получить результатъ съ даннымъ числомъ значащихъ цифръ, нужно въ каждомъ изъ данныхъ чиселъ удержать лишнюю цифру; въ окончательномъ результатѣ лишняя цифра отбрасывается.*

Однако, точный анализъ показываетъ, что это правило въ рѣдкихъ случаяхъ невѣрно. Кромѣ того, поступая по указанному правилу, мы иногда дѣлаемъ лишнія дѣйствія; послѣдній примѣръ показываетъ, что въ нѣкоторыхъ изъ данныхъ чиселъ можно не удерживать лишней цифры.

# НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

**Открытіе 6-го спутника Юпитера.** Хотя 1905-ый годъ лишь недавно начался, онъ уже ознаменовался нѣсколькими важными астрономическими открытіями, изъ которыхъ прежде всего слѣдуетъ упомянуть объ открытіи 6-го спутника планеты Юпитера. Г-нъ Перринъ, состоящій при Ликской Обсерваторіи, разсматривая фотографическіе снимки, снятые въ этой Обсерваторіи съ 3-го декабря 1904 г. по 4-е января 1905 года, открылъ новаго, шестого спутника Юпитера. Спутникъ этотъ есть свѣтило совсѣмъ незначительныхъ размѣровъ, 14-ой величины. 4-го января спутникъ этотъ находился на разстояніи 45′ отъ Юпитера, къ которому онъ приближался ежедневно на 45″. Его можно было хорошо наблюдать 4-го января съ Ликской Обсерваторіи при помощи телескопа Кросслея.

Пятый спутникъ Юпитера, открытый Барнардомъ въ Обсерваторіи Арицона (Arizzona) 9-го сентября 1892 года, свѣтило 13-ой величины и отличается, слѣдовательно, немного большимъ блескомъ, чѣмъ 6-ой.—Суточное вращеніе шестого спутника обратное. Это новое открытіе доказало еще разъ положительнымъ образомъ всю пользу примѣненія фотографіи къ астрономическимъ изслѣдованіямъ.

---

**Открытіе 7-го спутника Юпитера.** Германская центральная астрономическая Обсерваторія въ Килѣ извѣстила астрономическій міръ въ первыхъ числахъ марта объ открытіи тѣмъ же астрономомъ Г. Перриномъ въ Ликской Обсерваторіи седьмого спутника Юпитера. 28-го февраля настоящаго 1905 года астрономъ этотъ телеграфировалъ въ Киль и Парижъ объ открытіи имъ седьмого спутника Юпитера; 25-го февраля спутникъ этотъ находился на разстояніи 21′ отъ Юпитера и подвигался ежедневно впередъ на 1′ въ юго-восточномъ направленіи.—Спутникъ этотъ свѣтило 16-ой величины. Орбита его имѣетъ большой наклонъ къ эклиптикѣ, но кажущееся движеніе его, однако, прямое. Онъ былъ ясно виденъ со 2-го января въ большой телескопъ Кросслея. Изъ этого видно, что седьмой спутникъ находится гораздо ближе къ Юпитеру чѣмъ шестой, относительно котораго можно теперь положительно сказать, что это спутникъ Юпитера, а не слабая звѣзда, какъ предполагали до послѣдняго времени нѣкоторые астрономы.

---

**О числѣ туманностей.** Г-нъ Перринъ помѣстилъ въ прошломъ году въ одномъ изъ изданій Обсерваторіи Ликъ слѣдующую замѣтку.

„Профессоръ Келлеръ“, пишетъ Г-нъ Перринъ:„ въ скорости послѣ начала работъ, предпринятыхъ имъ при помощи рефлектора Кросслея, доказалъ, что число туманныхъ звѣздъ гораздо больше, чѣмъ предполагали. Онъ въ то время исчислялъ число туманныхъ звѣздъ, видимыхъ при посредствѣ этого телескопа, до 120,000; усовершенствованіе же телескопа дало возможность исправить эту неточность и достигнуть совсѣмъ другихъ результатовъ. На пятидесяти семи фотографіяхъ неба было открыто 345 новыхъ туманностей, а до того времени были извѣстны 142 туманности, что составляетъ вмѣстѣ 487 туманностей, или $8^1/_2$ туманностей на каждую изъ этихъ частей неба; а такъ какъ для изслѣдованія всего небеснаго свода слѣдовало бы снять 62,000 фотографическихъ снимковъ, то можно сказать, что число туманностей во всѣхъ частяхъ неба, которыя можно видѣть въ настоящее время съ помощью рефлектора Кросслея, достигаетъ громадной цифры въ 500,000.

При болѣе продолжительной же экспозиціи съ болѣе чувствительными пластинками и съ болѣе усовершенствованными фотографическими аппаратами можно, конечно, будетъ открыть еще много туманностей, которыхъ астрономы до сихъ поръ не замѣчали или смѣшивали со слабыми звѣздами. Вслѣдствіе этого, можно смѣло предполагать, что число туманностей, разбросанныхъ въ разныхъ частяхъ неба, доходитъ до милліона".

*К. Лысаковскій.*

---

**Новые опыты Маркони.** Въ настоящее время уже фактически существуетъ газета для пассажировъ, переѣзжающихъ черезъ Атлантическій океанъ. Пассажиры парохода „Campania", прибывшаго въ Нью-Іоркъ еще 12 іюня, во время пути каждый день получали газету изъ двухъ листовъ. На пароходѣ была устроена типографія, отпечатавшая всѣ извѣстія, которыя сообщалъ Маркони со своей станціи въ Польдгу. Во все время путешествія не прерывалось сообщеніе съ Америкой и съ Англіей. Первое извѣстіе съ мыса Бретонъ было получено на разстояніи 3200 километровъ. Маркони остался чрезвычайно доволенъ дѣйствіемъ своихъ магнитныхъ пріемниковъ и заявилъ, что когереръ вскорѣ станетъ достояніемъ музея, такъ какъ онъ ни въ какомъ случаѣ не достигаетъ такой чувствительности, какъ его магнитный детекторъ. Съ настоящаго времени на всѣхъ пароходахъ компаніи Кунардъ, находящихся въ плаваніи между Англіей и Америкой, будетъ ежедневно выходить газета.

(„Электричество").

# ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

**Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.**

**№ 605** (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x(y+z+\sqrt{yz})=a^2,$$
$$y(x+z+\sqrt{xz})=b^2,$$
$$z(x+y+\sqrt{xy})=c^2.$$

*Н. Агрономовъ* (Вологда).

**№ 606** (4 сер.). Опредѣлить цѣлыя и неотрицательныя значенія $x$ при которыхъ числовая величина выраженія

$$2^{n+2x}+3^{2n+x}+4^{3n},$$

гдѣ $n$ нечетное положительное число, кратна 11.

*Н. Готлибъ* (Юрьевъ).

**№ 607** (4 сер.). Найти истинное значеніе выраженія

$$z=\frac{\operatorname{tg}y-\cot y}{\sin y-\cos y}$$

при $y=\frac{\pi}{4}$.

*В. Тюнинъ* (Симскій заводъ).

**№ 608** (4 сер.). Разложить въ непрерывную дробь число

$$\sqrt{a^4+2a},$$

гдѣ $a$—число цѣлое и положительное.

*Н. С.* (Одесса).

**№ 609** (4 сер.). Найти наименьшее число вида $\frac{x}{x+1}$, превышающее количество

$$\sqrt{\frac{a}{a+1}},$$

при условіи, что $a$ есть данное, а $x$—искомое цѣлое положительное число.

(Заимств.) *П. Сорокинъ* (Варшава).

**№ 610** (4 сер.). Въ ртути при температурѣ $0^\circ$ плаваетъ цилиндръ, частью желѣзный и частью платиновый, такимъ образомъ, что верхнее основаніе этого цилиндра совпадаетъ съ уровнемъ жидкости. Высота желѣзнаго цилиндра при $0^\circ$ равна 12 сантиметрамъ, его діаметръ равенъ $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$ сантиметровъ. Опредѣлить 1) высоту платиновой части цилиндра при $0^\circ$, 2) массу платиновой части цилиндра. Указать, что произойдетъ при измѣненіи температуры до $20^\circ$.

Соотвѣтственныя плотности при $0^\circ$ желѣза, платины и ртути равны 7,8, 21,3 и 13,6; коэффиціентъ абсолютнаго расширенія ртути равенъ 0,00018, а коэффиціенты линейнаго расширенія желѣза и платины равны соотвѣтственно 0,000012 и 0,000008.

(Заимств.) *М. Г.*

# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

**№ 504** (4 сер.). *Найти такое простое число* а, *чтобы число* $5^{a^2}+1$ *дѣлилось на* $a^2$.

Искомое простое число не можетъ равняться 5, такъ какъ $5^{a^2}+1$ при всякомъ цѣломъ $a$ въ остаткѣ отъ дѣленія на 5 даетъ 1, а потому при $a=5$ число $5^{a^2}+1$ не дѣлится на 5, а потому не дѣлится и на $a^2$. Слѣдовательно, искомое простое число $a$ не равно 5 и потому есть число взаимно простое съ числомъ 5.

Представивъ выраженіе $5^{a^2}+1$ въ видѣ:

$$5^{a^2}+1=5^{a^2}-5+6=5\,(5^{a^2-1}-1)+6=$$

$$=5\left[(5^{a-1})^{a+1}-1^{a+1}\right]+6 \qquad (1).$$

Число $(5^{a-1})^{a+1}-1^{a+1}$ кратно $5^{a-1}-1$, которое, по теоремѣ Фермата, кратно $a$, такъ какъ, по доказанному выше, 5 есть число взаимно простое съ $a$. Но, по условію, $5^{a^2}+1$ кратно $a^2$, а потому тоже кратно $a$; поэтому (см. (1)) и число 6 кратно $a$. Слѣдовательно, $a$, какъ простое число, должно быть равно либо 2, либо 3. Но $5^{2^2}+1=626$ не дѣлится на $2^2=4$, а $5^{3^2}+1=1953126$ дѣлится на $3^2=9$. Итакъ, искомое простое число $a$ равно 3.

*Г. Оганянцъ* (Эривань);

**№ 505** (4 сер.). *Даны кругъ и точка* А *въ плоскости этого круга. Черезъ точку* А *проводятъ двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя, встрѣчающія окружность въ точкахъ* В *и* С, *и строятъ прямоугольникъ* ВАСМ. *Найти геометрическое мѣсто точки* М

Заимств. изъ *l'Éducation Mathématique.*

Пусть $O$—центръ круга, $N$—точка встрѣчи діагоналей $AM$ и $BC$ прямоугольника $BACM$. Тогда $AN=NM=BN=NC$, а потому $ON$ есть медіана треугольника $AOM$, а $ON$—перпендикуляръ къ $BC$. Слѣдовательно,

$$\overline{OM}^2+\overline{ON}^2=2\overline{ON}^2+2\overline{AN}^2=2(\overline{ON}^2+\overline{AN}^2)=$$

$$=2(\overline{ON}^2+\overline{BN}^2)=2\overline{OB}^2=2R^2,$$

— гдѣ $R$ — радіусъ даннаго круга, — откуда

$$\overline{OM}^2=2R^2-\overline{OA}^2,$$

т. е. $OM$ есть величина постоянная. Такимъ образомъ, искомое геометрическое мѣсто есть окружность круга, концентрическаго съ даннымъ, радіуса

$$\sqrt{2R^2-\overline{OA}^2}.$$

*Г. Оганянцъ* (Москва); *Н. С.* (Одесса).

**№ 507** (4 сер.). *Теплоемкость золота равна* 0,0298. *Сколько золота при* 45 *градусахъ надо положить въ* 1,00058 *килограммовъ воды, чтобы поднять ея температуру съ* 12°,3 *до* 15°,7.

(Заимств. изъ *L'Éducation Mathématique*).

Пусть $x$ килограммовъ золота есть искомое количество золота. При введеніи означеннаго количества золота въ воду, вода получаетъ 1,00058(15,7—12,3) калорій тепла, а золото теряетъ $(45-15,7).0,0298x$ калорій. Приравнивая эти количества тепла, находимъ:

$$1,00058.3,4=29,3x.0,0298,$$

откуда

$$x=\frac{10005,8.17}{293.149}=3,89627 \text{ килограммовъ}$$

съ точностью до 0,005 грамма съ недостаткомъ.

*Н. Пѣтуховъ* (Екатеринбургъ);

**№ 508** (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4,$$

$$x+y+z=6,$$

$$x^2+y^2+z^2=18.$$

Изъ перваго и второго уравненія слѣдуетъ:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2-(x+y+z)=4^2-6,\quad 2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})=10,$$

$$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=5 \quad (1)$$

Подобнымъ же образомъ изъ второго и третьяго изъ заданныхъ уравненій имѣемъ:

$$(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=6^2-18,\quad 2(xy+yz+zx)=18,$$

$$xy+yz+zx=9 \quad (2).$$

Изъ равенствъ (1) и (2) вытекаетъ:

$$(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})^2-(xy+yz+zx)=5^2-9,\quad 2(\sqrt{x^2yz}+\sqrt{xy^2z}+\sqrt{xyz^2})=16,$$

$$\sqrt{xyz}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})=8,$$

или (см. первое изъ данныхъ уравненій) $4\sqrt{xyz}=8$. т. е.

$$\sqrt{xyz}=2;\ xyz=4 \ (3).$$

Представивъ уравненіе (2) въ видѣ $x(y+z)+yz=9$ и подставляя (см. второе данное уравненіе) $6-x$ вмѣсто $y+z$ и (см. (3)) $\frac{4}{x}$ вмѣсто $yz$, получимъ послѣ обычныхъ упрощеній уравненіе

$$x^3-6x^2+9x-4=0,\quad \text{т. е. } (x-1)^2(x-4)=0,$$

откуда

$$x_1=1;\qquad x_2=4.$$

Подставляя одно изъ найденныхъ значеній $x$ въ уравненіе $x+y+z=6$ и въ уравненіе (3), находимъ обычнымъ путемъ соотвѣтствующія значенія $y$ и $z$. Окончательно получаются такія рѣшенія: $x=y=1$, $z=4$; $y=z=1$, $x=4$; $z=x=1$, $y=4$. Получивъ равенства (2), (3), можно закончить рѣшеніе задачи нѣсколько иначе: такъ какъ по условію $x+y+z=6$, и, кромѣ того, (см. (2), (3)), $xy+yz+zx=9$, $xyz=4$, то, по извѣстной теоремѣ, $x$, $y$ и $z$ суть корни уравненія

$$t^3-6t^2+9t-4=0,$$

т. е., по разложеніи лѣвой части на множителей, уравненія

$$(t-1)^2(t-4)=0,$$

откуда $x$, $y$, $z$ равны числамъ 1, 1, 4 въ любомъ соотвѣтствіи.

*В. Гейманъ* (Θеодосія); *В. Винокуровъ* (Калязинъ); *Н. Плахово* (Винница); *Н. Агрономовъ* (Вологда).

**№ 511** (4 сер.). *Доказать, что если* m *и* n *означаютъ два числа, не дѣлящіяся на* 3, *то число*

$$(m-n)(m^2-mn+n^2)(m^3+2m^2n+2mn^2+n^3)$$

*дѣлится на* 9.

Представимъ данное выраженіе послѣдовательно въ видѣ:

$$(m-n)(m^2-mn+n^2)(m^3+2m^2n+2mn^2+n^3)=$$

$$=(m-n)(m^2-mn+n^2)(m+n)(m^2-mn+n^2+2mn)=$$

$$=(m-n)(m+n)[(m^2+n^2-mn)(m^2+n^2+mn)]=(m^2-n^2)(m^4+n^4+m^2n^2)=$$

$$=(m^2-n^2)[(m^2-n^2)^2+3m^2n^2] \quad (1).$$

Такъ какъ числа $m$ и $n$ по условію не кратны 3, то по теоремѣ Фермата, числа $m^2-1$ и $n^2-1$ кратны 3, а потому и разность $(m^2-1)-(n^2-1)=m^2-n^2$ кратна 3. Слѣдовательно (см. (1)) каждый изъ двухъ множителей $m^2-n^2$ и $(m^2-n^2)^2+3m^2n^2$ разсматриваемаго числа кратенъ 3, а потому разсматриваемое число кратно 9.

*В. Гейманъ* (Θеодосія); *В. Винокуровъ* (Калязинъ); *Д. Колянковскій* (Брацлавъ); *Н. Плахово* (Винница); *Н. Агрономовъ* (Вологда).

**№ 512** (4 сер.). *Доказать, что во всякомъ треугольникѣ количества*

$$(b-c)^2(b+c-a), \quad (c-a)^2(c+a-b), \quad (a-b)^2(a+b-c)$$

*соотвѣтственно пропорціональны количествамъ*

$$\sin A\sin^2\frac{B-C}{2}, \quad \sin B\sin^2\frac{C-A}{2}, \quad \sin C\sin^2\frac{A-B}{2}.$$

*(Черезъ* a, b, c *и* A, B, C *означены стороны и соотвѣтственно противолежащіе имъ углы треугольника).*

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Пользуясь формулами $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$, гдѣ $R$ радіусъ круга описаннаго, и формулой $\sin B+\sin C-\sin A=\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}$, получимъ:

$$(b-c)^2(b+c-a)=8R^3(\sin B-\sin C)^2(\sin B+\sin C-\sin A)=$$

$$=8R^3.\,4\sin^2\frac{B-C}{2}\cos^2\frac{B+C}{2}\cdot 4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}\cos=$$

$$=128R^3\sin^2\frac{B-C}{2}\sin^2\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}=$$

$$=64R^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\sin^2\frac{B-C}{2}=$$

$$=64R^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\sin A\sin^2\frac{B-C}{2} \quad (1).$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$(c-a)^2(c+a-b)=64R^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\sin B\sin^2\frac{C-A}{2}\quad(2),$$

$$(a-b)^2(a+b-c)=64R^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\sin C\sin^2\frac{A-B}{2}\quad(3).$$

Изъ равенствъ (1), (2), (3) вытекаетъ:

$$\frac{(b-c)^2(b+c-a)}{\sin A\sin^2\frac{B-C}{2}}=\frac{(c-a)^2(c+a-b)}{\sin B\sin^2\frac{C-A}{2}}=\frac{(a-b)^2(a+b-c)}{\sin C\sin^2\frac{A-B}{2}}=64R^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

*В. Гейманъ* (Θеодосія); *Н. Плахово* (Винница); *Г. Оганянцъ* (Москва); *Э. Сейдель* (Ростовъ н/Д).

**№ 513** (4 сер.). *Ареометръ Фаренгейта вѣситъ* 80 *граммовъ; при нагрузкѣ въ* 45 *граммовъ онъ погружается при* $20^0$ *до черты въ жидкости, плотность которой при этой температурѣ равна* 1,5. *Чему равенъ объемъ ареометра до черты при* $0^0$? *Коэффиціентъ кубическаго расширенія стекла равенъ* $\frac{1}{38700}$.

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Назовемъ объемъ ареометра до черты въ кубическихъ сантиметрахъ при $20^0$ черезъ $v$, а при $0^0$ черезъ $x$. Вѣсъ жидкости, вытѣсняемой при $20^0$ объемомъ его погруженной части, т. е. по условію, объемомъ его до черты, равенъ, согласно съ закономъ Архимеда, вѣсу всего прибора вмѣстѣ съ нагрузкой, т. е. равенъ $80+45=125$ граммовъ. Поэтому

$$125=1{,}5v\quad(1).$$

По формулѣ теплового расширенія имѣемъ:

$$v=x\left(1+\frac{20}{38700}\right)=\frac{1936}{1935}x\quad(2).$$

Подставляя опредѣленное изъ уравненія (1) значеніе $v$ въ равенство (2), находимъ затѣмъ значеніе $x$:

$$x=\frac{126.1935}{1{,}5.1936}=83{,}29 \text{ кубическихъ сантиметровъ},$$

съ недостаткомъ, съ точностью до 0,0005 куб. сантиметра.

*В. Гейманъ* (Θеодосія); *Г. Оганянцъ* (Москва); *Н. Живовъ* (Кременчугъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 25-го Апрѣля 1905 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго. д. № 66.

Обложка
пщется

Обложка
ищется