Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXXIII Сем.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

15 Іюня. № 395. 1905 г.

ОСНОВАНІЯ АРИѲМЕТИКИ.

И. Александрова (Тамбовъ).

Статья профессора А. Клоссовскаго въ № 379 „Вѣстника Опытной Физики“ подъ заглавіемъ: „Символы элементарной математики“ по отношенію къ ариѳметикѣ, въ сущности, имѣетъ очень много сходнаго съ тѣми основаніями, которыя я здѣсь предлагаю. Школьное изложеніе этого предмета, конечно, не можетъ быть такимъ, какъ въ упомянутой статьѣ. Языкъ средней школы долженъ быть чуждъ всякой сложной терминологіи. Я принадлежу къ крайнимъ противникамъ увеличивающейся безъ конца научной терминологіи; она создаетъ кастовыя, чисто жреческія особенности педагоговъ и ученыхъ, она часто безъ всякой надобности воздвигаетъ китайскую стѣну между спеціалистами и лицами, желающими понять дѣло. Поэтому я излагалъ то же самое въ различныхъ простыхъ формахъ. Ниже предложены вниманію читателей двѣ системы изложенія; самая краткая—въ примѣчаніяхъ. Обработка обѣихъ системъ вызвана тѣмъ, на что указываютъ многіе авторы, а именно, принципомъ, которому едва ли есть равный. Не только въ наукѣ, но и гдѣ угодно, нѣтъ ничего важнѣе, какъ умѣніе различать то, справедливость чего мы допускаемъ на основаніи посильнаго опыта, и то, что на основаніи предыдущихъ соглашеній, отвергнуть становится уже логически невозможнымъ. Принципъ этотъ одинаково важенъ и для науки, и для жизни, какъ для взрослыхъ, такъ и для дѣтей; онъ одинаково силенъ вездѣ, начиная съ кухни и кончая храмомъ политики.

Сдѣлаемъ еще три замѣчанія. Если одни и тѣ же ежедневные опыты приводятъ насъ къ двумъ аксіомамъ, изъ которыхъ вторая можетъ быть выведена изъ первой, то можно первую, если она не нужна, оставить, а пользоваться лишь второй аксіомой.

Многолѣтній опытъ мнѣ показалъ, что дѣлать опредѣленія сложенія и вычитанія совершенно безполезно, если не вредно. Дѣло въ томъ, что если мы изъ опыта почерпнули правильное понятіе объ этихъ дѣйствіяхъ, то термины: „сложить", „соединить", „присчитать", „сосчитать" и т. п. имѣютъ для насъ одинаковую ясность и не могутъ быть опредѣляемы одинъ черезъ другой; то же самое съ терминами: „вычесть", „отложить", „отсчитать", „отбавить", „сбросить" и т. п. Та же исторія съ дѣленіемъ на равныя части. Далѣе я полагаю, что употребленіе широкихъ опредѣленій вычитанія и дѣленія, а равно отождествленіе умноженія съ нахожденіемъ частей въ средней школѣ на первыхъ порахъ совершенно преждевременно, ибо первая главная цѣль средней школы дать учащимся ясныя, рѣзко очерченныя представленія о дѣйствіяхъ; при томъ польза этихъ опредѣленій, по крайней мѣрѣ въ младшихъ классахъ, съ достаточною ясностью не можетъ быть показана. Замѣчательно, что ни одинъ авторъ систематическихъ руководствъ ариѳметики [1]) не сумѣлъ легко и ясно изложить дѣленіе многозначныхъ чиселъ, пользуясь широкимъ опредѣленіемъ этого дѣйствія; громадное большинство, начиная свои объясненія, отступаетъ отъ широкаго опредѣленія этого дѣйствія. Мѣсто широкихъ опредѣленій ариѳметики—въ высшей, а не въ средней школѣ; тамъ легко показать не только пользу, но и неизбѣжность широкихъ опредѣленій. Для краткости всѣ аксіомы ариѳметики (другихъ не понадобилось) [2]) озаглавлены римскими цифрами, всѣ теоремы—арабскими, слѣдствія изъ аксіомъ и теоремъ—буквами A, B, C, D,... Знакъ (II, C) указываетъ ссылку на 3-е слѣдствіе изъ 2-ой аксіомы; знакъ (7, D) дѣлаетъ ссылку на 4-ое слѣдствіе изъ 7-ой теоремы и т. д. Нѣкоторыя опредѣленія высказаны въ примѣчаніяхъ.

I. *Результатъ поединичнаго счета не зависитъ отъ его начала и отъ того, гдѣ останавливали счетъ*, другими словами, *чтобъ сложить*

---

[1]) Давно мнѣ предложили вопросъ: „что такое систематическій курсъ ариѳметики?" Дѣло въ томъ, что ариѳметика не есть наука, а искусство (слова великаго нашего учителя, профессора П. Л. Чебышева). „Систематическій курсъ ариѳметики—это такой курсъ, по которому не слѣдуетъ учиться"—лучшаго отвѣта я тогда не нашелъ, не нахожу и до сихъ поръ.

[2]) При доказательствѣ теоремъ № 4 и 5, повидимому, играетъ роль аксіома: „если къ равнымъ придать поровну, то получатся равныя" и слѣдствія изъ нея. Въ дѣйствительности эта аксіома (II, C) и слѣдствія изъ нея могутъ быть весьма легко выведены на основаніи свойствъ суммы, разности, произведенія и частнаго. Пусть, напр., $a = b$; требуется доказать, что $ac = bc$. Имѣемъ $a = \frac{bc}{c}$ (III, A), а потому $bc=ac$ (III). Такъ же доказывается, что если $a=b$, то $a-c=b-c$ и $a:c=b:c$.

нѣсколько чиселъ, можно разбить ихъ на произвольныя части [3]), *складывать эти части въ произвольномъ порядкѣ и результаты отдѣльныхъ сложеній соединить.*

Въ справедливости сказаннаго легко убѣдиться, считая множество какихъ-нибудь предметовъ и прерывая счетъ на различныхъ единицахъ.

А. Чтобъ умножить [4]) одно число на другое, можно оба числа разбить на произвольныя части, каждую часть 1-го умножить на каждую часть 2-го и результаты соединить. Напримѣръ, $25\times37=25+25+\ldots+25$ (37 разъ) $=$ (I) $20+20+20+\ldots+20+5+5+5+5+5+\ldots+5=$ (I) $20.30+20.7+5.30+5.7$, что и требовалось доказать.

II. *Если вычитаніе сдѣлано вѣрно, то уменьшаемое равно вычитаемому плюсъ разность;* другими словами, вычитаніе повѣряется сложеніемъ вычитаемаго и разности [5]).

А. Чтобъ вычесть одно число изъ другого, можно оба числа разбить на произвольныя части, отъ каждой части перваго числа отнять соотвѣтственную часть второго и результаты соединить. Такъ напримѣръ, примѣняя аксіомы II и I, непосредственной повѣркой легко убѣдиться, что $87-29=(70-20)+(17-9)$.

В. Одно слагаемое равно суммѣ безъ другихъ слагаемыхъ, или вычитаемое равно уменьшаемому безъ разности.

С. Если къ равнымъ придать поровну, то получимъ равныя. Пусть $a=b$. Допустимъ, что $a+d>b+d$. Тогда (прим. 3-е) $a+d=b+d+c$, откуда (II, B) $a=a+d+c-d$, или $a=a+c$, что представляетъ, очевидно, нелѣпость.

1. *Произведеніе не мѣняется съ измѣненіемъ порядка производителей*—доказывается различными способами.

Вотъ наглядное доказательство, доступное и дѣтямъ. Беремъ

---

[3]) Если одно число равно другому плюсъ третье, то первое называютъ цѣлымъ или большимъ, второе частью или меньшимъ; третье называется тоже частью, оно указываетъ, на сколько первое число больше второго. Дальше легко распространить эти опредѣленія на множество слагаемыхъ.

[4]) Умножить значитъ набрать (сложить) множимое столько разъ, сколько единицъ во множителѣ.

[5]) Во многихъ среднихъ школахъ ученикъ на вопросъ: „почему уменьшаемое равно вычитаемому плюсъ разность", долженъ отвѣчать: „потому что разность указываетъ, на сколько уменьшаемое больше вычитаемаго". Для ясности обратимся къ частному случаю: $5-3=2$; почему $5=3+2$? „Потому что 2 показываетъ, на сколько 5 больше 3". Но что обозначаетъ послѣдняя фраза? (см. 3-е примѣчаніе). Именно то, что $5=3+2$. Итакъ, вникая въ смыслъ терминовъ, входящихъ въ первоначальный вопросъ и отвѣтъ, ихъ надо уподобить слѣдующимъ вопросамъ и отвѣтамъ. „Почему этотъ треугольникъ—равносторонній?" „Потому что у него равныя стороны", или „Почему Вы прогуливаетесь?" „Потому что я дѣлаю променадъ". Въ вопросѣ и отвѣтѣ нѣтъ ни малѣйшей зависимости причины и слѣдствія. Такъ изъ превосходнаго живого учебнаго матеріала дѣлаютъ пустую болтовню, которой при томъ придаютъ важное значеніе.

три пятка въ видѣ трехъ столбиковъ, въ каждомъ по 5 кубиковъ Снимемъ съ каждаго столбика по 1 верхнему кубику,—у насъ получится 1 столбикъ въ 3 кубика, первая тройка. Снимемъ съ каждаго столбика еще по 1 кубику—получимъ вторую тройку и т. д. Въ концѣ у насъ получится 5 троекъ. А такъ какъ общее число кубиковъ осталось то же, то 3 пятка составятъ 5 троекъ, или $5 \times 3 = 3 \times 5$ [6]).

Далѣе легко распространить эту теорему на нѣсколько производителей. Такъ какъ послѣ умноженія 5 на 3 мы получаемъ 5 троекъ, то заключаемъ:

А. Умноженіе цѣлыхъ чиселъ равносильно превращенію каждой единицы множимаго въ множителя [7]) и обратно: превращеніе каждой единицы даннаго числа въ другое число равносильно умноженію перваго числа на другое.

2. *Если данное число увеличимъ въ два раза, а результатъ увеличить въ 5 разъ, то данное число увеличится въ 10 разъ* ($2 \times 5 = 10$) [8]).

Послѣ умноженія на 2, каждая единица множимаго превратится въ двойку. Послѣ умноженія на 5, каждая единица двойки превратится въ пятокъ, а сама двойка—въ десятокъ. Слѣдовательно, сколько въ данномъ числѣ было единицъ, столько же теперь будетъ десятковъ, а такое превращеніе каждой единицы даннаго числа равносильно умноженію его на 10 (I, A).

III. *Если дѣленіе сдѣлано вѣрно, то дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное или частному, умноженному на дѣлителя* (для дѣленія на равныя части); другими словами, дѣленіе повѣряется умноженіемъ. Эта аксіома вызываетъ много слѣдствій. Всѣ они доказываются простой повѣркой, примѣняя аксіомы I, II, III. Для краткости я выражаю ихъ по возможности знаками.

А. $(a:b) \times b = a$ и
$(a \times b):b = a$ (III).

В. $ab:c = (a:c).b$ и
$a:bc = (a:b):c$.

С. Если $s = a + b + c$, то $\frac{s}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x}$ (III и I, A).

---

[6]) Зная эту теорему, легко въ нѣкоторыхъ случаяхъ считать безъ приписки нулей. Такъ, тысяча десятковъ должна составить десять тысячъ, милліонъ сотенъ—сто милліоновъ и проч.

[7]) Во многихъ случаяхъ весьма полезная истина. При именованномъ множимомъ ее можно выразить такъ: при умноженіи каждая единица множимаго превращается во столько такихъ же единицъ, сколько единицъ во множителѣ. Такимъ образомъ, напр., 47 лист. $\times 480 = 47$ стопъ, 57 мин. $\times 60 = 57$ часовъ и проч.

[8]) Истину $7 \times 5 = 35$ люди выражаютъ разными словами: 35 больше 7 въ 5 разъ, 7 меньше 35 въ 5 разъ, 7 содержится въ 35 пять разъ, 7 есть пятая часть 35-ти. Одна и та же истина выражается пятью способами.

D. Если каждое слагаемое дѣлится на какое-нибудь число, то сумма дѣлится на то же число [9]).

E. Если сумма и одно слагаемое дѣлятся на какое-нибудь число, то сумма прочихъ слагаемыхъ раздѣлится на то же число [9]).

F. Если всѣ слагаемыя, кромѣ одного, дѣлятся на какое-нибудь число, то сумма не дѣлится на то же число [9]).

G. Дѣленіе на равныя части равносильно превращенію каждой единицы дѣлимаго въ нѣкоторую долю той же единицы [10]).

H. $\frac{a:c}{b:c}=\frac{a}{b}$ и обратно $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$.

J. Если a не дѣлится на b, то a не дѣлится на bc (обратное доказательство).

3. *Наибольшій дѣлитель D двухъ чиселъ A и B равенъ наибольшему дѣлителю меньшаго числа B и остатка C, полученнаго при дѣленіи A на B.*

Разсматривая равенства $A=Bx+C$, мы, во первыхъ, убѣждаемся (III, E), что D есть дѣлитель чиселъ B и C.

Пусть число $E>D$ и дѣлитъ безъ остатка числа B и C. Тогда изъ того же равенства (III, D) выходитъ, что A дѣлится на E. Такимъ образомъ, наибольшимъ дѣлителемъ A и B было бы число E, большее D, что несогласно съ даннымъ [11]).

---

[9]) Доказывается, разсматривая равенства $s=a+b+c$ и $\frac{s}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}$. Слѣдствія C, D, E, F легко распространить на уменьшаемое, вычитаемое и разность.

[10]) На основаніи этой истины легко доказать много истинъ, вродѣ слѣдующей: „если данное число раздѣлить на 20, а результатъ умножить на 5, то число уменьшится въ 4 раза (20:5=4)".

[11]) Далѣе слѣдуетъ довольно сложная система теоремъ, которую мнѣ никогда не удавалось сократить, не вводя новой аксіомы. Если же ввести новую аксіому, то получимъ слѣдующую, довольно короткую систему.

IV. ***Всякое число разлагается на множителей единственнымъ способомъ.***

На основаніи этой аксіомы легко доказать всѣ предложенія, нужныя для дѣлимости чиселъ. Докажемъ, напримѣръ, теоремы № 7 и 10.

7. Если число дѣлится на другое, то каждый множитель дѣлителя присутствуетъ въ дѣлимомъ въ степени, не меньшей, чѣмъ въ дѣлителѣ.

Пусть A дѣлится на B, такъ что A=BX. Допустимъ, что и B есть множитель, отсутствующій въ A. Тогда для одного и того же числа получается два разложенія на простыхъ множителей, что невозможно. Допустимъ далѣе, что к кой нибудь множитель въ B имѣетъ степень, превышающую степень того же множителя въ A. Тогда опять для одного числа получается два различныхъ разложенія на множителей, что невозможно.

10. ***Если A дѣлится порознь на взаимно простыя числа B и C, то A дѣлится на BC.***

Каждый множитель B присутствуетъ въ A въ неменьшей степени. Каждый множитель C присутствуетъ въ A въ неменьшей степени. Такъ какъ среди множителей B и C нѣтъ одинаковыхъ, то умноженіе B на C въ результатѣ не возвыситъ степени ни одного множителя. Слѣдова-

Пусть требуется найти наибольшаго дѣлителя чиселъ 210 и 130.

Вмѣсто этого можно искать наибольшаго дѣлителя 130 и 80; вмѣсто этого можно искать наибольшаго дѣлителя 80 и 50 и т. д.

4. *Несократимое уравненіе* $ax \pm by = c$ *можетъ имѣть цѣлыя рѣшенія только при простыхъ* a *и* b.

Доказательство извѣстно (III, D).

5. *Если въ несократимомъ уравненіи* $ax - by = c$ *коэффиціенты* a *и* b *взаимно простые, то оно имѣетъ цѣлыя рѣшенія.*

Пусть имѣемъ уравненіе $21x - 13y = 11$ (1). Такъ какъ $y = \frac{21x - 11}{13} = x + \frac{8x - 11}{13}$, то, полагая $\frac{8x - 11}{13} = z$, получимъ уравненіе $8x - 13z = 11$ (2). Зависимость уравненій (2) и (1) слѣдующая. Если уравненіе (2) имѣетъ цѣлыя рѣшенія, то уравненіе (1) тоже имѣетъ цѣлыя рѣшенія. Одинъ изъ коэффиціентовъ уравненія (2) такой же, какъ въ уравненіи (1), а другой равенъ остатку при дѣленіи большаго коэффиціента уравненія (1) на меньшій. Поступая съ уравненіемъ (2) такъ же, какъ съ уравненіемъ (1) и продолжая ту же операцію, мы придемъ къ уравненію вида $z - du = e$, которое, очевидно, имѣетъ цѣлыя рѣшенія. Слѣдовательно, и уравненіе (1) имѣетъ цѣлыя рѣшенія.

6. *Если* a *и* b *суть числа, простыя съ* c, *то и* ab *есть число простое съ* c.

Уравненіе $ax - cy = 1$ имѣетъ цѣлыя рѣшенія (5); пусть $x = p$, $y = q$ будутъ два цѣлыхъ рѣшенія этого уравненія. Тогда $ap - cq = 1$ или $abp - cbq = b$. Сравнивая это тождество съ уравненіемъ $abz - ct = b$, мы видимъ, что это несократимое уравненіе имѣетъ цѣлыя рѣшенія $z = p$, $t = bq$, а для этого необходимо, чтобъ числа ab и c были взаимно простыя (3). [12]).

A. Если a простое съ c, то a^n — простое съ c^m.

Доказывается легко, полагая въ теоремѣ 6-ой $b = a$, $b = a^2$, $b = a^3$ и т. д.

B. Если взаимно простыя числа $a, b, c, \ldots, e$ въ то же время

тельно, каждый множитель числа BC будетъ присутствовать въ числѣ A и притомъ не въ меньшей степени, а потому A дѣлится на BC. Если A дѣлится порознь на B и C, но числа B и C имѣютъ общаго множителя, то могутъ быть два случая. При умноженіи B на C степень этого общаго множителя станетъ больше степени того же множителя въ числѣ A. Тогда A не будетъ дѣлиться на BC. Въ остальныхъ случаяхъ A будетъ дѣлиться на BC.

[12]) Это доказательство, насколько мнѣ извѣстно, принадлежитъ профессору Ю. В. Сохоцкому.

не имѣютъ общихъ множителей съ взаимно простыми числами $a_1, b_1, c_1, \ldots, e_1$, то число $a^x b^y \ldots e^z$ будетъ взаимно простое съ числомъ $a_1^{x_1} b_1^{y_1} \ldots e_1^{z_1}$.

Легко доказывается, многократно примѣняя теорему 6 и (6, A).

7. *Если A дѣлится на B, то каждый множитель B входитъ въ составъ числа A въ неменьшей степени.*

Пусть $A = a^x b^y \ldots c^z$. Допустимъ, что $B = a_1 B_1$. Тогда, такъ какъ $a, b, \ldots, c$ суть числа, взаимно простыя съ a_1, то и A простое съ a_1 (6, B). Если же такъ, то A не можетъ дѣлиться на $B = a_1 B_1$ (III, J). Допустимъ теперь, что $B = a^{x_1} B_1$, такъ что $x_1 = x + k$. Тогда $\frac{A}{B} = \frac{b^y \ldots c^z}{a^k B_1}$ (III, H). Но a простое съ $b, \ldots, c$; слѣдовательно, дѣлимость $b^y \ldots c^z$ на $a^k B_1$, а потому и дѣлимость A на B не можетъ состояться (6, B и III, J).

Остается предположить то, что надо доказать.

8. *Всякое число разлагается на простыхъ множителей только однимъ способомъ.* [13])

Допустимъ, что число N имѣетъ два разложенія на множителей, расположенныхъ по мѣрѣ ихъ возрастанія, такъ что $N = a^x b^y \ldots c^z$ и $N = a_1^{x_1} b_1^{y_1} \ldots c_1^{z_1}$. Тогда получаются два равенства:

$$\frac{a^x b^y \ldots c^z}{a_1^{x_1} b_1^{y_1} \ldots c_1^{z_1}} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{a_1^{x_1} b_1^{y_1} \ldots c_1^{z_1}}{a^x b^y \ldots c^z} = 1.$$

Изъ перваго равенства выходитъ, что каждое число изъ ряда $a_1, b_1, \ldots, c_1$ найдется въ ряду чиселъ $a, b, \ldots, c$; изъ второго равенства видно, что каждое число изъ ряда $a, b, \ldots, c$ присутствуетъ въ ряду $a_1, b_1, \ldots, c_1$. Слѣдовательно, $a = a_1, b = b_1, \ldots, c = c_1$. Далѣе изъ перваго равенства вытекаетъ: $x \geqslant x_1, y \geqslant y_1, \ldots, z \geqslant z_1$, а изъ второго, что $x_1 \geqslant x, y_1 \geqslant y, \ldots, z_1 \geqslant z$. Слѣдовательно, $x = x_1$, $y = y_1, \ldots, z = z_1$, и оба разложенія тождественны.

9. *Если AB дѣлится на C и A простое съ C, то B дѣлится на C.*

Каждый множитель C долженъ быть въ AB и притомъ не въ меньшей степени (7). Но такъ какъ у B и C нѣтъ общихъ множителей, то каждый множитель числа C найдется не въ меньшей степени въ числѣ A. Слѣдовательно, A дѣлится на C (III, B).

10. *Если A дѣлится порознь на два взаимно простыхъ числа B и C, то оно дѣлится и на BC.*

Доказано въ примѣчаніи 10-омъ. Можно также доказать на основаніи теоремы 9-ой.

---

[13]) Взято изъ „Теоріи чиселъ" П. Л. Чебышева.

11. *Если двѣ несократимыя дроби равны, то онѣ тождественны.*

Изъ равенства $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ слѣдуетъ $ad=bc$.

Такъ какъ у d и c нѣтъ общихъ множителей, то, чтобы это равенство состоялось, необходимо (8), чтобъ каждый множитель часла a находился въ числѣ c въ той же степени и чтобъ каждый множитель числа c присутствовалъ въ a въ той же степени. Слѣдовательно, $a=c$.

Можно также доказывать, разсматривая равенства $\frac{ad}{b}=c$ и $\frac{bc}{d}=a$ (9).

ИСТОРИЧЕСКІЙ ОЧЕРКЪ

развитія ученія объ основаніяхъ геометріи.

Привать-доцента В. Кагана.

*(Продолженіе *).*

Работы Грассмана и его послѣдователей имѣли значеніе въ смыслѣ развитія общихъ идей, подготовившихъ почву для правильной постановки новаго геометрическаго ученія. Но возрожденіе этого ученія послѣ смерти его творцовъ непосредственно связано съ рядомъ другихъ работъ, посвященныхъ не философскимъ, а строго геометрическимъ вопросамъ. Это изслѣдованія, относящіяся къ задачѣ о наложеніи поверхностей; всѣ они опираются на знаменитый мемуаръ Гаусса: „Общія изысканія о кривыхъ поверхностяхъ“ [1]).

Приступая къ изслѣдованію поверхностей, Гауссъ указываетъ три способа аналитическаго выраженія поверхности. Во первыхъ, поверхность можетъ быть выражена однимъ уравненіемъ вида $F(x, y, z)=0$, связывающимъ декартовы координаты

---

[1]) *C. F. Gauss.* „Disquisitiones generales circa superficies curvas“. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VI. 1827. (Commentationes classis mathematicae). Этотъ замѣчательный мемуаръ переведенъ почти на всѣ европейскіе языки. Русскій переводъ, принадлежащій М. Филиппову, помѣщенъ во II изданіи юбилейнаго сборника: „Основанія геометріи“, изданнаго Казанскимъ Физико-Математическимъ Обществомъ. Казань. 1895. Обратимъ также вниманіе на нѣмецкій переводъ, принадлежащій Вангерину и помѣщенный въ Оствальдовскомъ изданіи классиковъ. Этотъ переводъ снабженъ весьма цѣнными примѣчаніями.

C. F. Gauss. „Flächentheorie“. Deutsch herausgegeb. v. *A. Wangerin.* Ostwalds Klassiker der exacten Wissenschaften. № 5.

---

*) См. № 392 „Вѣстника“.

ея точекъ; во вторыхъ, поверхность можетъ быть выражена тремя уравненіями вида:

$$x=\varphi(u,\ v),\ y=\psi(u,\ v),\ \ z=\chi(u,\ v), \tag{1}$$

выражающими координаты точекъ въ зависимости отъ двухъ перемѣнныхъ параметровъ; въ третьихъ, поверхность можетъ быть выражена уравненіемъ вида $z=f(x,\ y)$, явно опредѣляющимъ одну изъ координатъ въ зависимости отъ двухъ остальныхъ. Послѣдній способъ можетъ быть разсматриваемъ, какъ частный случай перваго или третьяго способа.

Изъ этихъ трехъ способовъ второй представляетъ собой пріемъ, почти совершенно новый. До Гаусса выраженіе поверхности тремя параметрическими уравненіями примѣнялось лишь въ частныхъ случаяхъ къ отдѣльнымъ поверхностямъ. Въ „Disquisitiones generales“ этотъ пріемъ пріобрѣтаетъ совершенно исключительное значеніе.

Перемѣнныя u и v могутъ быть разсматриваемы, какъ координаты точки на поверхности, выражаемой уравненіями (1). Элементъ длины расположенной на поверхности кривой, выражается въ этихъ координатахъ формулой:

$$ds=\sqrt{Edx^2+2Fdudv+Gdv^2}, \tag{2}$$

гдѣ E, F и G суть функціи параметровъ u и v,—а именно, если x, y, z суть ортогональныя декартовы координаты точки на поверхности, то

$$\begin{aligned} E&=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\\ F&=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},\\ G&=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Одна изъ двухъ сторонъ поверхности условно принимается за внѣшнюю, другая за внутреннюю; сообразно съ этимъ и двумъ сторонамъ нормали въ каждой точкѣ поверхности приписывается внутреннее и внѣшнее направленіе.

Изъ начала координатъ, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ единицѣ длины, Гауссъ описываетъ сферу; за внѣшнюю ея сторону онъ принимаетъ ту, которая отвращена отъ центра. На этой вспомогательной сферѣ онъ отображаетъ заданную поверхность слѣдующимъ образомъ. Изъ центра сферы проводится лучъ, параллельный внѣшней нормали въ данной точкѣ M на поверхности; этотъ лучъ пересѣкаетъ сферу въ нѣкоторой точкѣ m, которая и принимается за изображеніе точки M на поверхности. Вмѣстѣ съ тѣмъ всякой линіи, контуру, площади на поверхности соотвѣтствуютъ, вообще говоря, линія, контуръ, площадь на сферѣ. Изображенія различныхъ частей на сферѣ могутъ иногда налагаться другъ на друга; но если мы ограничимся достаточно малой частью поверхности, то этого, вообще говоря, не будетъ. Тѣ точки поверхности, которыхъ нельзя окружить достаточно малымъ контуромъ, удовлетворяющимъ этому условію, а также особенныя точки, въ которыхъ не существуетъ вовсе нормали, исключаются изъ разсмотрѣнія.

Представимъ себѣ теперь замкнутую площадку на поверхности, изображенія точекъ которой на вспомогательной сферѣ не налагаются другъ на друга. Величину площади изображенія Гауссъ называетъ *полной кривизной* площадки, взятой на поверхности. Отсюда Гауссъ переходитъ къ опредѣленію наиболѣе важнаго понятія, введеннаго имъ въ этомъ мемуарѣ,—о *мѣрѣ кривизны* (Krümmungsmass) въ данной точкѣ поверхности.

Положимъ, что намъ дана нѣкоторая точка на поверхности; представимъ себѣ элементъ площади ($d\sigma$), которому эта точка принадлежитъ; если $d\tau$ есть полная кривизна этого элемента, то отношеніе $\frac{d\tau}{d\sigma}$ Гауссъ называетъ мѣрой кривизны въ данной точкѣ поверхности [1]).

Мѣрѣ кривизны Гауссъ приписываетъ также знакъ. Представимъ себѣ внѣшнюю нормаль къ поверхности въ нѣкоторой ея точкѣ и внѣшнюю нормаль къ сферѣ въ соотвѣтствующей точкѣ; представимъ себѣ также двѣ кривыя на поверхности, выходящія изъ данной точки, и ихъ изображенія на сферѣ. Если наблюдатель, стоящій вдоль внѣшней нормали къ поверхности и смотрящій на одну кривую, видитъ вторую съ той же стороны, съ какой онъ видитъ изображеніе этой кривой, стоя вдоль внѣшней нормали къ сферѣ лицомъ къ изображенію первой кривой, то кривизнѣ въ данной точкѣ поверхности приписывается положительное значеніе,—въ противномъ случаѣ отрицательное. Очевидно, знакъ кривизны не зависитъ отъ того, какая сторона поверхности принята за внѣшнюю: если мы измѣнимъ направленіе внѣшней нормали, то вмѣстѣ съ тѣмъ изображеніе элемента площади перенесется на противоположную часть сферы; наблюдателю, стоящему вдоль внѣшней нормали какъ кривыя, такъ и ихъ изображенія на сферѣ будутъ представляться расположенными въ обратномъ порядкѣ.

Разыскивая выраженія для дифференціаловъ $d\sigma$ и $d\tau$ въ различной координаціи, Гауссъ съ большимъ искусствомъ находитъ различныя выраженія для мѣры кривизны въ данной точкѣ поверхности. Такъ, если поверхность задана уравненіемъ $z=f(x, y)$,

[1]) Эта формулировка опредѣленія, заимствованная непосредственно у Гаусса, не отличается достаточной точностью; но здѣсь не мѣсто, конечно, входить въ эти детали.

то мѣра кривизны въ точкѣ (x, y) выражается формулой:

$$K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}, \tag{4}$$

гдѣ, по обыкновенію, p, q, r, s и t означаютъ:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Кривизна K въ данной точкѣ поверхности зависитъ исключительно отъ величинъ E, F и G, входящихъ въ выраженіе элемента длины (2) и отъ ихъ производныхъ перваго и второго порядка по перемѣннымъ u и v, именно:

$$4(EG-F^2)^2 K = E\left[\frac{\partial E \partial G}{\partial v\,\partial v} - 2\frac{\partial F \partial G}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right] +$$

$$+ F\left[\frac{\partial E \partial G}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial E \partial G}{\partial v\,\partial u} - 2\frac{\partial E \partial F}{\partial u \partial v} + 4\frac{\partial F \partial F}{\partial u\,\partial v} - 2\frac{\partial F \partial G}{\partial u \partial u}\right] + \tag{5}$$

$$+ G\left[\frac{\partial E \partial G}{\partial u\,\partial u} - 2\frac{\partial E \partial F}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right] - 2(EG-F^2)\left[\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right].$$

Это предложеніе представляетъ собой одно изъ наиболѣе важныхъ пріобрѣтеній въ теоріи поверхностей; оно послужило базисомъ тѣхъ обобщеній, которыя подвинули впередъ вопросъ объ обоснованіи геометріи. Но ближайшее примѣненіе эта теорія получила въ задачѣ о наложеніи поверхностей.

Гауссъ представляетъ себѣ поверхность, какъ безконечно тонкое тѣло, которое можетъ быть деформировано. Такая деформація, при которой всѣ линіи на поверхности сохраняютъ свою длину, называется *изгибаніемъ* поверхности. Вслѣдствіе этого при изгибаніи поверхности всѣ безконечно малые треугольники остаются равными самимъ себѣ, а потому остаются неизмѣнными всѣ углы между линіями, проведенными на поверхности, а также площади всѣхъ фигуръ.

Представимъ себѣ двѣ поверхности, которыя могутъ быть приведены въ совмѣщеніе непосредственнымъ передвиженіемъ или изгибаніемъ одной изъ нихъ. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что одна поверхность можетъ быть *развернута* на другую или *наложена* на другую.

Допустимъ, что уравненія первой поверхности выражены въ параметрахъ u' и v', а уравненія второй—въ параметрахъ u и v. Если первая поверхность можетъ быть извѣстнымъ образомъ наложена на вторую, то каждой парѣ значеній перемѣнныхъ u, v соотвѣтствуетъ опредѣленная пара значеній перемѣнныхъ u' и v',

---

*) Формально соотношеніе (6) можно разсматривать, какъ опредѣленіе процесса наложенія; это выяснено ниже при изложеніи работы Миндинга.

(координаты той точки, которая совмѣщается съ точкой (u, v). Поэтому перемѣнныя u' и v' представляютъ собой функціи отъ u и v; отсюда же слѣдуетъ, что уравненія первой поверхности, также могутъ быть выражены въ параметрахъ u и v. Даннымъ значеніямъ параметровъ u, v соотвѣтствуютъ на двухъ поверхностяхъ точки, которыя при наложеніи приходятъ въ совмѣщеніе.

Элементы длины на двухъ поверхностяхъ выразятся формулами:

$$\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}, \quad \sqrt{E_1du^2+2F_1dudv+G_1dv^2},$$

гдѣ E, F, G и E_1, F_1, G_1 суть функціи отъ u и v. Но такъ какъ эти выраженія, согласно опредѣленію процесса наложенія, должны быть равны при всѣхъ значеніяхъ дифференціаловъ du и dv, то

$$E=E_1, \quad F=F_1, \quad G=G_1 \text{ *)}. \tag{6}$$

Съ другой стороны, мѣра кривизны поверхности въ каждой ея точкѣ зависитъ только отъ функцій E, F, G; отсюда вытекаетъ знаменитая теорема Гаусса.

Если двѣ поверхности могутъ быть наложены одна на другую, то въ точкахъ, приходящихъ въ совмѣщеніе, мѣра кривизны одна и та же; или иначе: *при изгибаніи поверхности мѣра кривизны въ каждой ея точкѣ остается неизмѣнной.*

Замѣчательный результатъ, содержащійся въ предыдущемъ предложеніи, приводитъ Гаусса къ раздѣленію различныхъ свойствъ поверхности и образовъ, на ней расположенныхъ, на двѣ категоріи; къ первой онъ относитъ тѣ свойства поверхности, которыя зависятъ отъ формы поверхности въ такой мѣрѣ, что измѣняются при ея изгибаніи; ко второй же тѣ, которыя остаются неизмѣнными при процессѣ изгибанія. Къ послѣднимъ принадлежатъ углы между линіями, площади фигуръ, мѣры кривизны въ каждой точкѣ поверхности, а также полная кривизна замкнутой фигуры. Къ числу образовъ, сохраняющихъ свои свойства, принадлежатъ и геодезическія линіи въ томъ смыслѣ, что онѣ и послѣ изгибанія остаются таковыми. Аналитически это можетъ быть обнаружено слѣдующимъ образомъ. Геодезическія линіи поверхности опредѣляются условіемъ, чтобы варіація интеграла

$$\int_{v_0}^{v_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dv}\right)+G}\,dv$$

обращалась въ нуль. Согласно основнымъ правиламъ варіаціоннаго исчисленія, эти линіи опредѣляются, слѣдовательно, дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$\frac{\frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dv}+\frac{\partial G}{\partial u}}{2\sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2F\frac{du}{dv}+G}}-\frac{d}{du}\left\{\frac{E\frac{du}{dv}+F}{\sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2F\frac{du}{dv}+G}}\right\}=0,$$

или короче:

$$\frac{\partial E}{\partial u} du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u} dudv + \frac{\partial G}{\partial u} dv^2 = dsd\,\frac{Edu + Fdv}{ds}. \qquad (7)$$

Какъ мы видимъ, это дифференціальное уравненіе вполнѣ опредѣляется функціями E, F, G, а потому не измѣняется при изгибаніи поверхности; вмѣстѣ съ тѣмъ геодезическія линіи остаются таковыми при этомъ процессѣ.

Гауссъ съ большимъ искусствомъ пользуется этимъ дифференціальнымъ уравненіемъ для изученія нѣкоторыхъ общихъ свойствъ геодезическихъ линій и геодезическихъ окружностей; онъ вводитъ при помощи ихъ систему полярныхъ координатъ на поверхности, въ которыхъ мѣра кривизны въ данной точкѣ поверхности выражается особенно просто. Именно, на всякой поверхности въ полярныхъ геодезическихъ координатахъ (r, φ) элементъ длины имѣетъ видъ:

$$ds = \sqrt{dr^2 + m^2\,d\varphi^2}, \qquad (8)$$

гдѣ m есть функція отъ r и φ; вмѣстѣ съ тѣмъ мѣра кривизны K выражается такъ:

$$K = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}. \qquad (9)$$

Такимъ образомъ Гауссъ обнаружилъ, что для аналитическаго изученія многихъ свойствъ поверхности нѣтъ нужды знать конечныя ея уравненія, а достаточно имѣть выраженія элемента длины. Онъ показалъ также, что поверхности съ одинаковымъ элементомъ длины имѣютъ въ соотвѣтствующихъ точкахъ одинаковую кривизну. При этихъ условіяхъ возникаетъ вопросъ, въ какой мѣрѣ обратно кривизна поверхности опредѣляетъ собой форму элемента длины. Этотъ вопросъ можетъ быть еще поставленъ такъ: для того, чтобы одна поверхность могла быть наложена на другую, согласно теоремѣ Гаусса, необходимо, чтобы мѣра кривизны въ соотвѣтствующихъ точкахъ была одинакова; спрашивается, если двѣ поверхности могутъ быть отнесены одна къ другой такимъ образомъ, чтобы въ соотвѣтствующихъ точкахъ мѣра кривизны была одна и та же, то достаточно ли этого условія, чтобы поверхности могли быть наложены одна на другую. Съ изслѣдованіями, рѣшающими этотъ вопросъ, намъ необходимо теперь познакомиться.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О разложеніи функцій въ непрерывныя дроби.

П. Свѣшникова.

*(Продолженіе *).*

7. Разложеніе $(1+x)^m$ въ непрерывную дробь производится преобразованіями безконечнаго ряда

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots k}x^k + \ldots,$$

который будетъ сходящимся, если модуль $x < 1$.

Можно положить $(1+x)^m = 1 + \dfrac{mx}{f_1(x)}$, гдѣ $f_1(x) =$

$$= 1 : \left[1 + \frac{m-1}{2}x + \frac{(m-1)(m-2)}{2.3}x^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}x^3 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{2.3\ldots(k+1)}x^k + \ldots\right],$$

$f_1(x)-1$ равно взятому съ обратнымъ знакомъ частному отъ дѣленія дѣлимаго

$$\frac{m-1}{2}x + \frac{(m-1)(m-2)}{2.3}x^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-k)(m-k-1)}{2.3\ldots(k+1)(k+2)}x^{k+1} + \ldots$$

на дѣлителя

$$1 + \frac{m-1}{2}x + \frac{(m-1)(m-2)}{2.3}x^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-k)}{2.3.4\ldots(k+1)}x^k + \cdots$$ Полагая $f_1(x) = 1 - \dfrac{\frac{m-1}{1} \cdot \frac{x}{2}}{f_2(x)}$,

находимъ, что $f_2(x)$ есть частное отъ дѣленія дѣлимаго

$$1 + \frac{m-1}{2}x + \frac{(m-1)(m-2)}{2.3}x^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{2.3\ldots(k+1)}x^k + \ldots$$

---

*) См. № 394 „Вѣстника“.

на дѣлителя

$$1+\frac{(m-2)x}{3}+\frac{(m-2)(m-3)x^2}{3.4}+\frac{(m-2)(m-3)(m-4)x^3}{3.4.5}+\ldots+$$
$$+\frac{(m-2)(m-3)(m-4)\ldots(m-k-1)x^k}{3.4.5\ldots(k+2)}+\ldots$$

$f_2(x)-1$ есть частное отъ дѣленія дѣлимаго

$$\frac{(m+1)x}{2.3}+\frac{2(m+1)(m-2)x^2}{2.3.4}+\frac{3(m+1)(m-2)(m-3)x^3}{2.3.4.5}+\ldots+$$
$$+\frac{k(m+1)(m-2)(m-3)\ldots(m-k)x^k}{2.3.4.5\ldots(k+2)}+$$
$$+\frac{(k+1)(m+1)(m-2)(m-3)\ldots(m-k-1)x^{k+1}}{2.3.4.5\ldots(k+2)(k+3)}+\ldots$$

на того же дѣлителя. Полагая $f_2(x)=1+\dfrac{\frac{m+1}{3}\cdot\frac{x}{2}}{f_3(x)}$, находимъ, что $f_3(x)$ есть частное отъ дѣленія дѣлимаго

$$1+\frac{(m-2)x}{3}+\frac{(m-2)(m-3)x^2}{3.4}+\frac{(m-2)(m-3)(m-4)x^3}{3.4.5}+\ldots+$$
$$+\frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-k-1)x^k}{3.4\ldots(k+2)}+\ldots$$

на дѣлителя

$$1+\frac{2(m-2)x}{4}+\frac{3(m-2)(m-3)x^2}{4.5}+\frac{4(m-2)(m-3)(m-4)x^3}{4.5.6}+\ldots+$$
$$+\frac{(k+1)(m-2)(m-3)(m-4)\ldots(m-k-1)x^k}{4.5.6\ldots(k+3)}+\ldots,$$

$f_3(x)-1$ равно минусъ частному отъ дѣленія дѣлимаго

$$\frac{2(m-2)x}{3.4}+\frac{4(m-2)(m-3)x^2}{3.4.5}+\frac{6(m-2)(m-3)(m-4)x^3}{3.4.5.6}+\ldots+$$
$$+\frac{2k(m-2)(m-3)(m-4)\ldots(m-k-1)x^k}{3.4.5.6\ldots(k+3)}+$$
$$+\frac{2(k+1)(m-2)(m-3)\ldots(m-k-2)x^{k+1}}{3.4.5\ldots(k+4)}+\ldots$$

на того же дѣлителя. Полагая $f_3(x)=1-\dfrac{\frac{m-2}{3}\cdot\frac{x}{2}}{f_4(x)}$, находимъ, что $f_4(x)$ есть частное отъ дѣленія дѣлимаго

$$1+\frac{2(m-2)x}{4}+\frac{3(m-2)(m-3)x^2}{4.5}+\frac{4(m-2)(m-3)(m-4)x^3}{4.5.6}+\ldots+$$
$$+\frac{(k+1)(m-2)(m-3)\ldots(m-k-1)x^k}{4.5\ldots(k+3)}+\ldots$$

на дѣлителя

$$1+\frac{2(m-3)x}{5}+\frac{3(m-3)(m-4)x^2}{5.6}+\frac{4(m-3)(m-4)(m-5)x^3}{5.6.7}+\dots+$$

$$+\frac{(k+1)(m-3)(m-4)(m-5)\dots(m-k-2)x^k}{5.6.7\dots(k+4)}+\dots$$

Пусть $f_{2n}(x)$ есть частное отъ дѣленія дѣлимаго

$$1+\frac{n(m-n)x}{1.2n}+\frac{n(n+1)(m-n)(m-n-1)x^2}{1.2.2n(2n+1)}+$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)(m-n)(m-n-1)(m-n-2)x^3}{1.2.3.2n(2n+1)(2n+2)}+\dots+$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)(m-n)(m-n-1)(m-n-2)\dots(m-n-k+1)x^k}{1.2.3\dots k.2n(2n+1)(2n+2)\dots(2n+k-1)}+\dots$$

на дѣлителя

$$1+\frac{n(m-n-1)x}{1.(2n+1)}+\frac{n(n+1)(m-n-1)(m-n-2)x^2}{1.2.(2n+1)(2n+2)}+$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)(m-n-1)(m-n-2)(m-n-3)x^3}{1.2.3(2n+1)(2n+2)(2n+3)}+\dots+$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)(m-n-1)(m-n-2)(m-n-3)\dots(m-n-k)x^k}{1.2.3\dots k.(2n+1)(2n+2)(2n+3)\dots(2n+k)}+\dots$$

Тогда $f_{2n}(x)-1$ будетъ частное отъ дѣленія дѣлимаго

$$\frac{n(m+n)x}{2n(2n+1)}+\frac{2n(n+1)(m+n)(m-n-1)x^2}{1.2.2n(2n+1)(2n+2)}+$$

$$+\frac{3n(n+1)(n+2)(m+n)(m-n-1)(m-n-2)x^3}{1.2.3.2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)}+\dots+$$

$$+\frac{kn(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)(m+n)(m-n-1)(m-n-2)\dots(m-n-k+1)x^k}{1.2.3\dots k.2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)\dots(2n+k)}+\dots$$

на того же дѣлителя. Полагая $f_{2n}(x)=1+\dfrac{\dfrac{m+n}{2n+1}\cdot\dfrac{x}{2}}{f_{2n+1}(x)}$, находимъ, что $f_{2n+1}(x)$ есть частное отъ дѣленія дѣлимаго

$$1+\frac{n(m-n-1)x}{1.(2n+1)}+\frac{n(n+1)(m-n-1)(m-n-2)x^2}{1.2.(2n+1)(2n+2)}+$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)(m-n-1)(m-n-2)(m-n-3)x^3}{1.2.3.(2n+1)(2n+2)(2n+3)}+\dots+$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)(m-n-1)(m-n-2)\dots(m-n-k)x^k}{1.2.3\dots k(2n+1)(2n+2)\dots(2n+k)}+\dots$$

на дѣлителя

$$1+\frac{(n+1)(m-n-1)x}{1(2n+2)}+\frac{(n+1)(n+2)(m-n-1)(m-n-2)x^2}{1.2.(2n+2)(2n+3)}+\dots+$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k)(m-n-1)(m-n-2)(m-n-3)\ldots(m-n-k)x^k}{1.2.3\ldots k(2n+2)(2n+3)(2n+4)\ldots(2n+k+1)}+.$$

$f_{2n+1}(x)-1$ есть минусъ частное отъ дѣленія дѣлимаго

$$\frac{(n+1)(m-n-1)x}{1(2n+1)(2n+2)}+\frac{2(n+1)(n+1)(m-n-1)(m-n-2)x^2}{1.2.(2n+1)(2n+2)(2n+3)}+$$

$$+\frac{3(n+1)(n+1)(n+2)(m-n-1)(m-n-2)(m-n-3)x^3}{1.2.3(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}+$$

$$+\ldots+\frac{k(n+1)(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-n-k)x^k}{1.2.3\ldots k(2n+1)(2n+2)(2n+3)\ldots(2n+k+1)}+\ldots$$

на того же дѣлителя. Полагая $f_{2n+1}(x)=1-\dfrac{\dfrac{m-n-1}{2n+1}\cdot\dfrac{x}{2}}{f_{2n+2}(x)}$, находимъ,

что $f_{2n+2}(x)$ есть частное отъ дѣленія дѣлимаго

$$1+\frac{(n+1)(m-n-1)x}{1.(2n+2)}+\frac{(n+1)(n+2)(m-n-1)(m-n-2)x^2}{1.2(2n+2)(2n+3)}+\ldots+$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k)(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-n-k)x^k}{1.2.3\ldots k(2n+2)(2n+3)\ldots(2n+k+1)}+\ldots$$

на дѣлителя

$$1+\frac{(n+1)(m-n-2)x}{1.(2n+3)}+\frac{(n+1)(n+2)(m-n-2)(m-n-3)x^2}{1.2.(2n+3)(2n+4)}+\ldots+$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)(m-n-2)(m-n-3)\ldots(m-n-k-1)x^k}{1.2.3\ldots k(2n+3)(2n+4)(2n+5)\ldots(2n+k+2)}+\ldots$$

Отсюда, на основаніи способа отъ n къ $(n+1)$, заключаемъ, что допущенное предположеніе относительно вида функціи $f_{2n}(x)$ можно считать доказаннымъ.

Слѣдовательно,

$$(1+x)^m=1+\cfrac{mx}{1-\cfrac{\frac{m-1}{1}\cdot\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{m+1}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{m-2}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{m+2}{5}\cdot\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{m-3}{5}\cdot\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{m+3}{7}\cdot\frac{x}{2}}{1-\ldots}}}}}}}=$$

$$=1+\cfrac{mx}{1+\cfrac{(1-m)x}{2+\cfrac{(1+m)x}{3+\cfrac{(2-m)x}{2+\cfrac{(2+m)x}{5+\cfrac{(3-m)x}{2+\cfrac{(3+m)x}{7+\ldots}}}}}}}$$

Полагая $x=\frac{1}{y}$ и $m=\frac{1}{s}$, получимъ:

$$\sqrt[s]{1+\frac{1}{y}}=1+\cfrac{1}{sy+\cfrac{s-1}{2+\cfrac{s+1}{3sy+\cfrac{2s-1}{2+\cfrac{2s+1}{5sy+\cfrac{3s-1}{2+\cfrac{3s+1}{7sy+\ldots}}}}}}}$$

Въ этой безконечной непрерывной дроби при неограниченномъ увеличенiи n предѣлъ $\frac{a_{2n}a_{2n+1}}{b_{2n+1}}=$ предѣлу $\frac{2(2n+1)sy}{ns+1}=$ $=$ пр. $2\left(2+\frac{1}{n}\right)sy:\left(s+\frac{1}{n}\right)=4y$. Поэтому $\sqrt[s]{1+\frac{1}{y}}$ есть предѣлъ ряда подходящихъ дробей $\frac{p_n}{q_n}$ при неограниченномъ увеличенiи n. Полагая $x=\frac{z}{y}$ и $m=\frac{1}{s}$ получимъ:

$$\sqrt[s]{1+\frac{z}{y}}=1+\cfrac{z}{sy+\cfrac{(s-1)z}{2+\cfrac{(s+1)z}{3sy+\cfrac{(2s-1)z}{2+\cfrac{(2s+1)z}{5sy+\cfrac{(3s-1)z}{2+\cfrac{(3s+1)z}{7sy+\ldots}}}}}}}$$

Для примѣра найдемъ:

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}=1+\cfrac{1}{24+\cfrac{2}{2+\cfrac{4}{72+\cfrac{5}{2+\cfrac{7}{120+\ldots}}}}}$$

Подходящiя дроби будутъ $\frac{1}{1}$, $\frac{25}{24}$, $\frac{25.2+1.2}{24.2+1.2}=\frac{52}{50}$, $\frac{52.72+25.4}{50.72+24.4}=\frac{3844}{3696}$, $\frac{3844.2+52.5}{3696.2+50.5}=\frac{7948}{7642}$. Такимъ образомъ $\sqrt[3]{9}:2=\frac{7948}{7642}$ съ ошибкой менѣе $\frac{1.2.4.5.7}{7642(7642.120+3696.7)}$,

$\sqrt[3]{9}=\frac{7948}{3821}$ до $\frac{10.7.2}{7642.235728}$ или

$\sqrt[3]{9}=2{,}0800837$ до $0{,}0000001$.

8. Въ безконечномъ рядѣ

$$1+\frac{1}{b}\cdot\frac{a}{1}+\frac{1}{b(b+1)}\cdot\frac{a^2}{1.2}+\frac{1}{b(b+1)(b+2)}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}+\dots$$

отношеніе $(n+1)$—аго члена къ n—ому $u_n : u_{n-1}=\frac{a}{(b+n-1)n}$ при неограниченномъ увеличеніи n стремится къ нулю. Поэтому написанный рядъ будетъ сходящимся при всякихъ значеніяхъ a и b. Такъ какъ предѣлъ суммы членовъ этого ряда зависитъ отъ a и b, то обозначаемъ его черезъ $f(a,\ b)$, такъ что

$$f(a,\ b)=1+\frac{a}{b+1}+\frac{a^2}{b(b+1).1.2}+\frac{a^3}{b(b+1)(b+2).1.2.3}+\dots+$$
$$+\frac{a^n}{b(b+1)\dots(b+n-1).1.2\dots n}+\dots$$

Точно также

$$f(a,\ b+1)=1+\frac{a}{(b+1).1}+\frac{a^2}{(b+1)(b+2).1.2}+\dots+$$
$$+\frac{a^n}{(b+1)(b+2)(b+3)\dots(b+n).1.2.3\dots n}+\dots$$

Вычитая, находимъ $f(a,\ b)-f(a,\ b+1)=$

$$=\frac{1.a}{b(b+1).1}+\frac{2a^2}{(b+1)b(b+2).1.2}+\frac{3a^3}{(b+1)(b+2)b(b+3).1.2.3}+\dots+$$
$$+\frac{na^n}{(b+1)(b+2)(b+3)\dots(b+n-1).b(b+n).1.2.3\dots n}+\dots$$

Вынося за скобки $\frac{a}{b(b+1)}$, находимъ $f(a,\ b)-f(a,\ b+1)=$

$$=\frac{a}{b(b+1)}\cdot\Big[1+\frac{a}{(b+2).1}+\frac{a^2}{(b+2)(b+3).1.2}+\dots+$$
$$+\frac{a^{n-1}}{(b+2)(b+3)\dots(b+n).1.2.3\dots(n-1)}+\dots\Big]$$

Слѣдовательно, $f(a,\ b)-f(a,\ b+1)=\frac{a}{b(b+1)}f(a,\ b+2)$. Отсюда $f(a,\ b+1):[f(a,\ b)-f(a,\ b+1)]=b(b+1)f(a,\ b+1):af(a,\ b+2)$.

Отсюда, по свойству пропорцій, находимъ:

$$f(a,\ b+1):f(a,\ b)=b(b+1)f(a,\ b+1):[b(b+1)f(a,\ b+1)+af(a,\ b+2)],$$
$$af(a,\ b+1):bf(a,b)=a(b+1)f(a,\ b+1):[b(b+1)f(a,\ b+1)+af(a,\ b+2)].$$

Отсюда $\frac{af(a,\ b+1)}{bf(a,\ b)}=\frac{a}{b+\frac{af(a,\ b+2)}{(b+1)f(a,\ b+1)}}$.

Измѣняя послѣдовательно b въ $(b+1)$, $(b+2)$, ..., получимъ:

$$\frac{af(a,\ b+2)}{(b+1)f(a,\ b+1)}=\cfrac{a}{b+1+\cfrac{af(a,\ b+3)}{(b+2)f(a,\ b+2)}},\qquad \frac{af(a,\ b+3)}{(b+2)f(a,\ b+2)}=$$

$$=\cfrac{a}{b+2+\cfrac{af(a,\ b+4)}{(b+3)f(a,\ b+3)}},\ldots$$ Такимъ образомъ получаемъ слѣдующее разложенiе

$$\frac{af(a,\ b+1)}{bf(a,\ b)}=\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{b+1+\cfrac{a}{b+2+\cfrac{a}{b+3+\ldots}}}}.$$

Въ этой непрерывной дроби отношенiе $\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}=$ $=\frac{(b+n-1)(b+n)}{a}$ при неограниченномъ увеличенiи n стремится къ безконечности, и разность $a_n - c_n = b+n-1$ — мод. a неограниченно увеличивается. Поэтому непрерывная дробь есть предѣлъ подходящей дроби $\frac{p_n}{q_n}$.

Если при нѣкоторомъ значенiи a выраженiе $f(a,\ b)=0$, то

$$\frac{af(a,\ b+2)}{(b+1)f(a,\ b+1)}=-b=\cfrac{a}{b+1+\cfrac{a}{b+2+\cfrac{a}{b+3+\ldots}}}$$

(Продолженiе слѣдуетъ).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакцiя проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшенiй задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“ и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенiя. Въ противномъ случаѣ редакцiя не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенiю нуждъ корреспондентовъ.

Редакцiя проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенiя въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшенiями, либо снабжать задачи указанiемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшенiе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 635 (4 сер.). Обозначая черезъ x_1, x_2 два произвольныхъ числа, показать, что при a, отличномъ отъ нуля, трехчленъ

$$x^3+3ax-2b$$

можетъ быть представленъ въ формѣ

$$x^3+3ax-2b=A\left(x-x_2-\frac{b-x_1}{a^2}\cdot x_2^2\right)+B(x_2^2-b-x_1)+C(x_1-a^3-b^3),$$

гдѣ A, B, C суть полиномы цѣлые, относительно x, x_1 и x_2. Вывести изъ этого тожества способъ нахожденія корней трехчлена $x^3+3ax-2b$.

С. Шатуновскій (Одесса).

№ 636 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$x\sqrt{\frac{1}{y}}+y\sqrt{\frac{1}{z}}+x\sqrt{\frac{y}{z}}=a^2,$$

$$y\sqrt{\frac{1}{z}}+z\sqrt{\frac{1}{x}}+y\sqrt{\frac{z}{x}}=b^2,$$

$$z\sqrt{\frac{1}{x}}+x\sqrt{\frac{1}{y}}+z\sqrt{\frac{x}{y}}=c^2.$$

Н. Агрономовъ (Вологда).

№ 637 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$3y^2+4x^2-90=(y-2x)^2.$$

И. Коровинъ (Екатеринбургъ).

№ 638 (4 сер.). Доказать, что при n цѣломъ и положительномъ число $n^{n-1}-1$ кратно $(n-1)^2$.

Н. С. (Одесса).

№ 639 (4 сер.). Построить на сторонахъ AB и AC даннаго треугольника ABC соотвѣтственно точки B' и C' такъ, чтобы прямыя $B'C'$ и BC были параллельны, а прямыя BC' и CB' взаимно перпендикулярны.

(Заимств.).

№ 640 (4 сер.). Чашечный барометръ, въ пустоту котораго попалъ воздухъ, показываетъ 748 миллиметровъ для высоты ртути; при этомъ часть трубки, занятая воздухомъ, имѣетъ въ длину 122 миллиметра. Выдвинувши трубку на нѣкоторую высоту, находятъ 750 миллиметровъ для высоты ртути, 141 миллиметръ для высоты пространства надъ ртутью. Зная, что сѣченіе вполнѣ цилиндрической трубки барометра равно 4 квадратнымъ сантиметрамъ и что температура во время опыта равна 0°, опредѣлить: 1) атмосферное давленіе x и 2) вѣсъ воздуха, попавшаго въ барометрическую пустоту.

(Заимств.) *М. Г.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 530 (4 сер.). *Дано, что ни* A *ни* B *не дѣлятся на нечетное простое число* p *и что* A^2-B^2 *дѣлится на* p^n, *гдѣ* n—*цѣлое положительное число. Доказать, что либо сумма либо разность чиселъ* A *и* B *дѣлится на* p^n.

(Заимств. изъ *L'Éducation Mathématique*).

Покажемъ, что одно изъ чиселъ $A+B$ или $A-B$ не кратно p. Дѣйствительно, если бы оба эти числа были кратны p, то каждое изъ чиселъ $(A+B)+(A-B)=2A$ и $(A+B)-(A-B)=2B$ было бы кратно p; а такъ какъ p по условію взаимно простое съ 2, то каждое изъ чиселъ A и B было бы кратно p, что противно условію. Итакъ, одно изъ чиселъ $A+B$ и $A-B$, напримѣръ $A+B$, взаимно простое съ p, а потому и съ p^n. Такъ какъ произведеніе $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ по условію дѣлится на p^n и $A+B$ взаимно простое съ p^n, то $A-B$ дѣлится на p^n. Наоборотъ, если $A-B$ взаимно простое съ p, то $A+B$ дѣлится на p^n.

В. Гейманъ (Феодосія); *Г. Оганянцъ* (Москва); *Н. Готлибъ* (Юрьевъ).

№ 532 (4 сер.). *Доказать, что при всякомъ цѣломъ положительномъ* n *число*

$$n^{n+1}+n^n-n^3-1$$

дѣлится безъ остатка на число $(n-1)^3$, *а при* n *четномъ—на число* $(n-1)^2(n^2-1)$.

Полагая $n=m+1$ (1) и пользуясь формулой бинома, приводимъ разсматриваемое выраженіе къ виду:

$$n^{n+1}+n\ \ -n^3-1=(1+m)^{m+2}+(1+m)^{1+m}-(1+m)^3-1=$$

$$=1+(m+2)m+\frac{(m+2)(m+1)m^2}{1.2}+Am^3+Bm^4+\ldots+m^{m+2}+$$

$$+1+(m+1)m+\frac{(m+1)m.m^2}{1.2}+A'm^3+B'm^4+\ldots+m^{m+1}-$$

$$-1-3m-3m^2-m^3-1, \qquad (2),$$

гдѣ коэффиціенты $A, B, \ldots, A', B', \ldots$ суть числа цѣлыя.

Въ формулѣ (2) группа членовъ

$$1+(m+2)m+\frac{(m+2)(m+1)m^2}{1.2}+1+(m+1)m+\frac{(m+1)m.m^2}{1.2}-1-3m-3m^2-m^3-1$$

послѣ раскрытія скобокъ и приведенія даетъ m^4+m^3, а потому (см. (2), (1))

$$n^{n+1}+n^n-n^3-1=(A+A'+1)m^3+(B+B'+1)m^4+\ldots=$$

$$=m^3[A+A'+1+(B+B'+1)m+\ldots]=(n-1)^3[A+A'+1+(B+B'+1)(n-1)+\ldots],$$

откуда видно, что разсматриваемое число кратно $(n-1)^3$.

Если n четно, т. е. $n=2k$, гдѣ k — число цѣлое, то многочленъ $n^{n+1}+n^n-n^3-1$ при подстановкѣ вмѣсто n числа (-1) обращается въ $(-1)^{2k+1}+(-1)^{2k}-(-1)^3-1=0$, а потому онъ дѣлится алгебраически на $n+1$; слѣдовательно, при n четномъ разсматриваемое число кратно $n+1$. Будучи кратно въ этомъ случаѣ двухъ взаимно простыхъ чиселъ $(n-1)^3$ и $(n+1)$ оно кратно и числа $(n-1)^3(n+1)=(n-1)^2(n-1)(n+1)=(n-1)^2(n^2-1)$.

Н. Плахово (Винница); *Г. Оганянцъ* (Москва).

№ 534 (4 сер.). *Рѣшитъ систему уравненій*

$$x+y+z=a,\quad xy+yz=b,$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+yz}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Представивъ первое и второе изъ предложенныхъ уравненій въ видѣ

$$x+(y+z)=a \qquad (1),$$

$$x(y+z)=b \qquad (2),$$

мы видимъ, что x и $y+z$ суть корни квадратнаго уравненія

$$t^2-at+b=0 \qquad (3),$$

такъ что

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2};\quad y+z=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \qquad (4),$$

или

$$x=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2};\quad y+z=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \qquad (5).$$

Возвышая въ квадратъ уравненіе (1), находимъ:

$$x^2+2x(y+z)+y^2+2yz+z^2=a^2,$$

или (см. (2))

$$x^2+2b+y^2+2yz+z^2=a^2,$$

откуда

$$x^2+y^2+z^2=a^2-2b-2yz. \qquad (6).$$

На основаніи равенствъ (6) и (2) третье изъ данныхъ уравненій можно представить въ видѣ

$$\frac{a^2-2b-2yz}{b+yz}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

откуда

$$yz=\frac{a^2(a^2+b^2)-b(3a^2+b^2)}{3a^2+b^2} \qquad (7).$$

Изъ равенствъ (4), (5), (7) слѣдуетъ, что предложенная система допускаетъ слѣдующія рѣшенія:

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2},$$

а y и z суть корни квадратнаго уравненія

$$u^2-\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}\cdot u+\frac{a^2(a^2+b^2)-b(3a^2+b^2)}{3a^2+b^2}=0$$

или

$$x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

а y и z суть корни квадратнаго уравненія

$$u^2 - \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \cdot u + \frac{a^2(a^2 + b^2) - b(3a^2 + b^2)}{3a^2 + b^2} = 0.$$

Н. Готлибъ (Юрьевъ); *В. Гейманъ* (Ѳеодосія); ***М. Сейдель*** (Ростовъ н/Д) *Н. **Агрономовъ*** (Вологда); *Н. Оганянцъ* (Москва).

№ 535 (4 сер.). ***Показать, что выраженіе***

$$[x^{n-1} + 2^2x^{n-2} + 3^2x^{n-3} + \ldots + (n-1)^2 x + n^2] (x-1)^3$$

приводится послѣ раскрытія скобокъ и расположенія по степенямъ x *къ пятичлену.*

Раскрывая скобки во множителѣ $(x-1)^3$, произведя умноженіе и располагая произведеніе по степенямъ x, получимъ, что данное выраженіе равно

$$x^{n+2} + (2^2 - 3)\, x^{n+1} + (3^2 - 3\cdot 2^2 + 3)\, x^n +$$

$$+ \{(4^2 - 3.3^2 + 3.2^2 - 1)x^n + \ldots + [(k+1)^2 - 3k^2 + 3(k-1)^2 - (k-2)^2]\, x^{n-k+2} + \ldots +$$

$$+ [n^2 - 3(n-1)^2 + 3(n-2)^2 - (n-3)^2]\, x^3\} +$$

$$+ [-3n^2 + 3(n-1)^2 - (n-2)^2]\, x^2 + [3n^2 - (n-1)^2]\, x - n^2. \qquad (1)$$

Коэффиценты всѣхъ членовъ, заключенныхъ въ фигурныя скобки, получаются изъ формулы

$$(k+1)^2 - 3k^2 + 3(k-1)^2 - (k-2)^3, \qquad (2)$$

полагая $k = 3, 4, \ldots, n-1$. Но, раскрывая скобки въ выраженіи (2), мы получаемъ послѣ приведенія 0, такъ что группа членовъ, заключенныхъ въ квадратныя скобки исчезаетъ. Сдѣлавъ вычисленія коэффиціентовъ $2^2 - 3 = 1$, $3^2 - 3.2^2 + 3 = 0$, $-3n^2 + 3(n-1)^2 - (n-2)^2 = -(n+1)^2$, $3n^2 - (n-1)^2 = 2n^2 + 2n - 1$, получимъ:

$$[x^{n-1} + 2^2x^{n-2} + 3^2x^{n-3} + \ldots + (n-1)^2x + n^2]\,(x-1)^3 = x^{n+2} + x^{n+1} -$$

$$-(n+1)^2x^2 + (2n^2 + 2n - 1)\,x - n^2.$$

Выводя эту формулу, мы полагали $n > 3$. Путемъ провѣрки можно убѣдиться, что она вѣрна и при $n = 1, 2, 3$.

Н. Готлибъ (Юрьевъ); *В. Гейманъ* (Ѳеодосія); *Г. Оганянцъ* (Москва); *М. Сейдель* (Ростовъ н/Д).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 27-го Іюля 1905 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул Новосельскаго, д. № 66.

Обложка
ищется

Обложка
ищется