№ 379.

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XXXII-го Семестра № 7-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1904.

XXXII Сем. № 7.

Вѣстникъ Опытной Физики и элементарной математики.

15 Октября № 379. 1904 г.

Символы элементарной математики.

Проф. А. Клоссовскаго.

Развивающимъ элементомъ при изученіи математики нужно считать, главнымъ образомъ, уясненіе тѣхъ логическихъ началъ, которыя лежатъ въ основѣ этой отрасли человѣческихъ знаній. Недостаточно дать учащемуся строгое доказательство той или другой теоремы; необходимо еще освѣтить тотъ путь, по которому мы слѣдуемъ для достиженія извѣстной истины; необходимо строго прослѣдить цѣпь истинъ, начиная отъ простѣйшихъ и очевидныхъ и оканчивая самыми сложными выводами. Происхожденіе всякаго новаго понятія должно быть тѣсно связано со всѣмъ предшествующимъ. Тогда только учащійся не будетъ смотрѣть на математическія выкладки, какъ на какую-то кабалистику, имѣющую только отдаленную связь съ дѣйствительностью. Тогда только учащійся пойметъ, что математика представляетъ неразрывную цѣпь строго-логическихъ построеній. Такъ какъ эти построенія основаны на простѣйшихъ законахъ, добытыхъ изъ наблюденій надъ окружающими вещами, то они имѣютъ непосредственное отношеніе къ дѣйствительности и могутъ быть провѣрены на опытѣ. Математическое знакоположеніе только облегчаетъ и, такъ сказать, механизируетъ процессъ мышленія. Каждый математическій знакъ есть символическое выраженіе извѣстной мысли, извѣстнаго результата, къ которому мы пришли путемъ болѣе или менѣе длиннаго ряда умозаключеній.

Въ виду этого, въ своей педагогической дѣятельности я считалъ полезнымъ и необходимымъ, при повтореніи курса математики въ выпускномъ классѣ, посвятить рядъ уроковъ обозрѣнію происхожденія и свойствъ различныхъ символовъ элементарной математики и основныхъ операцій надъ ними. Подобное обозрѣніе обобщаетъ и связываетъ въ одно стройное цѣлое различные отдѣлы этой науки, которые послѣдовательно преподаются въ теченіе гимназическаго курса. Сжатому изложенію основъ этого повторительнаго курса и посвящена настоящая статья.

I.

Первоначальный рядъ символовъ. Прямыя и обратныя операціи и ихъ законы.

Теорія имѣетъ цѣлью вообще изъ нѣсколькихъ, очевидныхъ или условныхъ, соотношеній между объектами отыскать, путемъ чистаго мышленія, новыя соотношенія, которыя были бы логическимъ послѣдствіемъ основныхъ истинъ. Чисто формальныя науки, математика и логика, разсматриваютъ такія соотношенія, которыя не зависятъ отъ содержанія и внутренняго состава разсматриваемыхъ объектовъ. Математика, въ частныхъ своихъ примѣненіяхъ, находитъ реальные субстраты для своихъ выводовъ въ формѣ, массѣ, числѣ и т. д.

Непосредственное наблюденіе внѣшней природы приводитъ насъ къ понятію о существованіи пространства, о разнообразіи или множествѣ однородныхъ предметовъ и различіи ихъ массы. При изслѣдованіи какого-нибудь отдѣльнаго предмета въ умѣ нашемъ возникаетъ понятіе о формѣ. Понятія о формѣ и пространствѣ мы первоначально связываемъ неразрывно съ наблюдаемымъ тѣломъ, его свойствами и веществомъ. Но мало-по-малу умъ нашъ привыкаетъ отдѣлять фигуру тѣла отъ матеріи, изъ которой состоитъ это тѣло; мало-по-малу мы пріучаемся изучать форму и пространственныя отношенія независимо отъ прочихъ свойствъ тѣла: вещества, цвѣта и т. д.; проще говоря, мы дѣлаемъ отвлеченіе формы отъ матеріальной сущности. Такое же отвлеченіе возможно и относительно числа однородныхъ предметовъ. Мы можемъ составить себѣ понятіе о множествѣ предметовъ, о множествѣ единицъ, совершенно независимо отъ сущности предметовъ, подлежащихъ счету.

Непосредственый опытъ даетъ нѣкоторыя простѣйшія соотношенія между понятіями и вещами. На основаніи этихъ простѣйшихъ соотношеній, мы связываемъ объекты между собою, вслѣдствіе чего получаемъ въ результатѣ новыя, болѣе сложныя, соотношенія. Такимъ образомъ, на основаніи нѣкоторыхъ простѣйшихъ истинъ или законовъ, которымъ подлежитъ счетъ, мы строимъ всю науку о числахъ; нѣсколько изъ опыта добытыхъ истинъ даютъ возможность создать науку о движеніи. Извѣстное *подчиненіе* двухъ или болѣе объектовъ *законамъ*, обусловливающимъ *сосуществованіе* этихъ объектовъ, будемъ называть *операціей.* Рядъ операцій, подчиняющихся опредѣленнымъ законамъ, составитъ *систему операцій.* Система операцій можетъ быть построена, во-первыхъ, на строго реальной почвѣ. Въ этомъ случаѣ она будетъ строго соотвѣтствовать извѣстной области объектовъ, дѣйствительно существующихъ въ природѣ. Но можно представить себѣ систему операцій, въ основу которой положено нѣсколько не противорѣчащихъ другъ другу допущеній, совершенно независимыхъ отъ извѣстныхъ наглядныхъ представленій. Получится нѣкоторая абстрактная система, удовлетворяющая строгимъ логическимъ требованіямъ, но лишенная реальныхъ образовъ и субстратовъ.

Мы не будемъ опредѣлять, что значитъ взять объектъ одинъ, два, три, четыре. . раза; понятіе это принадлежитъ къ элементарнымъ и черезъ другія, болѣе простыя понятія не опредѣляется. Въ геометріи такое присчитываніе выразится послѣдовательнымъ отмѣриваніемъ и прикладываніемъ по одному и тому же направленію опредѣленной единицы длины. Въ механикѣ оно соотвѣтствуетъ сложенію силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону по одному и тому же направленію. Если каждый отдѣльный объектъ выразимъ символомъ 1 (единица), а операцію присчитыванія отмѣтимъ знакомъ $+$, то въ результатѣ этой простѣйшей операціи счета однородныхъ единицъ получатся у насъ уравненія:

$$
\begin{aligned}
&1 &&= 1\\
&1+1 &&= 2\\
&1+1+1 &&= 3\\
&1+1+1+1+\ldots &&= a
\end{aligned}
$$

Такимъ образомъ устанавливается первоначальный простѣйшій рядъ символовъ, или *цѣлыхъ* чиселъ:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ a\ \ldots \quad (1)$$

Очевидно, что съ понятіемъ о постепенномъ присчитываніи объектовъ-единицъ совпадаетъ ариѳметическое понятіе объ увеличеніи числа.

Будемъ различать числа количественныя и порядковыя. Количественныя отвѣчаютъ на вопросъ, сколько разъ взятъ извѣстный объектъ. Порядковыя указываютъ мѣсто, которое занимаетъ объектъ въ нашемъ ряду.

Опытъ учитъ насъ, что операція счета можетъ быть произведена въ какомъ-угодно порядкѣ, т. е.

$$\left\{\left[(1+1)+1\right]+1\right\}+1=(1+1+1)+(1+1)=$$
$$=(1+1)+(1+1+1)=\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Равенства (2) даютъ намъ основной законъ операціи счета, который можетъ быть формулированъ слѣдующимъ образомъ: въ какомъ бы порядкѣ мы ни сосчитывали извѣстную совокупность однородныхъ предметовъ, результатъ будетъ одинъ и тотъ же. Для упрощенія знакоположенія вводятся различныя системы счета (десятичная, пятеричная и т. д.).

Представимъ себѣ, далѣе, единицу, взятую a разъ, ту же единицу, взятую b разъ, и, наконецъ, ту же единицу, взятую c разъ; затѣмъ, въ нашемъ ряду символовъ подыщемъ такое число, которое заключало бы въ себѣ столько единицъ, сколько ихъ находится во всѣхъ данныхъ числахъ, вмѣстѣ взятыхъ. Операцію, помощью которой мы находимъ искомый результатъ, *сумму*, назовемъ *сложеніемъ*. Сложеніе, слѣдовательно, заключается въ рѣшеніи уравненія: $a+b+c=x$ . . . . (3)

Такъ какъ сложеніе состоитъ въ томъ же процессѣ, помощью котораго были получены символы или числа нашего первоначальнаго ряда, то очевидно, что операція сложенія подлежитъ законамъ, выраженнымъ равенствами (2), т. е.

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c),$$

$$a+b+c=b+a+c=c+b+a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Эти уравненія даютъ такъ называемые ассоціативный (сочетательный) и коммутативный (перемѣстительный) законы сложенія. Законы эти могутъ быть формулированы слѣдующимъ образомъ: 1) сумма не зависитъ отъ порядка сложенія, 2) сумма не измѣняется отъ перестановки мѣстъ слагаемыхъ и 3) сложеніе есть операція однозначная, т. е. результатъ сложенія символовъ $(a+b+c)$ всегда опредѣленный.

Указанные только что законы даютъ возможность вывести вполнѣ логически извѣстное правило сложенія многозначныхъ чиселъ. Пусть дано сложить: $378+456+78$. На основаніи закона ассоціаціи, имѣемъ:

$$378+456+78=(300+70+8)+(400+50+6)+(70+8).$$

Но, по закону перемѣстительному:

$$(300+70+8)+(400+50+6)+(70+8)=(300+400)+$$
$$+(70+50+70)+8+6+8,$$

т. е., при сложеніи многозначныхъ чиселъ, мы можемъ складывать единицы съ единицами, десятки съ десятками и т. д.

Изъ основныхъ законовъ сложенія вытекаетъ также свойство суммы измѣняться съ измѣненіемъ каждаго изъ слагаемыхъ. Дано: $a+b+c=x$; но

$$a+b+c+d=a+b+(c+d)=(a+b+c)+d=x+d.$$

Для того, чтобы реализировать понятіе о сложеніи цѣлыхъ чиселъ, нужно вспомнить, что прибавленіе обусловливаетъ собою увеличеніе; поэтому сложить одно число съ другимъ значитъ увеличить одно число на столько единицъ, сколько ихъ находится въ другомъ.

Къ установленнымъ законамъ сложенія присоединимъ еще двѣ очевидныя истины, а именно: 1) равныя всегда можно замѣнить равными и 2) если къ двумъ равнымъ прибавимъ равныя, то и суммы будутъ равныя, т. е.

если $a=c$
и $b=c$,
то $a=b$,
а также, если $a=b$
то $a+m=b+m$.

Эти истины, въ связи съ законами сложенія, дадутъ возможность строго логически построить все ученіе о символахъ элементарной математики.

Въ томъ частномъ случаѣ, когда всѣ слагаемыя равны между собою, т. е.

$$\underbrace{a+a+a+a+\;.\;\;.\;\;.\;\;.}_{b\text{ разъ}}=x,$$

операція сложенія сокращенно обозначается $ab=x$ и получаетъ особое названіе *умноженія*, а результатъ называется *произведеніемъ*. Произведеніе, слѣдовательно, такъ составляется изъ множимаго, какъ множитель составленъ изъ единицы. Легко показать, что операція умноженія подчиняется слѣдующимъ законамъ:

1) Перемѣстительному и ассоціативному.

И дѣйствительно, для полученія произведенія ab, нужно a повторить b разъ, т. е.

$$\begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{a\text{ единицъ}} \\ \left.\begin{bmatrix} 1+1+1+1+\;.\;.\;.\;. \\ 1+1+1+1+\;.\;.\;.\;. \\ 1+1+1+1+\;.\;.\;.\;. \\ \;+\;\;+\;\;+\;\;+\;.\;.\;.\;. \end{bmatrix}\right\} b\text{ разъ} \end{array}$$

Но результатъ счета не зависитъ отъ порядка сложенія. Считая горизонтальными рядами, получимъ ab; считая вертикальными рядами, найдемъ ba; слѣдовательно:

$$ab=ba.$$

Подобнымъ же образомъ можно показать, что вообще:

$$abc=acb=cab,$$

а также $$(ab)c=a(bc)=(ac)b.$$

2) Закону распредѣлительному, по которому

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Дѣйствительно, $(a+b)c$ соотвѣтствуетъ слѣдующей операціи:

$$c\text{ разъ}\left\{\begin{array}{l} \overbrace{(1+1+1+\;.\;.\;.\;.\;.)}^{a\text{ единицъ}}+\overbrace{(1+1+1+\;.\;.\;.\;.\;.)}^{b\text{ единицъ}} \\ (1+1+1+\;.\;.\;.\;.\;.)+(1+1+1+\;.\;.\;.\;.\;.) \\ .\;. \\ .\;. \end{array}\right.$$

$$ac \qquad + \qquad bc$$

т. е. $(a+b)c=ac+bc$.

На основаніи закона перемѣстительнаго,

$$c(a+b)=(a+b)c=ac+bc=ca+cb$$

и вообще:

$$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=ac+ad+bc+bd.$$

Изъ свойствъ умноженія вытекаетъ извѣстное правило умноженія цѣлыхъ чиселъ. Пусть 345.62?

$$345.62=(300+40+5)\,(60+2)=300.60+40.60+5.60+$$
$$+\quad 300.2+40.2+5.2,$$

т. е. каждый разрядъ множимаго нужно умножить на каждый разрядъ множителя. Изъ этихъ же законовъ вытекаетъ также свойство произведенія измѣняться съ измѣненіемъ каждаго изъ множителей. Пусть

$$ab=x;\quad \text{но}\quad [a(c)]b=(ab)c=xc.$$

Легко реализировать понятіе объ умноженіи и найти ту группу практическихъ вопросовъ, которые рѣшаются этой операціей. Мы видѣли, что при умноженіи одно число повторяется столько разъ, сколько въ другомъ заключается единицъ, но съ понятіемъ о повтореніи два, три и т. д. разъ соединяется понятіе объ увеличеніи числа въ два, три, четыре и т. д. разъ; поэтому умножить одно число на другое цѣлое значитъ одно число увеличить во столько разъ, сколько въ другомъ содержится единицъ. Въ геометріи и механикѣ умноженіе на какое-нибудь число соотвѣтствуетъ увеличенію прямой или силы въ нѣсколько разъ. Кромѣ того, произведеніе двухъ чиселъ можно разсматривать какъ площадь нѣкотораго прямоугольника и т. д.

Въ томъ частномъ случаѣ, когда всѣ множители равны между собою, мы получаемъ уравненіе:

$$\overbrace{a.a.a\ .\ .\ .\ .\ .}^{b\ \text{разъ}}=x,$$

или, вводя сокращенное обозначеніе:

$$a^b=x.$$

Операцію нахожденія произведенія *равныхъ* множителей называютъ *возвышеніемъ въ степень*, гдѣ a—основаніе, а b—показатель степени. Очевидно, что эта операція подчиняется законамъ, выраженнымъ слѣдующими уравненіями:

$$(a^b)^c=a^{bc}\quad \text{и}\quad a^b.a^c=a^{b+c},$$

ибо

$$(a^b)^c=\overbrace{(\underbrace{aaa\ .\ .\ .\ .}_{b\ \text{разъ}}).(\underbrace{aaa\ .\ .\ .\ .}_{b\ \text{разъ}}).(\underbrace{aaa\ .\ .\ .\ .}_{b\ \text{разъ}})}^{c\ \text{разъ}}=a^{bc},$$

$$a^b.a^c=(\underbrace{a\ a\ a\ .\ .\ .\ .}_{b\ \text{разъ}})\ (\underbrace{a\ a\ a\ .\ .\ .\ .}_{c\ \text{разъ}})=a^{b+c}.$$

Точно также:

$$b^a . c^a = (bc)^a,$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

и т. д.

Но законъ перемѣстительный для этой операціи не имѣетъ мѣста,

ибо a^b не равно b^a.

Разсмотрѣнныя до сихъ поръ три операціи (сложеніе, умноженіе и возвышеніе въ степень) называются *прямыми* или *тетическими*. Но практическія задачи могутъ приводить къ ряду *обратныхъ* операцій. Допустимъ, что извѣстная задача привела къ рѣшенію уравненія:

$$a + x = c$$

или въ частности:

$$18 + x = 38,$$

т. е. въ ряду нашихъ чиселъ мы должны найти такое число, которое, будучи сложено съ 18, дало бы 38. Рѣшеніе нашей задачи обозначимъ

$$x = 38 - 18.$$

Искомое число, *разность*, мы можемъ найти подыскиваніемъ. Въ ряду нашихъ чиселъ мы легко найдемъ такое число; оно равно 20, ибо

$$18 + 20 = 38.$$

Операція, помощью которой мы находимъ x изъ уравненія:

$$a + x = c,$$

называется *вычитаніемъ*. Но въ уравненіи

$$a + b = c,$$

искомымъ можно также считать первое слагаемое; тогда:

$$x + b = c.$$

Но сложеніе подчиняется закону перемѣстительному, а потому рѣшеніе уравненій

$$a + x = c$$

$$x + b = c$$

приводитъ къ *одной* только обратной операціи вычитанія:

$$x = c - a,$$

$$x = c - b.$$

Символы $c-a$ и $c-b$ суть символы или числа нашего первоначальнаго ряда, а потому для нихъ годятся всѣ установленные раньше законы и уравненія.

На основаніи обозначенія операціи вычитанія, имѣемъ:

$$(c-b)+b=c.$$

Послѣднее уравненіе заключаетъ въ себѣ опредѣленіе вычитанія и выражаетъ ту мысль, что операціи вычитанія и сложенія одного и того же символа, приложенныя къ одному и тому же числу, взаимно уничтожаются.

Нетрудно реализировать эту операцію и опредѣлить ту группу практическихъ вопросовъ, которые рѣшаются вычитаніемъ. При вычитаніи мы по данной суммѣ и одному изъ слагаемыхъ отыскиваемъ другое слагаемое; слѣдовательно, помощью вычитанія цѣлыхъ чиселъ можемъ рѣшить два вопроса: 1) какое число x нужно придать къ a, чтобы получить c, т. е. узнаемъ, на сколько одно число c больше другого a, 2) найти число x, къ которому нужно прибавить b, чтобы получить c, т. е. одно число уменьшаемъ b единицами.

Въ геометріи и механикѣ вычитаніе соотвѣтствуетъ приложенію къ извѣстной системѣ прямыхъ или силъ, отложенныхъ по одному направленію и въ одну сторону, системы линій или силъ, дѣйствующихъ въ сторону противоположную. Техника вычитанія является также слѣдствіемъ опредѣленія этого дѣйствія. Пусть дано рѣшить уравненіе:

$$672+x=966$$

$$x=966-672.$$

Но при сложеніи мы складывали по разрядамъ; слѣдовательно, цифра единицъ 6 образовалась отъ сложенія цифры единицъ одного слагаемаго съ неизвѣстной цифрой единицъ другого слагаемаго, т. е.

$$6=2+y,$$

$$\text{откуда } y=6-2=4.$$

Точно также:

$$6=7+z,$$

$$z=6-7.$$

Въ этомъ случаѣ вычитаніе невозножно. Но мы должны вспомнить, что, если при сложеніи извѣстнаго разряда мы получали болѣе 10, то единицы непосредственно высшаго разряда присоединялись къ соотвѣтствующему высшему разряду; взявъ обратно эту единицу, получимъ:

$$16+z=7$$

$$z=16-7=9 \text{ и т. д.},$$

т. е. при вычитаніи цѣлыхъ чиселъ нужно вычитать послѣдовательно по разрядамъ.

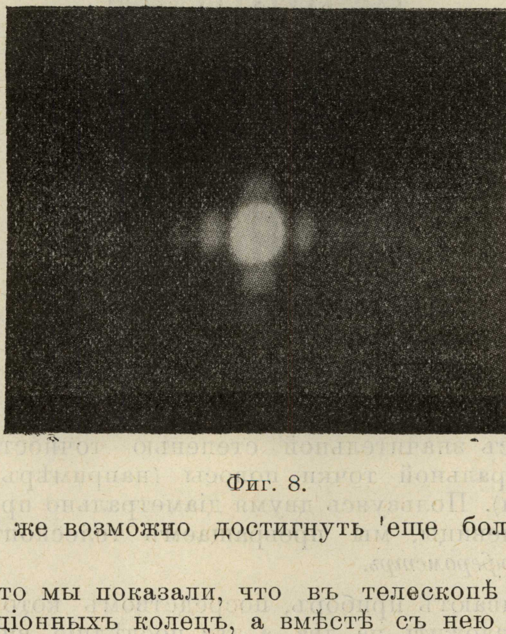
(Продолженіе слѣдуетъ).

Сравненіе микроскопа и телескопа съ интерферометромъ.

Профессора Michelson'a.

*(Окончаніе *).*

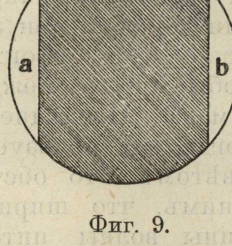
Изъ всего вышеизложеннаго ясно, что во всѣхъ измѣреніяхъ, гдѣ мы пользуемся микроскопомъ или телескопомъ, мы имѣемъ дѣло съ интерференціей свѣтовыхъ волнъ. Является вопросъ, наилучшимъ ли образомъ утилизируемъ мы эту интер-



Фиг. 8.

ференцію или же возможно достигнуть 'еще большей точности измѣреній.

Только что мы показали, что въ телескопѣ угловая величина диффракціонныхъ колецъ, а вмѣстѣ съ нею и точность, съ

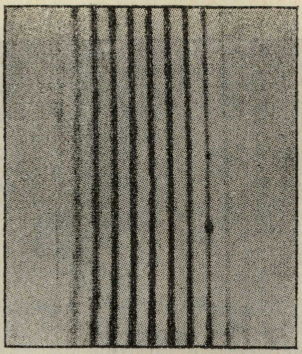


Фиг. 9.

которой опредѣляется положеніе свѣтящейся точки, зависитъ исключительно отъ діаметра объектива. Что касается формы по-

*) См. № 378 „Вѣстника“.

лосъ, то она, конечно, мѣняется въ зависимости отъ формы отверстія; если это послѣднее не круглое, а квадратное, то диффракціонное изображеніе получитъ видъ, представленный на фиг. 8. Сравнивая эту послѣднюю съ фиг. 6, мы видимъ, что размѣры полосъ измѣнились мало, но отчетливость ихъ значительно возросла. Прикроемъ теперь среднюю часть отверстія, какъ показано на фиг. 9, такъ, чтобы свѣтъ могъ проходить лишь черезъ неприкрытыя части *a* и *b*. Соотвѣтственная форма диффракціонныхъ полосъ изображена на фигурѣ 10. Расположеніе

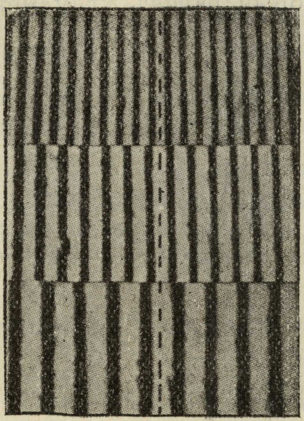


Фиг. 10.

полосъ теперь иное, и отчетливость ихъ возросла настолько, что теперь можно съ значительной степенью точности опредѣлить положеніе центральной точки полосы (напримѣръ, центральной свѣтлой полосы). Пользуясь двумя діаметрально противоположными частями чечевицы, мы превращаемъ телескопъ или микроскопъ въ *интерферометръ*.

Такъ называютъ приборъ, посредствомъ котораго свѣтовой лучъ можно разложить на два, а эти послѣдніе вновь соединить такъ, чтобы они интерферировали другъ съ другомъ. Чтобы сообщить разъединеннымъ частямъ луча разность хода, можно пользоваться различными способами: напримѣръ, по пути обоихъ лучей ставятъ призмы или зеркала: при этомъ необходима такая установка, чтобы оптическіе пути обоихъ лучей были почти равны другъ другу и чтобы уголъ между ихъ конечными направленіями быъ очень малъ. Послѣднее условіе существенно лишь въ томъ случаѣ, когда мы пользуемся не монохроматическимъ (одноцвѣтнымъ) свѣтомъ. Это обстоятельство станетъ понятнымъ, если мы вспомнимъ, что ширина интерференціонныхъ полосъ зависитъ отъ длины волны интерферирующихъ лучей. Если свѣтъ взятъ не монохроматическій, какъ это имѣетъ мѣсто въ случаѣ бѣлаго свѣта, то каждый слагающій лучъ пучка даетъ интерференціонныя полосы, ширина которыхъ пропорціональна соотвѣтствующей длинѣ волны.

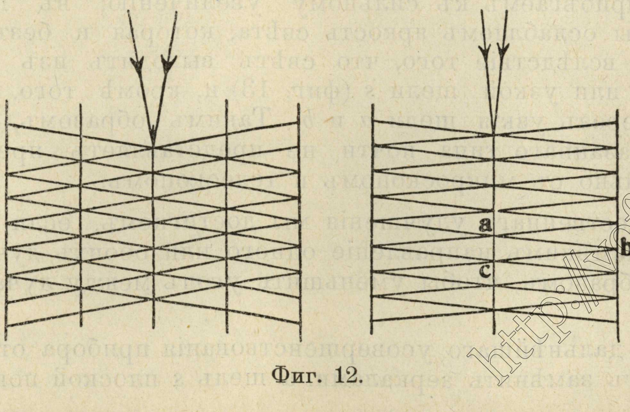
Сказанное иллюстрируется фигурой 11, гдѣ отдѣльно представлены полосы, соотвѣтствующія красному, желтому и синему



Фиг. 11.

свѣту. Въ дѣйствительности же, въ опытѣ съ бѣлымъ свѣтомъ всѣ эти полосы налагаются другъ на друга. Центральная полоса *бѣлая:* здѣсь слагаются другъ съ другомъ всѣ цвѣта, такъ какъ въ этомъ мѣстѣ интерферирующіе лучи не имѣютъ разности хода. Съ обѣихъ сторонъ этой единственной бѣлой полосы симметрично расположенъ рядъ разноцвѣтныхъ коемъ; послѣдовательность цвѣтовъ здѣсь совершенно та же, что и въ опытѣ съ тонкими пластинками.

Ширина полосъ увеличивается съ уменьшеніемъ угла между интерферирующими лучами; это представлено на фигурѣ 12. Въ правой части фигуры интерферирующіе лучи встрѣчаются подъ



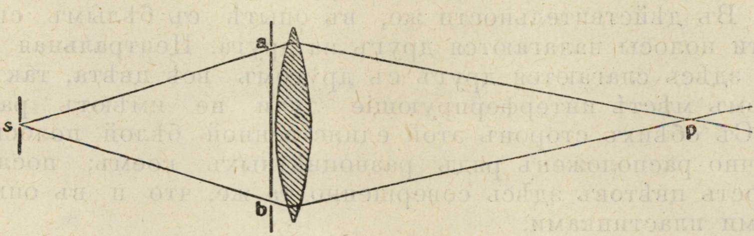
Фиг. 12.

меньшимъ угломъ, чѣмъ въ лѣвой части: соотвѣтственнымъ образомъ въ правой части полосы шире, чѣмъ въ лѣвой. Нетрудно установить и точное соотношеніе между величиной угла и шириной полосъ. Для этого замѣтимъ, что отрѣзокъ ac безъ замѣтной погрѣшности можно принять за длину волны l, и точно также отрѣзокъ bc за ширину b полосы. Обозначивъ далѣе черезъ e весьма малый уголъ abc (который равенъ углу между интерферирующими лучами), мы найдемъ: $b = \frac{l}{e}$ *); то есть, ширина интерференціонныхъ полосъ пропорціональна длинѣ свѣтовой волны и обратно пропорціональна углу между лучами.

Напримѣръ, если лучи выходятъ изъ двухъ отверстій, отстоящихъ другъ отъ друга на разстояніе одной четверти дюйма, и встрѣчаютъ другъ друга на экранѣ въ разстояніи десяти футовъ отъ отверстій, то соотвѣтственная ширина полосъ равна одной сотой дюйма.

Замѣтимъ, что пользованіе малыми углами здѣсь имѣетъ существенное значеніе.

Въ той простой формѣ интерферометра, которая представлена на фиг. 13, мы можемъ уменьшить величину угла лишь слѣдующими способами: либо мы сближаемъ оба отверстія—этотъ



Фиг. 13.

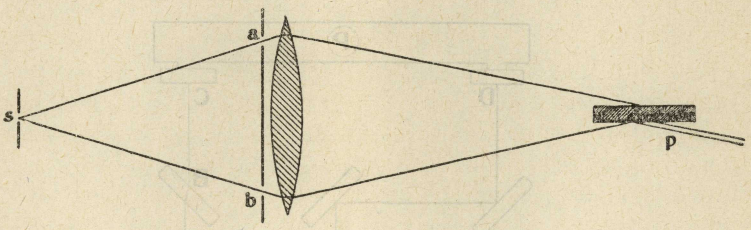
способъ въ значительной степени ослабляетъ дѣйствіе прибора; либо мы помѣщаемъ экранъ дальше отъ отверстій, либо, наконецъ, прибѣгаемъ къ сильному увеличенію; въ послѣднемъ случаѣ мы ослабляемъ яркость свѣта, которая и безъ того уже невелика, вслѣдствіе того, что свѣтъ выходитъ изъ маленькаго отверстія или узкой щели s (фиг. 13) и, кромѣ того, вновь проходитъ черезъ узкія щели a и b. Такимъ образомъ, интерферометръ указаннаго типа почти не представляетъ преимуществъ сравнительно съ микроскопомъ и телескопомъ.

Существеннаго улучшенія мы достигнемъ, если путемъ отраженія измѣнимъ направленіе одного или обоихъ лучей ap и bp такимъ образомъ, чтобы уменьшить уголъ между лучами (смотр. фиг. 14).

Для дальнѣйшаго усовершенствованія прибора отверстія a и b слѣдуетъ замѣнить зеркалами, а щель s плоской поверхностью.

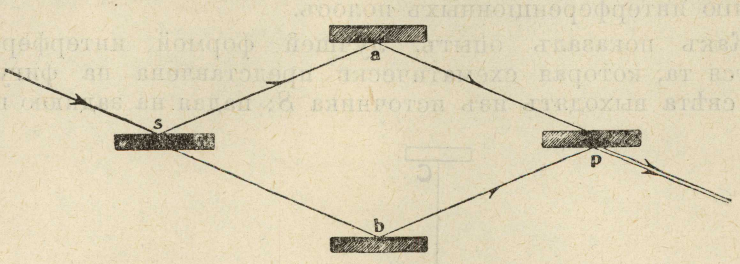
*) Отрѣзокъ ac, по малости его, можно принять за дугу ac, описанную изъ точки b радіусомъ ba.

Теперь интерферометръ приметъ форму, изображенную на фигурѣ 15. Источникомъ свѣта теперь уже можетъ служить не только щель или точка, но и широкое пламя; объектомъ, положеніе котораго мы теперь измѣряемъ, служитъ уже не тонкая линія или щель, а плоская поверхность. Ширину полосъ можно сдѣлать сколь угодно большой, и при томъ безъ ущерба для яркости



Фиг. 14.

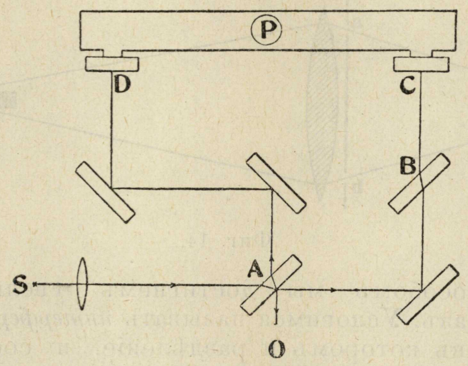
свѣта. Этимъ способомъ мы достигнемъ увеличенія точности отъ 20 до 100 разъ. Условимся называть *интерферометромъ* только такой приборъ, въ которомъ и раздѣленіе, и соединеніе свѣтовыхъ лучей достигается помощью прозрачныхъ плоскопараллельныхъ пластинокъ. Важно замѣтить, что длина пути лучей, расщепленныхъ первой пластинкой, не имѣетъ никакого значенія. Такъ, напримѣръ, каждый лучъ или оба луча могутъ испытать



Фиг. 15.

любое число отраженій или преломленій передъ тѣмъ, какъ вторая пластинка ихъ вновь соединитъ: при этомъ интерферометръ ничего не потеряетъ въ силѣ, если только разность хода лучей не слишкомъ велика и уголъ, подъ которымъ встрѣчаются лучи, достаточно малъ. Измѣняя условія отраженія и преломленія, мы получимъ множество варіацій прибора.

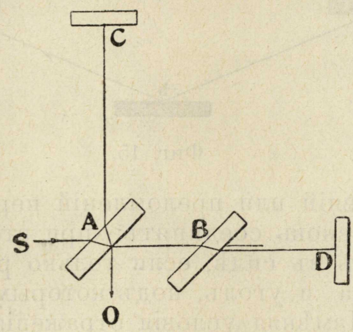
На фигурѣ 16 мы даемъ подробную схему одного такого прибора для того, чтобы показать, съ какой необыкновенной точностью можно посредствомъ интерферометра измѣрять крайне малые углы. Къ цилиндрическому стальному стержню P, имѣющему въ длину шесть дюймовъ и два дюйма въ поперечникѣ, прикрѣплены два зеркала C и D. Если разность хода лучей не превышаетъ стотысячныхъ долей дюйма, то мы легко можемъ наблюдать интерференціонныя полосы или проектировать ихъ на экранъ. Если мы теперь повернемъ стальной стержень вокругъ его оси, то путь одного луча увеличится, а другого—уменьшится. Каждое такое вращенiе на одну—двѣ стотысячныя дюйма вызываетъ перемѣщенiе полосъ, равное ширинѣ полосы. Возьмемъ конецъ стержня большимъ и указательнымъ пальцами: стержень подъ влiянiемъ этой ничтожно-малой силы повернется на очень



Фиг. 16.

маленькiй уголъ, который, несмотря на его незначительный размѣръ, можно легко констатировать по соотвѣтственному перемѣщенiю интерференцiонныхъ полосъ.

Какъ показалъ опытъ, лучшей формой интерферометра является та, которая схематически представлена на фигурѣ 17. Лучи свѣта выходятъ изъ источника S; падая на заднюю поверх-



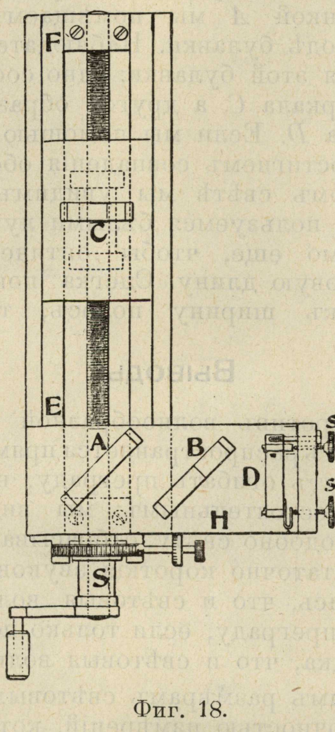
Фиг. 17.

ность стеклянной пластинки A, они частью отражаются отъ нея и направляются къ плоскому зеркалу C; здѣсь они вторично отражаются и проходятъ обратно прежнимъ путемъ черезъ пластинку A до точки O, гдѣ ихъ можно разсмотрѣть помощью трубы или принять на экранѣ. Другая часть лучей проходитъ черезъ пластинку A и далѣе черезъ пластинку B; затѣмъ лучи отражаются отъ плоскаго зеркала D и возвращаются обратно прежнимъ путемъ до пластинки A, гдѣ они отражаются и направляются совмѣстно съ первой частью лучей. Плоскопараллельное стекло B мы вводимъ для того, чтобы компенсировать разность между оптическими путями обѣихъ порцій лучей: первая часть лучей сравнительно со второй проходитъ лишніе два раза толщу пластинки A, и если бы мы не вставили по пути второй части пучка пластинки B, то оба пути не были бы оптически тождественны.

Нѣкоторая часть свѣта теряется при отраженіи отъ передней поверхности пластинки A; но эту потерю можно почти свести къ нулю, если покрыть заднюю поверхность пластинки A слоемъ серебра такой толщины, чтобы отраженная часть падающихъ лучей почти была равна проходящей.

Для того, чтобы пластинки A и B имѣли одинаковую толщину, ихъ дѣлаютъ изъ одного и того же плоскопараллельнаго куска стекла, который разрѣзаютъ на двѣ части. Пластинки помѣщаемъ параллельно другъ другу для того, чтобы оптическіе пути AC и AD имѣли совершенно одинаковую длину.

Фигура 18-ая и изображаетъ схему прибора, устроеннаго согласно только что изложеннымъ принципамъ. Станкомъ прибора



Фиг. 18.

служитъ несгибаемая литая доска. Къ одному концу этого станка прикрѣпляется тяжелая металлическая пластина H, несущая три стеклянныя пластинки A, B и D. Пластинка A вставлена въ металлическую раму, неподвижно прикрѣпленную къ пластинѣ H. Рамку, которая окружаетъ пластинку B, можно слегка вращать вокругъ вертикальной оси такъ, чтобы пластинка B установилась параллельно пластинкѣ A. Зеркало D помощью пружинъ прижимаютъ къ тремъ винтамъ, которые находятся въ вертикальной пластинкѣ, прикрѣпленной къ концу пластины H: винты эти регулируютъ положенiе зеркала (adgusting). Переднiя поверхности обоихъ зеркалъ C и D покрываютъ слоемъ серебра. Раму зеркала C прочно прикрѣпляютъ къ металлической пластинкѣ, которую можно передвигать помощью винта S вдоль рельсовъ EF. Необходимо, чтобы зеркало C при своемъ движенiи оставалось параллельнымъ самому себѣ, и поэтому тщательная вывѣрка рельсовъ EF является существеннымъ условiемъ, безъ котораго приборъ нельзя считать удовлетворительнымъ; наибольшiй уголъ, на который зеркало въ своемъ движенiи можетъ поворачиваться безъ ущерба для опыта, не долженъ превышать одной секунды. Отъ механика такой точности требовать нельзя: окончательная шлифовка рельсовъ есть дѣло самого изслѣдователя.

Чтобы получить помощью этого прибора интерференцiонныя полосы, мы поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Между источникомъ свѣта и пластинкой A мы помѣщаемъ какой-нибудь маленькiй предметъ вродѣ булавки. Наблюдатель въ точкѣ O увидитъ два изображенiя этой булавки: одно соотвѣтствуетъ лучамъ, отраженнымъ отъ зеркала C, а другое образуется лучами, отраженными отъ зеркала D. Если мы помощью зажимныхъ регулирующихъ винтовъ достигнемъ совпаденiя обоихъ изображенiй, то въ монохроматическомъ свѣтѣ мы увидимъ интерференцiонныя полосы. Если же мы пользуемся бѣлыми лучами, то для полученiя полосъ необходимо еще, чтобы оптическiе пути AD и AC лучей имѣли одинаковую длину. Слегка поворачивая винты, мы можемъ мѣнять какъ ширину полосъ, такъ и положенiе ихъ въ полѣ зрѣнiя.

Выводы.

1. Возраженiе противъ волнообразной теорiи свѣта, состоящее въ томъ, что свѣтъ распространяется прямолинейно, тогда какъ звуковыя волны могутъ огибать преграду, находящуюся по пути ихъ, оказывается несостоятельнымъ: мы видѣли, съ одной стороны, что и звукъ, подобно свѣту, отбрасываетъ тѣнь, если только взять для опыта достаточно короткiя звуковыя волны; съ другой стороны, мы убѣдились, что и свѣтовыя волны могутъ, подобно звуковымъ, огибать преграду, если только послѣдняя имѣетъ размѣры того же порядка, что и свѣтовыя волны.

2. Крайне малымъ размѣрамъ свѣтовыхъ волнъ мы обязаны той чрезвычайной точностью измѣренiй, которой мы достигаемъ помощью телескопа и микроскопа. Дѣйствiе этихъ приборовъ состоитъ въ томъ, что объективъ собираетъ волны, вышедшiя изъ одной точки, и концентрируетъ ихъ, образуя диффракцiонный рисунокъ, который и есть то, что мы называемъ изображенiемъ.

3. Можно увеличить точность измѣреній, если видоизмѣнить телескопъ и микроскопъ такимъ образомъ, чтобы черезъ приборъ проходили лишь два пучка свѣта: тѣмъ самымъ мы превращаемъ телескопъ и микроскопъ въ интерферометры.

4. Можно еще болѣе увеличить точность измѣреній, если увеличить ширину интерференціонныхъ полосъ безъ ущерба для ихъ яркости: для этого какъ разъединеніе нашихъ лучей. такъ и соединеніе ихъ нужно произвести помощью отраженія отъ плоско-параллельныхъ поверхностей.

Къ статьѣ г. Таубера. *)

Въ статьѣ моей „Пирометръ Постникова", помѣщенной въ № 375 „Вѣстника", вкралась досадная погрѣшность: на стр. 64 все, начиная со словъ 8-ой строки сверху: разницу эту .... и т. д. и кончая формулой, надо читать такъ: число на дугѣ, противъ котораго останавливается стрѣлка, дѣлятъ на передачу стрѣлки, на 1000 и на разность между температурой кипѣнія и начальной температурой; такимъ образомъ получаютъ коэффиціентъ расширенія изслѣдуемой трубы. Такъ, если первоначальная температура была 12^0, передача стрѣлки $= 60$, то, при изслѣдованіи мѣдной трубы въ 1 метръ, получаютъ для коэффиціента расширенія послѣдней величину:

$$\frac{88}{60.(100-12).1000} = 0{,}000017.$$

Кромѣ этого, считаю нужнымъ прибавить слѣдующее:

1) Вмѣсто того, чтобы отсчитывать дѣленія на дугѣ, мы можемъ опредѣлить коэффиціентъ расширенія трубы съ помощью микрометрическаго винта. Поступаютъ для этого такъ: когда вода въ колбѣ приходитъ въ кипѣніе и стрѣлка, пройдя извѣстное количество дѣленій, останавливается, вращеніемъ винта приводятъ послѣднюю въ то положеніе, изъ котораго она вышла. При этомъ отсчитываютъ число оборотовъ головки винта. Если, положимъ, для этого потребуется m полныхъ оборотовъ винта и нѣкоторая часть одного оборота, соотвѣтствующая n дѣленіямъ головки винта, то, при полумиллиметровой нарѣзкѣ винта, получаемъ для коэффиціента расширенія изслѣдуемой трубы:

$$\frac{mk+n}{2k(100-t)\,1000},$$

гдѣ t есть первоначальная температура и k число дѣленій головки винта.

Для желѣзной трубы, напримѣръ, получается при $t = 18^0$ 1 цѣлый оборотъ и 45 дѣленій головки винта; поэтому вертикаль-

*) См. № 375 „Вѣстника".

ное перемѣщеніе послѣдняго равняется, при $k = 50$, 0,95 миллиметра. По этимъ даннымъ получаемъ для коэффиціента расширенія желѣзной трубы:

$$\frac{0,95}{(100-18).1000} = 0,000012.$$

2) Въ новѣйшихъ приборахъ верхнее кольцо, чрезъ которое проходитъ труба, оковано мѣдью и снабжено такимъ же винтомъ; послѣдній служитъ для того, чтобы при переноскѣ прибора не измѣнять положенія стрѣлки и микрометрическаго винта. Головка микрометрическаго винта сдѣлана въ этихъ приборахъ нѣсколько больше и раздѣлена для большей точности измѣреній не на 50, а на 100 частей.

М. Тауберъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Слова Грагама Белля объ изобрѣтеніи телефона. Американскіе журналы сообщаютъ любопытный отзывъ знаменитаго изобрѣтателя телефона объ условіяхъ, содѣйствовавшихъ осуществленію этого замѣчательнаго завоеванія техники. „Когда я началъ свои опыты относительно телефона, я не имѣлъ никакихъ научныхъ познаній относительно электричества. Я ничего не зналъ по этому предмету, и, если бы было иначе, я никогда не могъ бы сдѣлать открытій, приведшихъ меня къ полному успѣху. Я не думаю, чтобы телефонъ могъ быть когда-нибудь изобрѣтенъ электротехникомъ“. Слова Белля, конечно, звучатъ тѣмъ болѣе парадоксально, что, какъ извѣстно, одновременно съ Беллемъ телефонъ изобрѣлъ проф. И. Грей—человѣкъ не только практики, но и *науки*, и, лишь благодаря ничтожной разницѣ въ нѣсколькихъ часахъ, патентъ на изобрѣтеніе выданъ былъ Беллю.

Отклоненіе свободно падающихъ тѣлъ къ востоку. Воспроизведенный въ Пантеонѣ знаменитый опытъ съ маятникомъ Фуко привлекъ вниманіе всего ученаго міра. К. Фламмаріонъ пожелалъ воспользоваться готовыми приспособленіями для производства цѣлаго ряда опытовъ надъ паденіемъ тѣлъ, съ цѣлью изслѣдовать, обнаруживается ли вращеніе земли при паденіи тѣла съ высоты въ 68 метровъ. Предметъ, находящійся на высотѣ 68 метровъ надъ земной поверхностью, вращается вмѣстѣ съ земнымъ шаромъ съ запада на востокъ, имѣя немного большую скорость, чѣмъ точки поверхности земли; эта разность скоростей не уменьшается при паденіи тѣла: благодаря ей, послѣднее отклоняется на 8,11 миллиметровъ къ востоку отъ вертикали: положеніе послѣдней отмѣчается нитью съ подвѣшенной на ней гирькой. Такое наблюденіе надъ падающимъ тѣломъ, которое кажется на первый взглядъ столь простымъ, въ дѣйствительности, представляетъ большія трудности; различные искусные экспериментаторы получали несогласные другъ съ другомъ результаты: Guglielmini въ 1790 г. на Болонской башнѣ degli Asinelli; Benzenberg въ 1802 г. на башнѣ Св. Михаила въ Гамбургѣ и въ 1804 г.

въ угольной шахтѣ въ Шлебушѣ; Reich въ 1834 г. въ шахтѣ рудника въ Фрейбергѣ и т. д. Поэтому весьма своевременно было вновь попытаться произвести этотъ опытъ, пользуясь тѣми болѣе совершенными средствами, какими теперь располагаетъ экспериментаторъ: за это дѣло взялся Фламмаріонъ при искусномъ и просвѣщенномъ сотрудничествѣ Benoît, астронома при обсерваторіи въ Suvisy.

Существенный пунктъ задачи состоялъ въ томъ, чтобы избѣжать въ наблюдаемомъ паденіи шаровъ всякаго начальнаго движенія. Въ старину опытъ производился такъ: шарикъ подвѣшивали на ниткѣ, и послѣднюю прожигали; или же шарикъ прикрѣпляли къ ниткѣ, которую удерживали помощью щипцовъ; наконецъ, опытъ дѣлали еще такъ: шарики подвергали нагрѣванію и клали на горизонтальное мѣдное кольцо, сквозь которое шарики свободно проходили, послѣ того какъ они охлаждались. При этихъ различныхъ способахъ подвѣшиванія окончательные результаты сильно отличались другъ отъ друга. На этотъ разъ проектъ опыта былъ предложенъ ученымъ конструкторомъ S. Carpentier, а его помощникъ, г. Cartier, съ величайшей заботливостью слѣдилъ за постановкой опыта и вывѣркой приборовъ. Аппаратъ состоитъ изъ электромагнита съ подвижнымъ сердечникомъ изъ мягкаго желѣза; въ нижней своей части переходитъ въ маленькій, круглый, точно выточенный вѣнчикъ, на скошенномъ краю котораго и помѣщается шарикъ такъ, чтобы онъ не соприкасался съ сердечникомъ.

Были приняты всѣ мѣры предосторожности, чтобы точно опредѣлить положеніе вертикали, чтобы сообщить приборамъ устойчивость и чтобы избѣжать малѣйшаго сотрясенія воздуха, которое могло бы повліять на начальное направленіе падающаго шарика. Шарикъ падаетъ и оставляетъ на свинцовой пластинкѣ кругообразный слѣдъ. Замѣчаютъ центры этихъ слѣдовъ; они всѣ расположены вокругъ вертикали: получается картина вродѣ прострѣленной мишени. Опытъ былъ повторенъ 144 раза, и въ результатѣ привелъ къ слѣдующимъ выводамъ:

Отклоненіе къ востоку преобладаетъ, и существованіе его несомнѣнно.

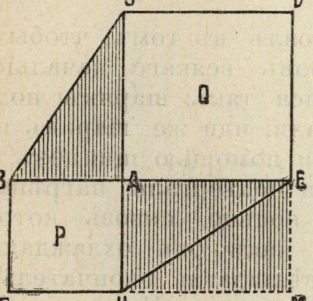
Различные слѣды сильно уклонялись другъ отъ друга.

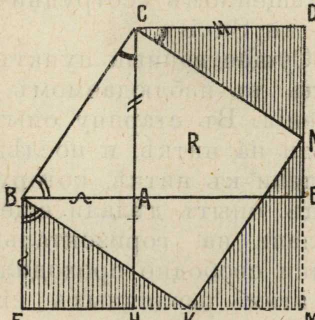
Хотя, по вычисленію, отклоненіе должно быть равно 8,1 миллиметровъ къ востоку, однако, изъ двѣнадцати группъ наблюденій получили отклоненіе на 6,3 миллим. къ востоку и на 1,6 миллим. къ сѣверу. Изъ шести послѣднихъ группъ наблюденій получили отклоненіе въ 7,6 миллим. къ востоку и 0,5 миллим. къ сѣверу.

Такимъ образомъ, полученные результаты не вполнѣ согласны другъ съ другомъ: въ этомъ отношеніи они оставляютъ желать лучшаго; зато опыты сами по себѣ тонко задуманы и прекрасно выполнены; дальнѣйшее изслѣдованіе можетъ пролить свѣтъ на нѣкоторыя незамѣченныя еще обстоятельства, которыя видоизмѣняютъ наблюдаемое явленіе, а также можетъ послужить толчкомъ къ выполненію новыхъ остроумныхъ опытовъ.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Доказательство теоремы Пиѳагора.





1) Построимъ квадраты $ACDE$ и $AHFB$ на катетахъ даннаго прямоуг. $\triangle$ка ABC и назовемъ площади ихъ Q и P. Продолжимъ прямыя DE и FH до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ M и проведемъ прямую HE. Очевидно:

$$P + Q = \text{пл. } BCDMF - 3 \text{ пл. } \triangle ABC, \text{ потому что}$$

$$\triangle ABC = \triangle AEH = \triangle HEM \quad \text{(доказать легко).}$$

2) Проведемъ въ точкахъ C и B перпендикуляры къ BC; (второй рис.) соединимъ прямой точки N и K. Легко доказать, что

$$1)\ \triangle CDN = \triangle ABC \text{ и}$$

$$2)\ \triangle BKF = \triangle ABC, \text{ а потому:}$$

$CN = BK$, а такъ какъ, кромѣ того, $CN \parallel BK$, то BC равна и параллельна NK, и фигура $CNKB$ есть квадратъ, построенный на гипотенузѣ даннаго $\triangle ABC$; назовемъ площадь его—R. Легко, далѣе, доказать, что $\triangle KNM = \triangle ABC$, а потому:

$$R = \text{пл. } BCDMF - 3 \text{ пл. } \triangle ABC.$$

Такимъ образомъ,

$$R = Q + P.$$

Ученица VII кл. Бакинскаго женскаго учебн. заведенія Св. Нины *А. Б.* *)

---

*) Прислано преподавателемъ учебнаго заведенія.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 538 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$\frac{y^2}{y-x}+\frac{z^2}{z-x}=a^2,$$

$$\frac{z^2}{z-y}+\frac{x^2}{x-y}=(a+b)^2,$$

$$\frac{x^2}{x-z}+\frac{y^2}{y-z}=b^2.$$

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 539 (4 сер.). Дано положеніе точекъ α, β и M, въ которыхъ встрѣчаютъ соотвѣтственно окружность, описанную около треугольника ABC, биссектриса угла A, линія, дѣлящая уголъ A на три части, и медіана, проведенная изъ вершины A. Построить треугольникъ ABC.

№ 540 (4 сер.). Найти maximum, котораго можетъ достигнуть въ треугольникѣ отношеніе между радіусами круговъ вписаннаго и описаннаго.

Н. С. (Одесса).

№ 541 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$(1+x^2)y^2+2(x-y)(1+xy)=a,$$

$$xy-y=b.$$

Н. Агрономовъ (Вологда).

№ 542 (4 сер.). Доказать, что число

$$a(a^2-1)(a^2-2)(a^2-4)$$

при a цѣломъ кратно 840. При какихъ цѣлыхъ значеніяхъ a это число кратно 1680?

(Заимств.).

№ 543 (4 сер.). Сосудъ наполненъ до высоты h сантиметровъ жидкостью плотности D. Съ какой наименьшей высоты надъ уровнемъ жидкости въ этомъ сосудѣ надо бросить въ нее (безъ начальной скорости) тѣло плотности d, меньшей D, для того, чтобы оно погрузилось до дна сосуда? Черезъ сколько времени тѣло, брошенное съ искомой высоты, всплываетъ на поверхность жидкости (явленіе удара о дно не принимается въ разсчетъ).

Л. Ямпольскій (Braunschweig).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 441 (4сер.). *Внѣ батареи* P *токъ развѣтвляется между точками* A *и* B *на двѣ части, а именно* ACB *сопротивленіемъ въ* 1 *омъ и* ADB — *въ* 3 *ома. Сопротивленія частей цѣпи* PA *и* PB *равны соотвѣтственно* 1 *и* 2 *омамъ. Электродвижущая сила батареи* 2,5 *вольта, а внутреннее ея сопротивленіе* — 10 *омовъ. Опредѣлить силу тока въ разныхъ частяхъ цѣпи.*

Назовемъ черезъ J, i_1 и i_2 соотвѣтственно силы тока въ частяхъ цѣпи APB, ACB и ADB, черезъ R, r_1, r_2 — соотвѣтственныя сопротивленія этихъ частей цѣпи, черезъ E—электровозбудительную силу батареи. Тогда, по извѣстнымъ теоремамъ, относящимся къ развѣтвленію токовъ, имѣемъ:

$$E=JR+i_1r_1,\quad E=JR+i_2r_2,\quad J=i_1+i_2.$$

По условію $E=2{,}5$, $R=10+1+2$ (сумма сопротивленій батареи и частей цѣпи PA и PB), $r_1=1$, $r_2=3$. Поэтому предыдущія равенства можно написать въ видѣ:

$$2{,}5=13J+i_1\ (1),\quad 2{,}5=13J+3i_2\ (2),\quad J=i_1+i_2\ (3).$$

Вычитая изъ уравненія (1) уравненіе (2) получимъ: $i_1-3i_2=0$ (4). Поэтому (см. (3), (4)): $J=4i_2$ (5) и (см. (2), (5)) $2{,}5=13.4i_2+3i_2$, $2{,}5=55i_2$, откуда

$$i_2=\frac{1}{22}\ \text{ампера},$$

а потому (см. (4), (3))

$$i_1=\frac{3}{22}\ \text{ампера},\quad J=\frac{1}{22}+\frac{3}{22}=\frac{2}{11}\ \text{ампера}.$$

В. Гейманъ (Ѳеодосія).

№ 461 (4 сер.). *Доказать, что точки касанія* α *и* α' *стороны* BC *треугольника* ABC *съ окружностями круговъ вписаннаго въ треугольникъ и внѣвписаннаго относительно стороны* BC *образуютъ на этой сторонѣ вмѣстѣ съ основаніями* H *высоты и* S *биссектора, исходящихъ изъ вершины* A, *гармоническое дѣленіе.*

Называя черезъ O и O' соотвѣтственно центры круговъ вписаннаго и внѣвписаннаго относительно стороны BC, черезъ r и r_a — радіусы этихъ круговъ, черезъ p и a полупериметръ и основаніе BC, черезъ h_a — высоту AH, черезъ S—площадь треугольника ABC и замѣчая, что центры O и O' лежатъ на биссектрисѣ AS, находимъ изъ подобныхъ треугольниковъ $O\alpha S$, $O'\alpha'S'$ и AHS:

$$\frac{\alpha S}{S\alpha'}=\frac{O\alpha}{O'\alpha'}=\frac{r}{r_a}=\frac{S}{p}:\frac{S}{p-a}=\frac{p-a}{p}\quad(1),$$

$$\frac{\alpha S}{HS}=\frac{O\alpha}{AH}=\frac{r}{h_a},\quad\text{откуда}\quad\frac{H\alpha}{HS}=\frac{HS-\alpha S}{HS}=\frac{h_a-r}{h_a}\quad(2),$$

$$\frac{S\alpha'}{HS}=\frac{O'\alpha'}{AH}=\frac{r_a}{h_a},\quad\text{откуда}\quad\frac{H\alpha'}{HS}=\frac{HS+S\alpha'}{HS}=\frac{h_a+r_a}{h_a}\quad(3).$$

Изъ равенствъ (2) и (3) имѣемъ, дѣля одно на другое:

$$\frac{H\alpha}{H\alpha'}=\frac{h_a-r}{h_a+r}=\left(\frac{2S}{a}-\frac{S}{p}\right):\left(\frac{2S}{a}+\frac{S}{p-a}\right)=$$

$$=\frac{(2p-a).a(p-a)}{ap(2p-2a+a)}=\frac{p-a}{p},$$

такъ что (см. (1))

$$\frac{\alpha S}{S\alpha'}=\frac{H\alpha}{H\alpha'},$$

откуда видно, что точки S и H раздѣляютъ гармонически точки α и α'.

В. Винокуровъ (Калязинъ); *К. Абрамовичъ* (Петроковъ).

№ 463 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\sqrt[5]{30+2x}+\sqrt[5]{245-2x}=5.$$

Полагая

$$\sqrt[5]{30+2x}=u \quad (1), \qquad \sqrt[5]{245-2x}=v \quad (2),$$

приводимъ данное уравненіе къ виду

$$u+v=5 \quad (3).$$

Возвышая уравненія (1) и (2) въ пятую степень и складывая ихъ находимъ:

$$u^5+v^5=275 \quad (4).$$

Дѣля уравненіе (4) на уравненіе (3), получимъ:

$$u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4=55, \quad u^4+v^4+u^2v^2-uv(u^2+v^2)=55,$$

или же

$$(u^2+v^2)^2-u^2v^2-uv(u^2+v^2)=55 \quad (5).$$

Возвышая равенство (3) въ квадратъ, находимъ:

$$u^2+v^2+2uv=25, \text{ откуда } u^2+v^2=25-uv \quad (6).$$

Подставляя въ равенство (5) изъ равенства (6) значеніе u^2+v^2, получимъ:

$$(25-2uv)^2-(uv)^2-uv(25-uv)=55,$$

или же, послѣ преобразованій, $5(uv)^2-125uv+570=0$,

$$(uv)^2-25(uv)+114=0,$$

откуда $uv=\dfrac{25\pm13}{2}$ (7), т. е. $uv=19$, или $uv=6$.

Полагая $uv=6$ и рѣшая это уравненіе совмѣстно съ уравненіемъ (3), найдемъ, что u равно 2 или 3, откуда (см. (1))

$$30+2x=2^5, \text{ или } 30+2x=3^5,$$

такъ что $2x$ равно 2 или 213, т. е.

$$x_1=1, \quad x_2=106{,}5.$$

Полагая $uv=19$ (см. 7) и рѣшая систему (см. (3)) $u+v=5$, $uv=19$, находимъ, что эти новыя значенія u и v суть корни уравненія

$$z^2-5z+19=0,$$

откуда для u и для x (см. (1)),—въ чемъ можно убѣдиться, произведя вычисленія,—получаемъ мнимыя значенія.

В. Винокуровъ (Калязинъ); *А. Колегаевъ* (Короча); *В. Гейманъ* (Ѳеодосія) *К. Абрамовичъ* (Петроковъ); *Н. Агрономовъ* (Вологда); *Г. Деларовъ* (Царское Село); *Я. Сыченковъ* (Орелъ); *В. Парѳеновъ* (Спб.); *Н. Живовъ* (Кременчугъ).

№ 464 (4 сер.). *Доказать, что при всякомъ цѣломъ значеніи* a *число*

$$a^7-5a^5+4a^3$$

кратно 360; *при какихъ цѣлыхъ значеніяхъ* a *оно кратно* 1080?

(Заимств. изъ *L'Éducation Mathématique*).

Представимъ данное выраженіе въ видѣ:

$$a^7-5a^5+4a^3=a^3(a^4-5a^2+4)=a^3(a^2-1)(a^2-4)=$$
$$=a^2(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) \quad (1).$$

Произведеніе $(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$ пяти послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ кратно произведенія $1.2.3.4.5=120$; поэтому (см. (1)) и число $a^7-5a^5+4a^3$ кратно 120; но легко показать, что разсматриваемое число кратно также 9. Дѣйствительно, число a либо кратно 3, либо при дѣленіи на 3 даетъ въ остаткѣ 1 или 2. Если a кратно 3, то a^2 кратно 9, а потому и разсматриваемое число кратно 9. Если a при дѣленіи на 3 даетъ въ остаткѣ 1, то $a=3k+1$, гдѣ k число цѣлое, а потому $a-1=3k$ и $a+2=3k+3=3(k+1)$, т. е. числа $a-1$ и $a+2$ кратны 3; слѣдовательно (см. (1)), разсматриваемое число кратно 9. Если a при дѣленіи на 3 даетъ въ остаткѣ 2, то $a=3k+2$, гдѣ k — число цѣлое, такъ что $a+1=3k+3=3(k+1)$, $a-2=3k$, т. е. числа $a+1$ и $a-2$ кратны 3; слѣдовательно, разсматриваемое число (см. (1)) кратно 9. Итакъ, разсматриваемое число кратно 120 и 9, а потому кратно и наименьшаго кратнаго этихъ чиселъ, т. е. 360.

Если a кратно 3, то a^3 кратно 27, а потому (см. (1)) и разсматриваемое число кратно 27; будучи кратно 120 и 27, оно кратно и наименьшаго кратнаго этихъ чиселъ, т. е. 1080. Пусть теперь a не кратно 3; въ этомъ случаѣ a при дѣленіи на 9 даетъ въ остаткѣ одно изъ чиселъ 1, 2, 4, 5, 7, 8 (но не 3 или 6, такъ какъ иначе a было бы кратно 3). Такимъ образомъ, a имѣетъ одинъ изъ видовъ $9k+1$, $9k+2$, $9k+4$; $9k+5$, $9k+7$, $9k+8$; послѣдніе три вида можно замѣнить при помощи обычнаго преобразованія (прибавить и отнять по 9) равносильными видами: $9k-4$, $9k-2$, $9k-1$, такъ что число a, не кратное 3, имѣетъ одинъ изъ видовъ $9k\pm1$, $9k\pm2$, $9k\pm4$, гдѣ k — число цѣлое. Подставляя въ выраженіе (1) вмѣсто a одно изъ чиселъ вида $9k\pm1$, $9k\pm2$, найдемъ соотвѣтственно этимъ четыремъ видамъ a слѣдующіе результаты подстановки:

$$(9k+1)^2.(9k-1).9k.(9k+1)(9k+2)(9k+3)=27k(9k+1)^3(9k-1)(9k+2)(3k+1),$$

$$(9k-1)^2.(9k-3)(9k-2)(9k-1)9k(9k+1)=27k(9k-1)^3.(3k-1).(9k-2)(9k+1),$$

$$(9k+2)^2.9k.(9k+1)(9k+2)(9k+3)(9k+4)=27k(9k+2)^3(9k+1)(3k+1)(9k+4),$$

$$(9k-2)^2(9k-4)(9k-3)(9k-2)(9k-1)9k=27k(9k-2)^3(9k-4)(3k-1)(9k-1).$$

Итакъ, если a есть число видовъ $9k\pm1$, $9k\pm2$, то предложенное для разсмотрѣнія число кратно 27; будучи кратно и 120, разсматриваемое число кратно въ этихъ случаяхъ наименьшаго кратнаго чиселъ 27 и 120, т. е. 1080. Если же a есть число вида $9k\pm4$, то число $a^7-5a^5+4a^3$ (см. (1)) равно одному изъ выраженій:

$$(9k+4)^2.(9k+2)(9k+3)(9k+4)(9k+5)(9k+6)=$$

$$=9.(9k+4)^3(9k+2)(3k+1)(9k+5)(3k+2),$$

$$(9k-4)^2.(9k-6)(9k-5)(9k-4)(9k-3)(9k-2)=$$

$$=9.(9k-4)^3.(3k-2)(9k-5)(3k-1)(9k-2).$$

Итакъ, если a есть число одного изъ видовъ $9k\pm4$, то расматриваемое число кратно 9, но не кратно 27, такъ какъ ни одно изъ чиселъ $9k\pm4$, $9k\pm2$, $9k\pm5$, $3k\pm1$, $3k\pm2$ не кратно 3; слѣдовательно, при $a=9k\pm4$, разсматриваемое число не кратно и 1080, такъ какъ 1080 кратно 27. Изъ всего сказаннаго видно, что число $a^7-5a^5+4a^3$ кратно 1080 при a цѣломъ тогда и только тогда, если a кратно 3 или же, если a есть число одного изъ видовъ $9k\pm1$, $9k\pm2$, гдѣ k — число цѣлое.

А. Колегаевъ (Короча); *В. Гейманъ* (Θеодосія); *К. Абрамовичъ* (Петроковъ); *А. Чесскій* (Москва).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 26-го Ноября 1904 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

ВЪ 1904 ГОДУ

СЕЛЬСКО-ХОЗЯЙСТВЕННЫЙ ЖУРНАЛЪ

„ЗАПИСКИ“

ИМПЕРАТОРСКАГО ОБЩЕСТВА СЕЛЬСКАГО ХОЗЯЙСТВА ЮЖНОЙ РОССІИ

74-й (Семьдесятъ четвертый годъ изданія) 74-й

будетъ выходить ежемѣсячно, за исключеніемъ двухъ лѣтнихъ мѣсяцевъ, книжками не менѣе 6-ми печатныхъ листовъ каждая, по нижеслѣдующей программѣ:

Отдѣлъ оффиціальный составятъ: Правительственныя распоряженія, касающіяся сельскаго хозяйства, протоколы засѣданій и годичные отчеты Общества и Комитетовъ, состоящихъ при Обществѣ, доклады Комиссій и т. п.

Отдѣлъ неоффиціальный составятъ: Отдѣльныя статьи, очерки, изслѣдованія и монографіи по разнымъ отраслямъ сельскаго хозяйства юга Россіи, а также заслуживающія вниманія переводныя статьи общаго содержанія; обзоры дѣятельности правительственныхъ, земскихъ и общественныхъ учрежденій и сельско-хозяйственныхъ обществъ; различныя замѣтки и наблюденія хозяевъ и др.; объявленія.

Редакція журнала покорнѣйше проситъ лицъ, желающихъ принять участіе въ журналѣ въ качествѣ сотрудниковъ, высылать свои статьи, а равно обращаться за всякаго рода справками и свѣдѣніями, относящимися къ изданію, по ниже-указанному адресу на имя редакціи „Записокъ“.

Рукописи, присылаемыя въ редакцію „Записокъ“ и принятыя для печати, въ случаѣ надобности, подлежатъ, по соглашенію съ авторами, измѣненію и сокращенію. Статьи, присылаемыя въ редакцію безъ обозначенія условій, считаются безплатными.

ПОДПИСНАЯ ЦѢНА на „ЗАПИСКИ“ на годъ:

Съ доставкою и пересылкою	**5** руб.	**50**	коп.
Безъ доставки и пересылки	**5** „	—	„
Отдѣльныя книжки журнала стоятъ по	**1** „	—	„

Объявленія для напечатанія въ „ЗАПИСКАХЪ“ принимаются на слѣдующихъ условіяхъ: за печатаніе **страницы** въ теченіе года—**25** руб., полугода—**15** руб. и одного раза—**7** руб. **50** коп.; за **полъ страницы** въ теченіе года—**15** руб., полугода—**8** руб. и одного раза—**4** руб.; за **строку**—**20** коп.

Подписка на журналъ и печатаніе объявленій принимаются въ редакціи „Записокъ“: *г. Одесса, Дерибасовская ул., Городской садъ, зданіе Общества.*

Редакторъ „Записокъ“ *А. А. Бычихинъ.*