

Обложка
щется

Обложка
щется

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

15 Сентября

№ 353.

1903 г.

Содержаніе: О новѣйшихъ проекціонныхъ аппаратахъ и микрофотографіи. (Окончаніе). *М. Таубера*. — Объемъ шара и его частей. *К. Пенюжескича*. — Рецензіи: Алгебра. Сборникъ задачъ, предлагавшихся на конкурсныхъ экзаменахъ въ институтахъ. *В. Вроблевскій*. *С. Адамовича*. — Научная хроника: Международная Ассоціація Академій. Электрическій ударъ при 5500 вольтахъ, не повлекшій смертельнаго исхода. Новый способъ телеграфированія безъ проводовъ. Телеграфированіе безъ проводовъ во время хода поезда. — Задачи для учащихся, №№ 382—387 (4 сер.). — Рѣшенія задачъ, №№ 288, 311, 317. — Объявленія.

О новѣйшихъ проекціонныхъ аппаратахъ и микрофотографіи.

М. Таубера, въ Іенѣ.

(Окончаніе *).

III.

Микрофотографія.

Изображенія, получаемыя въ микроскопахъ, могутъ восприниматься нами разными путями. Мы ихъ можемъ, во-первыхъ, непосредственно, субъективно разсматривать въ самомъ же микроскопѣ; далѣе, мы ихъ можемъ отрисовывать съ помощью особыхъ „рисовальныхъ аппаратовъ“ (*Zeichengeräte*) при микроскопахъ; такъ какъ при этомъ рисунки могутъ производиться въ тѣхъ же цвѣтахъ, въ какихъ представляется самъ препаратъ, то при хорошемъ исполненіи ихъ дана, такимъ образомъ, возможность лицамъ, не имѣющимъ микроскоповъ, наблюдать интересующіе ихъ препараты въ увеличенномъ видѣ и натуральныхъ цвѣтахъ. Въ соединеніи съ эпидиоскопомъ можно затѣмъ микроскопныя изображенія проектировать на экранѣ, что позволяетъ

*) См. № 352 „Вѣстника“.

многимъ лицамъ въ одно и то же время наблюдать въ увеличенномъ видѣ какой-нибудь весьма небольшой препаратъ. Изображенія въ микроскопахъ можно, наконецъ, фотографировать; въ этомъ случаѣ дѣлаются замѣтными такія детали, какія не обнаруживаются при субъективномъ разсматриваніи изображеній. Для объясненія этого интереснаго и важнаго процесса приведемъ нижеслѣдующее.

Для современной практической оптики недостаточно обыкновеннаго предположенія, что свѣтъ состоитъ изъ лучей. До тѣхъ поръ, пока оперировали надъ одними только лучами, оптика подвигалась медленно впередъ; приходилось ограничиваться одними приближеніями, и всѣ изслѣдованія, какъ и вычисления, приводили только къ болѣе или менѣе поверхностнымъ результатамъ. Къ тому же, всѣ эти изслѣдованія были *действительны* только въ теоретическомъ смыслѣ, такъ какъ они могли производиться только надъ каждымъ лучемъ въ отдѣльности; отдѣльныхъ же лучей, по законамъ дифракціи, нѣтъ. За лучемъ свѣта можно въ нѣкоторой степени признать его „действительное“ существованіе только *внутри* пучка лучей съ *конечнымъ* расходящимся угломъ. При стремленіи же выдѣлить изъ пучка *одинъ единственный* лучъ, онъ перестаетъ существовать.

Болѣе глубокое и всестороннее изслѣдованіе разныхъ вопросовъ практической оптики достигается черезъ примѣненіе теоріи свѣтовыхъ волнъ. Эти послѣднія, какъ извѣстно, чрезвычайно малыхъ размѣровъ и для разныхъ цвѣтовъ имѣютъ различную длину, такъ что длина свѣтовой волны вполне характеризуетъ родъ свѣта, т. е. цвѣтъ.

Съ этой точки зрѣнія и объяснимъ интересующій насъ вопросъ.

Отъ микроскопа требуется не только, чтобы онъ при извѣстномъ увеличеніи давалъ ясныя и совершенно подобныя изображенія разсматриваемыхъ предметовъ, но отъ него еще требуется, чтобы изображенія оставались такими же ясными и подобными при измѣненіи увеличенія въ одну или другую сторону. Въ этомъ смыслѣ можно доводить увеличенія микроскопа только до опредѣленнаго, непреодолимаго предѣла; у этого предѣла мы находимся, когда частицы предмета становятся такими маленькими, что онѣ дѣлаются по величинѣ равными свѣтовымъ волнамъ примѣняемаго свѣта. При дальнѣйшемъ повышеніи увеличенія, становятся неизбежными явленія дифракціи и интерференціи, которыя отуманиваютъ, раскрашиваютъ (при бѣломъ освѣщеніи) и совершенно искажаютъ изображенія.

Чѣмъ короче поэтому свѣтоты волны примѣняемаго свѣта, тѣмъ меньшія частички мы въ состояніи различать. На этомъ основаніи, слѣдуетъ при микроскопическихъ изслѣдованіяхъ примѣнять свѣтъ, соотвѣтствующій возможно малой свѣтовой волнѣ. Съ синимъ свѣтомъ можно поэтому достигнуть лучшихъ результатовъ, чѣмъ съ краснымъ; съ фіолетовымъ—лучшихъ, чѣмъ

съ синимъ. Наилучшіе результаты достигаются, конечно, при примѣненіи ультрафіолетовыхъ лучей, такъ какъ ихъ свѣтловыя волны меньше свѣтовыхъ волнъ синихъ и фіолетовыхъ лучей. Ультра-фіолетовые лучи не производятъ на нашъ глазъ никакого впечатлѣнія; на фотографическую же пластинку они, однако, сильно дѣйствуютъ.

Отсюда и слѣдуетъ, что фотографическимъ путемъ получаются болѣе детальныя изображенія, чѣмъ при непосредственныхъ наблюденіяхъ.

Увеличеніе микроскопа находится въ связи съ его разъединяющею способностью, т. е. съ способностью представлять разъединенныя частички дѣйствительно разъединенными.

Гельмгольцъ ¹⁾ и Аббе ²⁾ нашли теоретическимъ путемъ, что для разъединяющей способности микроскоповъ существуетъ вполне опредѣленный предѣлъ. По ихъ вычисленіямъ, этотъ предѣлъ равняется для фіолетовыхъ лучей, при центральномъ освѣщеніи посредствомъ узкихъ конусовъ свѣта, приблизительно

$\frac{1}{4000}$ мм., т. е. съ помощью микроскоповъ можно достигнуть въ предѣлъ только того, чтобы видѣть при вышеуказанныхъ условіяхъ частички, находящіяся на разстояніи $\frac{1}{4000}$ мм., дѣйствитель-

но разъединенными. Если же примѣнять косое освѣщеніе или также центральное освѣщеніе посредствомъ конусовъ свѣта съ отверстіемъ въ 180° , то можно фотографическимъ путемъ съ помощью фіолетовыхъ лучей, соответствующихъ длинѣ волны $\lambda = 0,0004$, разъединять частички, находящіяся даже на разстояніи $\frac{1}{8000}$ мм. Это и есть для фіолетовыхъ лучей крайній предѣлъ, дальше котораго по Аббе и Гельмгольцу идти нельзя, и дальнѣйшее улучшение микроскоповъ относительно ихъ разъединяющей способности лежитъ поэтому, согласно выводамъ этихъ ученыхъ, внѣ всякой возможности.

Предѣлъ этотъ удалось, однако, въ настоящее время перешагнуть.

Недавно Зидентопфъ и Цзиммонди ³⁾ въ Генѣ выработали новый методъ, съ помощью котораго дѣлаются замѣтными чрезвычайно маленькія тѣльца, какъ, напримѣръ, частички золота въ такъ

¹⁾ Н. v. Helmholtz. I. „Ueber die Grenze der Leistungsfähigkeit der Mikroskope“ Berichte d. Akademie der Wiss. zu Berlin 1873. II. „Die theoretische Grenze für die Leistungsfähigkeit der Mikroskope“ Pogg. Ann. 1874 p 557 до 584.

²⁾ E. Abbe. „Beiträge zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen Wahrnehmung“. Archiv f. mikr. Anatomie, April. 1874.

³⁾ Siedentopf u. Zsigmondy. Ueber Sichtbarmachung und Größenbestimmung ultramikrosk. Teilchen, mit besonderer Anwendung auf Goldrubingläser. Annalen der Physik, Leipzig. Томъ 10. 1903 г.

называемыхъ коллоидальныхъ золотыхъ растворахъ, несмотря на то, что эти частички и разстоянія между ними находятся внѣ предѣла, установленнаго Аббе и Гельмгольцемъ.

Центръ тяжести этого метода лежитъ въ особомъ распредѣленіи освѣщенія.

Такъ какъ частички, принимаемыя при микроскопическихъ наблюденіяхъ въ соображеніе, не самосвѣтящи или свѣтятъ съ чрезвычайно незначительною яркостью, то мы принуждены, чтобы сдѣлать ихъ замѣтными, примѣнять сильное искусственное освѣщеніе. Лучи свѣта падаютъ тогда на частички, отклоняются отъ нихъ и проходятъ затѣмъ въ микроскопъ, гдѣ получается интересное дифракціонное явленіе, *слѣдствіемъ* котораго и является изображеніе этихъ частичекъ. Эти изображенія тѣмъ яснѣе, чѣмъ больше дифракціонныхъ и чѣмъ меньше освѣтительныхъ лучей проходитъ въ микроскопъ, при чемъ требованіе это должно тѣмъ строже соблюдаться, чѣмъ меньше изображаемыя частички.

Поэтому, чтобы сдѣлать замѣтными весьма маленькія частички, нужно прежде всего такъ распредѣлить освѣщеніе, чтобы въ дифракціонный конусъ лучей, по направленію которыхъ переносится свѣтовая энергія отъ частичекъ къ ихъ изображеніямъ, не попалъ ни одинъ изъ освѣтительныхъ лучей.

При такомъ распредѣленіи освѣщенія мы будемъ видѣть ярко-освѣщенные частички на совершенно темномъ фонѣ.

Этого, однако, нельзя достигнуть при обыкновенныхъ способахъ освѣщенія, такъ какъ цѣлая масса рефлексовъ, происходящихъ на поверхностяхъ кондензора (освѣтительнаго аппарата) и объектива микроскопа, способствуетъ проникновенію множества лучей въ дифракціонный конусъ.

Всѣ эти вредные рефлексы устраняются, и въ дифракціонный конусъ не попадаетъ, такимъ образомъ, ни одинъ изъ освѣтительныхъ лучей, если давать освѣщенію такое распредѣленіе, чтобы ось освѣтительнаго конуса была перпендикулярна къ оси дифракціоннаго конуса и чтобы оба конуса не пересѣкались между собою. (См. 9).

Въ выработкѣ этого новаго способа освѣщенія и въ прекрасномъ его примѣненіи для микроскопическаго изслѣдованія разныхъ растворовъ и состоитъ высокая заслуга Зидентопфа и Цзигмонди.

Но слѣдуетъ нѣсколько оговориться.

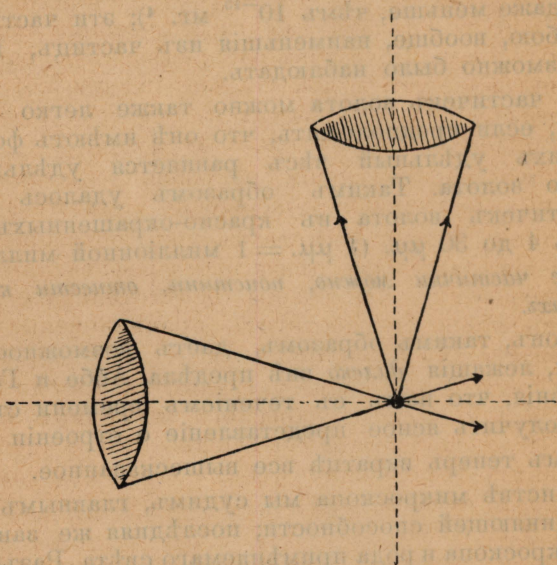
Этотъ новый способъ освѣщенія даетъ намъ *только* возможность убѣждаться въ *существованіи* въ изслѣдуемыхъ растворахъ частичекъ, лежащихъ внѣ вышеуказаннаго предѣла. Относительно же ихъ деталей и конструкціи мы, однако, не получаемъ никакого представленія.

Мы видимъ не самыя частички, но соотвѣтствующіе имъ дифракціонные кружки, происхожденіе которыхъ становится

яснымъ, если, на примѣръ, предположить, что эти частички меньше половинной длины свѣтовой волны.

Такимъ частичкамъ дано названіе *ультра-микроскопическихъ частичекъ*, чѣмъ желаютъ выразить, что въ нихъ съ помощью микроскопа деталей и структуръ наблюдать невозможно.

Казалось бы, что весь этотъ новый методъ не даетъ почти ничего, что могло бы хотя нѣсколько характеризовать интересующія насъ частички и что, поэтому, всё изслѣдованіе съ помощью его оказываются совершенно безцѣльными и излишними. Однако, изслѣдованія, произведенныя надъ стеклами, содержащими золото въ различнѣйшихъ состояніяхъ, показали, что этотъ методъ даетъ не только возможность убѣждаться въ существованіи золо-



Фиг. 9.

тыхъ частичекъ въ изслѣдуемыхъ стеклахъ, но онъ даетъ также полное представленіе о распредѣленіи, цвѣтѣ, яркости и поляризаціонномъ состояніи этихъ частичекъ; дальнѣйшія изслѣдованія въ жидкихъ массахъ показали, что по роду движенія дифракціонныхъ кружковъ можно получить достаточно признаковъ для *нѣкоторой* научной характеристики изслѣдуемыхъ частичекъ.

Вообще, этотъ методъ обѣщаетъ многое и не мало пользы принесетъ онъ медицинѣ, ботаникѣ и другимъ наукамъ, въ которыхъ микроскопъ является, такъ сказать, посредникомъ для разныхъ великихъ открытій.

Чтобы дать болѣе ясное понятіе о чрезвычайно малой ве-

личинѣ частичекъ, существованіе которыхъ описанный родъ освѣщенія въ состояніи доказать, приведемъ слѣдующій примѣръ.

Положимъ, что „Rubinglas“ содержитъ въ одномъ кубическомъ миллиметрѣ 80 миллионныхъ миллиграмма золота и что разстояніе между частичками золота равно цѣлой длинѣ свѣтовой волны; тогда выходитъ, что въ одномъ кубическомъ миллиметрѣ находится 1 000 000 000 (одинъ миллиардъ) частичекъ; всѣхъ каждой частички, такимъ образомъ, равняется

$$\frac{80}{1.000\,000 \times 1\,000\,000\,000} \text{ миллиграмма.}$$

На самомъ дѣлѣ Зидентопфъ и Цигмонди насчитывали въ каждомъ кубическомъ миллиметрѣ по нѣскольку миллиардовъ частичекъ золота, такъ что каждая частичка вѣситъ еще меньше. Наименьшія частички золота, которыя имъ удалось еще наблюдать, вѣсили даже меньше, чѣмъ 10^{-15} мг. ⁴⁾; эти частички представляютъ собою, вообще, наименьшія изъ частицъ, которыя до сихъ поръ возможно было наблюдать.

По вѣсу частичекъ золота можно также легко опредѣлить ихъ величину, если предположить, что онѣ имѣютъ форму кубиковъ и что ихъ удѣльный вѣсъ равняется удѣльному вѣсу обыкновеннаго золота. Такимъ образомъ удалось найти, что діаметръ частичекъ золота въ красно-окрашенныхъ стеклахъ равняется отъ 4 до 30 μ . (1 μ . = 1 миллионной миллиметра).

Такія же частички можно, поистинѣ, отнести къ категоріи бесконечно-малыхъ.

Микроскопъ, такимъ образомъ, даетъ возможность наблюдать частички, лежація далеко внѣ предѣла Аббе и Гельмгольца и нѣтъ сомнѣнія, что намъ съ теченіемъ времени съ помощью его удастся получить ясное представленіе о строеніи матеріи.

Повторимъ теперь вкратцѣ все вышесказанное.

О достоинствѣ микроскопа мы судимъ, главнымъ образомъ, по его разъединяющей способности; послѣдняя же зависитъ отъ увеличенія микроскопа и рода примѣняемаго свѣта. Разъединяющая способность тѣмъ меньше, чѣмъ ярче примѣняемые лучи и наоборотъ; поэтому, она меньше при непосредственныхъ наблюденіяхъ, чѣмъ при дѣйствіяхъ на чувствительную пластинку; на послѣднюю дѣйствуютъ болѣе темные лучи солнечнаго спектра, т. е. фіолетовые и ультрафіолетовые, между тѣмъ какъ глазъ работаетъ, главнымъ образомъ, желтозелеными лучами.

Изображенія, поэтому, тѣмъ подобнѣе и яснѣе, чѣмъ болѣе преломляемъ свѣтъ, примѣняемый при изслѣдованіяхъ. Отсюда и

⁴⁾ Съ помощью спектральныхъ анализовъ можно было наблюдать $0,14 \times 10^{-6}$ мг. Na (Кирхгофъ и Бунзенъ) и 7×10^{-14} мг. водорода (Эмихъ), и обонаніемъ можно еще воспринимать 10^{-11} мг. іодоформа (Вертело).

ясно высокое значеніе *микрофотографіи*: послѣдняя, работаетъ сильно преломляемыми лучами и даетъ, такимъ образомъ, возможность, черезъ примѣненіе болѣе сильныхъ увеличеній, обнаруживать болѣе мелкія детали, чѣмъ при непосредственныхъ наблюденіяхъ.

По Аббе и Гельмгольцу можно, какъ мы видѣли, улучшать микроскопы относительно ихъ увеличительной, слѣдовательно, и развѣдывающей способности только до вполне опредѣленнаго предѣла. Только до этого предѣла можно, дѣйствительно, получать при наблюденіяхъ глазомъ или, въ крайнемъ случаѣ, съ помощью микрофотографіи изображенія, свободныя отъ дифракціи и интерференціи, и только до него можно по изображеніямъ получать *полное* представленіе о самомъ предметѣ. Можно, однако, какъ мы видѣли далѣе, посредствомъ особаго распределенія освѣщенія, заходить и за этотъ предѣлъ, но изображеній, *подобныхъ* предметамъ, мы *ни въ какомъ случаѣ* получать не можемъ, такъ какъ предметныя точки даютъ въ изображеніи уже не точки, а маленькіе дифракціонные кружки. Мы, конечно, по этимъ кружкамъ можемъ доказывать существованіе чрезвычайно маленькихъ частичекъ, мы даже можемъ при дальнѣйшемъ изученіи этихъ кружковъ отыскивать такія признаки, которые въ состояніи болѣе или менѣе охарактеризовать родъ изслѣдуемыхъ частичекъ, но полного, нагляднаго представленія о конструкціи и деталяхъ послѣднихъ мы получать не можемъ, — такового, надо полагать, никогда и не получимъ.

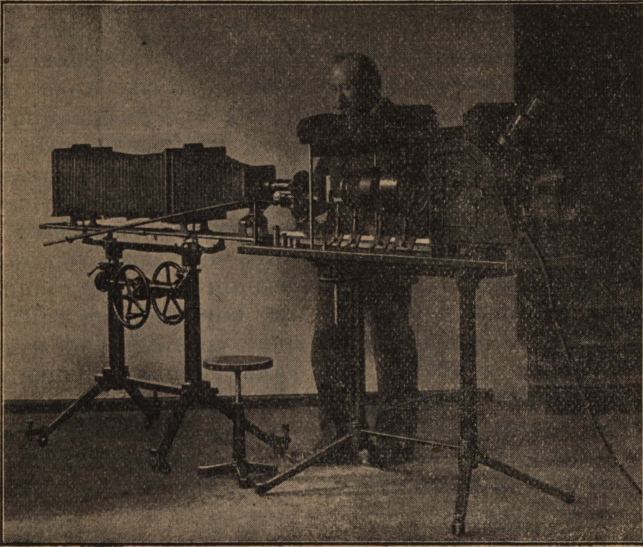
Дифракціонные кружки, въ качествѣ изображеній ультрамикроскопическихъ частичекъ, будутъ, вѣроятно, играть въ микроскопіи приблизительно такую же роль, какъ спектральныя линіи при спектральныхъ анализахъ.

Аппараты, употребляемые при микрофотографіи, состоятъ изъ освѣтительнаго аппарата, микроскопа и фотографической камеры; новѣйшіе изъ нихъ можно примѣнять въ горизонтальномъ или вертикальномъ направленіи, а потому они и названы *горизонтально-вертикальными камерами*.

На фигурѣ 10-ой представленъ аппаратъ въ горизонтальномъ положеніи. Освѣщеніе препарата производится посредствомъ лампы, помѣщенной въ фокусѣ увеличительнаго стекла; свѣтъ поэтому исходитъ изъ послѣдняго въ видѣ пучка параллельныхъ лучей; лучи эти падаютъ на освѣтительный аппаратъ и, по прохожденіи послѣдняго, освѣщаютъ затѣмъ фотографируемый препаратъ. Къ увеличительному стеклу прицѣплена діафрагма, которую обыкновенно такъ устраиваютъ, что можно по произволу мѣнять діаметръ пропускаемаго пучка лучей.

Изображеніе, получаемое отъ сильно освѣщеннаго препарата, проектируется на матовое стекло, гдѣ его увеличенное и

обратное изображеніе и можетъ разсматриваться сразу нѣсколькими наблюдателями. Препаратъ на столикѣ микроскопа передвигаютъ затѣмъ до тѣхъ поръ, пока его изображеніе на матовомъ стеклѣ не приметъ желаемого положенія, и измѣняютъ длину камеры настолько, чтобы изображеніе сдѣлалось совершенно яснымъ.



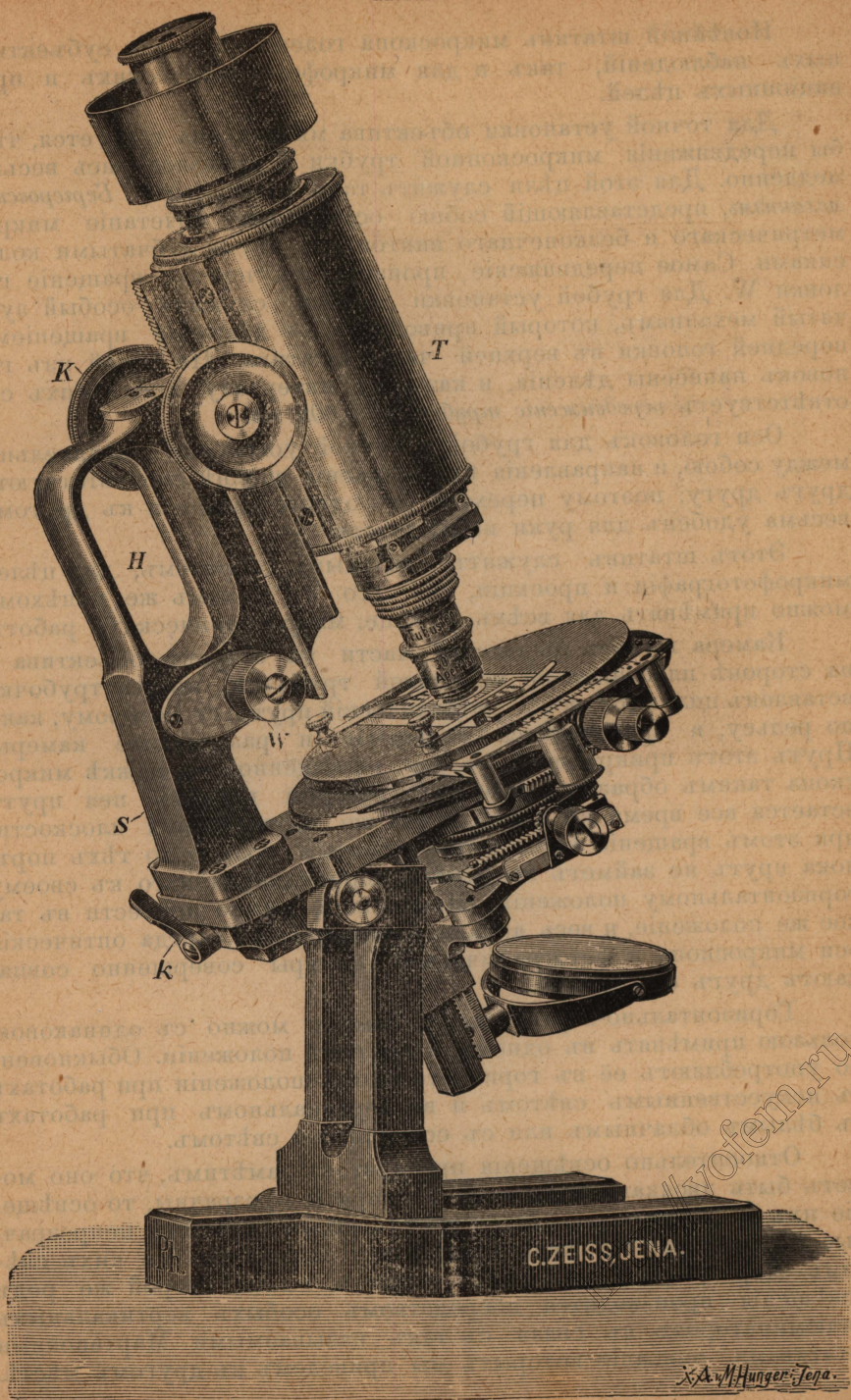
Фиг. 10

Горизонтально-вертикальная камера.

Когда все это достигнуто, то вынимаютъ матовое стекло и вмѣсто него вставляютъ чувствительную пластинку; на послѣдней и отпечатывается тогда, послѣ нѣкоторой экспозиціи, изображеніе препарата.

На чертежѣ 11-мъ представленъ штативъ микроскопа отдѣльно.

Для цѣлей микрофотографіи и проекціи весьма желательно, чтобы передвиженія препарата совершались чрезвычайно медленно и чтобы, кромѣ того, столикъ микроскопа могъ легко вращаться вокругъ оптической оси послѣдняго. Этимъ двумъ требованіямъ вполне удовлетворяетъ такъ называемый *микрофотографическій столикъ Цейсса* (средняя часть фигуры 11). Передвиженія препарата производятся на этомъ столикѣ по двумъ перпендикулярнымъ направленіямъ и при томъ по каждому изъ нихъ на 10 мм.; по тѣмъ же направленіямъ расположены нониусы, которые даютъ возможность измѣрять съ большою точностью самыя незначительныя передвиженія препарата.



Фиг. 11.

Новѣйшій штативъ микроскопа годенъ какъ для субъективныхъ наблюдений, такъ и для микрофотографическихъ и проекционныхъ цѣлей.

Для точной установки объектива микроскопа требуется, чтобы передвиженія микроскопной трубки Т производились весьма медленно. Для этой цѣли служитъ такъ называемый *Бергеровскій механизмъ*, представляющій собою остроумное сочетаніе микрометрическаго и безконечнаго винтовъ съ двумя зубчатыми колесиками. Самое передвиженіе производится черезъ вращеніе головки W. Для грубой установки трубки служитъ особый зубчатый механизмъ, который приводитъ въ движеніе вращеніемъ передней головки въ верхней части штатива. На одной изъ головокъ нанесены дѣленія, и каждому интервалу послѣднихъ соответствуетъ *передвиженіе трубки на 0,002 мм.*

Оси головокъ для грубой и точной установки параллельны между собою, и направленія ихъ вращенія вполне соответствуютъ другъ другу; поэтому переходъ отъ одного движенія къ другому весьма удобенъ для руки наблюдателя.

Этотъ штативъ служитъ, главнымъ образомъ, для цѣлей микрофотографіи и проекціи, но его съ такимъ же успѣхомъ можно примѣнять для всѣхъ, вообще, микроскопическихъ работъ.

Камера имѣетъ въ нижней части на сторонѣ объектива и на сторонѣ пластинки по маленькой трубчкѣ; въ эти трубчочки вставленъ цилиндрической металлическій прутъ, по которому, какъ по рельсу, и производится сдвигеніе и раздвиженіе камеры. Прутъ этотъ прикрѣпленъ къ оси, помѣщенной на ножкѣ микроскопа такимъ образомъ, что при вращеніи вокругъ нея прутъ остается все время въ одной и той же вертикальной плоскости; при этомъ вращеніе можетъ продолжаться только до тѣхъ поръ, пока прутъ не займетъ положенія, перпендикулярнаго къ своему горизонтальному положенію. Микроскопъ можно привести въ такое же положеніе, и весь аппаратъ установленъ, когда оптическія оси микроскопа и фотографической камеры совершенно совпадаютъ другъ съ другомъ.

Горизонтально-вертикальную камеру можно съ одинаковою пользою примѣнять въ одномъ и другомъ положеніи. Обыкновенно употребляютъ её въ горизонтальномъ положеніи при работахъ съ искусственнымъ свѣтомъ и въ вертикальномъ при работахъ съ бѣлымъ облачнымъ или съ солнечнымъ свѣтомъ.

Относительно освѣщенія препаратовъ замѣтимъ, что оно можетъ быть двоякаго рода; если препараты прозрачны, то освѣщеніе ихъ должно производиться пропущеннымъ свѣтомъ; непрозрачные же препараты должны освѣщаться падающимъ на нихъ свѣтомъ. Первый родъ освѣщенія описанъ выше; второй же родъ освѣщенія производится посредствомъ особыхъ вертикальных иллюминаторовъ въ связи съ такъ называемыми Мартенскими штативами, описаніе которыхъ мы приведемъ въ другомъ мѣстѣ.

На фиг. 12 представленъ маленькій паучекъ, снятый въ отраженномъ свѣтѣ.



Фиг. 12.

Паучекъ, снятый микрофотографическимъ аппаратомъ.

Въ заключеніе упомянемъ еще о, такъ называемой, *передвижной касетѣ*, которая служитъ для опредѣленія экспозиціоннаго времени. Какъ извѣстно, экспозиція должна продолжаться столько времени, пока не получится полное и совершенно ясное изображеніе препарата; для опредѣленія этого времени и придумана передвижная касета. Съ помощью послѣдней можно нѣсколько разъ подрядъ фотографировать на одной и той же пластинкѣ при разныхъ временахъ экспозиціи какую-нибудь часть изображенія, напримѣръ, полоску, шириною приблизительно въ 2 см.; по этимъ полоскамъ, лежащихъ другъ подлѣ друга, и можно тогда легко опредѣлить самое благоприятное экспозиціонное время, котораго и нужно придерживаться при фотографированіи на совершенно подобныхъ пластинкахъ при томъ же освѣщеніи.

Величина пластинокъ можетъ, въ крайнемъ случаѣ, доходить до 25×25 см.

Объемъ шара и его частей.

К. Пенюжневича въ Екатеринбургъ.

Во всѣхъ элементарныхъ учебникахъ по геометріи доказательства формулъ, служащихъ для опредѣленія объема шара и его частей, довольно сложны и искусственны, и при этомъ вниманіе учащагося постоянно отвлекается отъ главнаго трактуемаго вопроса. Нижеизложенный способъ лишенъ этого недостатка. Здѣсь главный вопросъ всегда стоитъ предъ глазами ученика, который видитъ ясно свою конечную цѣль.

Выводъ изложенныхъ теоремъ основывается на пониманіи неравенствъ алгебраическаго характера, доказательство которыхъ приводится отдѣльно въ видѣ леммы. *)

1. Лемма. Если n —число цѣлое и положительное, которое можетъ безпредѣльно увеличиваться, то выраженіе

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3}$$

имѣетъ предѣломъ $\frac{1}{3}$.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ a —число цѣлое и положительное, имѣемъ:

$$\frac{(a+1)^3 - a^3}{3} > a^2 > \frac{a^3 - (a-1)^3}{3}.$$

Полагаемъ послѣдовательно:

$$a = 1, \quad a = 2, \quad \dots, \quad a = n-1.$$

Сложимъ почленно рядъ полученныхъ такимъ образомъ неравенствъ и, раздѣливши сумму на n^3 , придемъ къ неравенству:

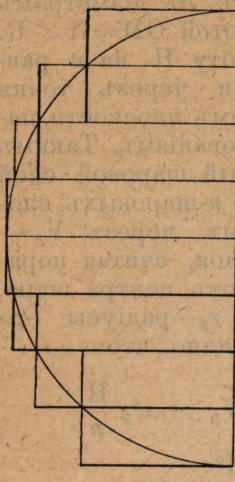
$$\frac{1 - \frac{1}{n^3}}{3} > \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} > \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3}{3},$$

которое доказываетъ справедливость нашего положенія.

*) Настоящій способъ представляетъ собой элементарный выводъ значенія интеграла

$$2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx.$$

2. Объемъ шара. Предположимъ, что намъ дана полуокружность съ центромъ въ точкѣ О. Диаметръ ея АВ раздѣленъ на $2n$ равныхъ частей, слѣдовательно, радіусы ОА и ОВ—каждый раздѣленъ на n равныхъ частей. Затѣмъ изъ крайнихъ точекъ А и В діаметра, изъ центра О и изъ точекъ дѣленія составляемъ перпендикуляры къ діаметру АВ. Изъ точекъ, въ которыхъ эти перпендикуляры встрѣчаютъ полуокружность, проводятъ прямыя, параллельныя діаметру АВ. Образованныя такимъ образомъ фигуры



О вращаютъ около діаметра АВ, какъ около оси. Полуокружность при вращеніи даетъ замкнутое геометрическое тѣло, называемое шаромъ, объемъ котораго будетъ заключаться между суммою объемовъ выходящихъ и входящихъ цилиндровъ. Выходящихъ цилиндровъ, очевидно, будетъ $2n$, а входящихъ $2(n-1)$.

Обозначимъ радіусъ шара черезъ R , а радіусы основаній цилиндровъ черезъ r_1, r_2, \dots, r_{n-1} , гдѣ r_1 —радіусъ основанія цилиндра, ближайшаго къ центру, черезъ S —сумму объемовъ выходящихъ цилиндровъ и, наконецъ, черезъ s —сумму объемовъ входящихъ цилиндровъ. Тогда

$$S = 2\pi(R^2 + r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_{n-1}^2) \frac{R}{n}$$

$$s = 2\pi(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_{n-1}^2) \frac{R}{n},$$

откуда

$$S - s = \frac{2\pi R^3}{n}.$$

Если n будетъ неограниченно возрастать, то первая часть послѣдняго равенства обращается въ нуль; а такъ какъ S —уменьшается, оставаясь постоянно больше объема шара, а s —увеличивается, оставаясь все время меньше его, то ясно, что объемъ V шара будетъ общимъ предѣломъ двухъ переменныхъ суммъ S и s при неограниченномъ возрастаніи n .

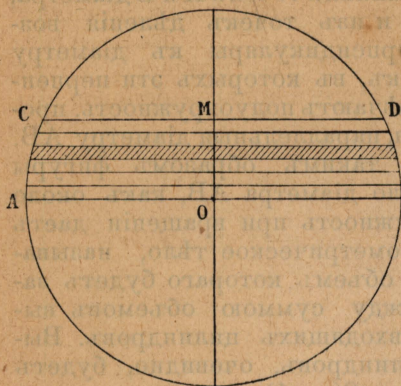
$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} S = \lim_{n \rightarrow \infty} (R^2 + r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_{n-1}^2) \frac{2\pi R}{n}.$$

$$\text{Но } r_1^2 = R^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right); r_2^2 = R^2 \left(1 - \frac{2^2}{n^2}\right); \dots, r_{n-1}^2 = R^2 \left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right).$$

Поэтому

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3}\right] 2\pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

3. Объем шарового слоя, одно изъ оснований котораго есть большой кругъ. Пусть шаровой или сферическій слой ABCD имѣетъ основаниемъ большой кругъ съ діаметромъ $AB=2R$, а высотой $OM=H < R$. Раздѣлимъ высоту H на n равныхъ частей и черезъ точки дѣленій проведемъ плоскости, параллельныя основаніямъ. Такимъ образомъ данный шаровой слой разбивается на n -шаровыхъ слоевъ. Обозначимъ черезъ V_p — объемъ p -го слоя, считая порядкомъ p слоевъ отъ центра шара, черезъ r_{p-1} и r_p — радіусы его оснований. Очевидно, что



$$\pi r_{p-1}^2 \frac{H}{n} > V_p > \pi r_p^2 \frac{H}{n}.$$

$$\text{Но } r_{p-1}^2 = R^2 - \frac{(p-1)^2 H^2}{n^2} \text{ и } r_p^2 = R^2 - \frac{p^2 H^2}{n^2},$$

такъ какъ разстоянія оснований p -го шарового слоя отъ центра шара равны $(p-1) \frac{H}{n}$ и $p \frac{H}{n}$.

Поэтому:

$$\pi \left[R^2 - \frac{(p-1)^2 H^2}{n^2} \right] \frac{H}{n} > V_p > \pi \left[R^2 - \frac{p^2 H^2}{n^2} \right] \frac{H}{n}.$$

Придавая p соответственно значенія 1, 2, 3, ..., n и затѣмъ складывая почленно полученный рядъ неравенствъ, приходимъ, наконецъ, къ окончательному неравенству:

$$\begin{aligned} \pi R^2 H - \pi H^3 \left[\frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} \right] &> V > \pi R^2 H - \\ - \pi H^3 \left[\frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} + \frac{1}{n} \right]. \end{aligned}$$

Если станемъ n —увеличивать безпредѣльно, то первая и третья части двойного неравенства стремятся къ общему предѣлу:

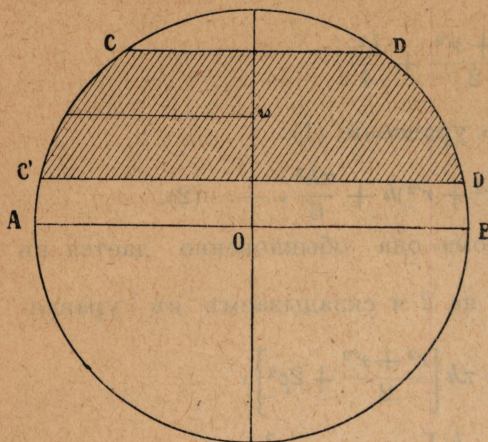
$$\pi R^2 H - \frac{\pi H^3}{3}$$

первая—постоянно уменьшаясь, а третья—постоянно увеличиваясь. Поэтому

$$V = \pi R^2 H - \frac{\pi H^3}{3}.$$

4. Объем шарового слоя. Пусть $CDC'D'$ будет шаровой слой, имѣющей высоту h и радиусы оснований r и r' ; обозначимъ, кромѣ того, черезъ ρ —радиусъ среднего сѣченія слоя и черезъ λ —раз-

стояніе $O\omega$ отъ центра шара до плоскости среднего сѣченія слоя. Если AB —диаметръ большого круга, параллельнаго основаніямъ слоя, то



$$V(CDC'D') = V(ABCD) - \rho V(ABC'D'),$$

гдѣ $\rho = \pm 1$, смотря по тому, будутъ ли плоскости CD и $C'D'$ лежать по одну сторону отъ центра или по разныя стороны отъ него.

Но

$$V(ABCD) = \pi R^2 \left(\lambda + \frac{h}{2} \right) - \frac{\pi}{3} \left(\lambda + \frac{h}{2} \right)^3$$

$$\rho V(ABC'D') = \pi R^2 \left(\lambda - \frac{h}{2} \right) - \frac{\pi}{3} \left(\lambda - \frac{h}{2} \right)^3.$$

Разность ихъ даетъ

$$V(CDC'D') = \pi R^2 h - \frac{\pi}{3} \left(3\lambda^2 h + \frac{h^3}{4} \right) = \pi (R^2 - \lambda^2) h - \frac{\pi h^3}{12}.$$

А такъ какъ $\rho^2 = R^2 - \lambda^2$, то окончательно получимъ:

$$V(CDC'D') = \pi \rho^2 h - \frac{\pi h^3}{12}, \quad (1)$$

формула, данная для шарового слоя Мас-Laurin'омъ ¹⁾.

Изъ этой формулы можно получить еще два другихъ обще-извѣстныхъ вида формулы для вычисленія объема шарового слоя.

Изъ чертежа получаемъ:

$$r^2 = R^2 - \left(\lambda + \frac{h}{2} \right)^2$$

$$r'^2 = R^2 - \left(\lambda - \frac{h}{2} \right)^2.$$

¹⁾ Другой выводъ этой формулы данъ въ книгѣ:

B. Niewenglowski et L. Gérard. Géométrie dans l'espace. Paris 1899, стр. 173.

Складываемъ почленно эти выраженія:

$$r^2 + r'^2 = 2(R^2 - \lambda^2) - \frac{h^2}{2} = 2\rho^2 - \frac{h^2}{2},$$

откуда

$$\rho^2 = \frac{r^2 + r'^2}{2} + \frac{h^2}{4}.$$

Вставляемъ значеніе ρ^2 въ уравненіе (1):

$$V(CDC'D') = \frac{\pi}{2} (r^2 + r'^2)h + \frac{\pi h^3}{6}, \quad (2).$$

формула въ томъ видѣ, въ какомъ она обыкновенно дается въ руководствахъ.

Умножаемъ уравненіе (1) на 2 и складываемъ съ уравненіемъ (2). Тогда получимъ:

$$3V(CDC'D') = \pi h \left[\frac{r^2 + r'^2}{2} + 2\rho^2 \right],$$

откуда

$$V(CDC'D') = \frac{h}{6} [S + S' + 4\sigma], \quad (3)$$

гдѣ S и S' обозначаютъ площади основаній слоя, а σ — площадь его средняго сѣченія.

Примѣчаніе 1. Изъ формулы (1) слѣдуетъ, что объемы шарового слоя и цилиндра, имѣющаго ту же высоту, а основаніемъ среднее сѣченіе слоя, разнятся на половину объема шара, имѣющаго діаметромъ высоту слоя.

Примѣчаніе 2. Формула (3) имѣетъ тотъ же видъ, что и формула, служащая для вычисленія объема призматоида ²⁾.

Кромѣ того, тотъ же видъ имѣютъ формулы, служащія для опредѣленія объемовъ тѣлъ, которыя ограничены двумя параллельными основаніями и такою боковою поверхностью, что площадь сѣченія тѣла плоскостью, параллельною основаніямъ, выражается функціею 2-ой степени ея разстоянія отъ одного изъ основаній.

5. Объемъ сферическаго сегмента найдется, если въ формулѣ (2) или (3) положимъ $r' = 0$ и, слѣдов., $s' = 0$. Поэтому

$$V = \frac{\pi r^2 h}{2} + \frac{\pi h^3}{6} \quad (4)$$

$$V = \frac{h}{6} \cdot (s + 4\sigma).$$

²⁾ Вычисленіе объема призматойдовъ см. книги:

B. Niewenglowski et Gérard. Géométrie dans l'espace. 1899. Paris p. 111.

Rouché et Comberousse, Traité de Géométrie. 6-me édition. Deuxième partie. Paris 1891. p. 88.

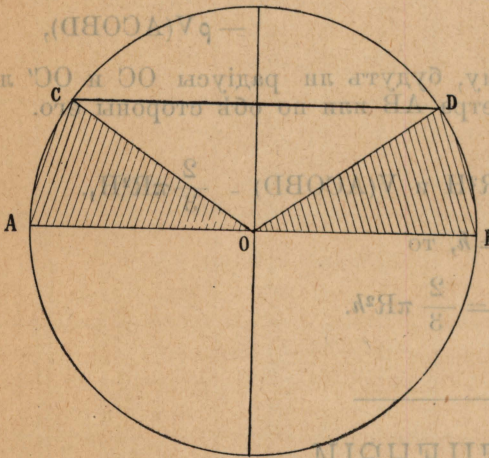
6. Объем сферического сектора 1-го рода. Сферическимъ секторомъ 1-го рода называется тѣло, полученное отъ вращенія кругового сектора около одного изъ своихъ конечныхъ радиусовъ. Очевидно, что для полученія объема этого сектора необходимо къ объему шарового сегмента (4) прибавить объемъ конуса, имѣющаго радиусомъ основанія r , а высотой $R - H$, т. е.

$$V = \left(\frac{\pi r^2 h}{2} + \frac{\pi h^3}{6} \right) + \frac{1}{3} \pi r^2 (R - H).$$

Но $r^2 = H(2R - H)$. Вставляя значеніе r^2 въ предыдущее равенство, получаемъ извѣстную формулу:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H.$$

7. Объем сферического сектора 2-го рода, одинъ изъ конечныхъ радиусовъ котораго перпендикуляренъ къ оси вращенія. Сферическимъ секторомъ 2-го рода называется тѣло, полученное отъ вращенія кругового сектора около діаметра, проходящаго внѣ этого сектора. Какъ видно изъ чертежа, объемъ сферического сектора $ACOB D$ равенъ объему шарового слоя $ABCD$ безъ объема конуса, имѣющаго основаніемъ сѣченіе CD , а высотой—высоту слоя.



$$V(ACOB D) = V(ABCD) - V(COD).$$

Но

$$V(ABCD) = \pi R^2 H - \frac{\pi H^3}{3}$$

$$V(COD) = \frac{\pi r^2 H}{3} = \frac{\pi (R^2 - H^2) H}{3}.$$

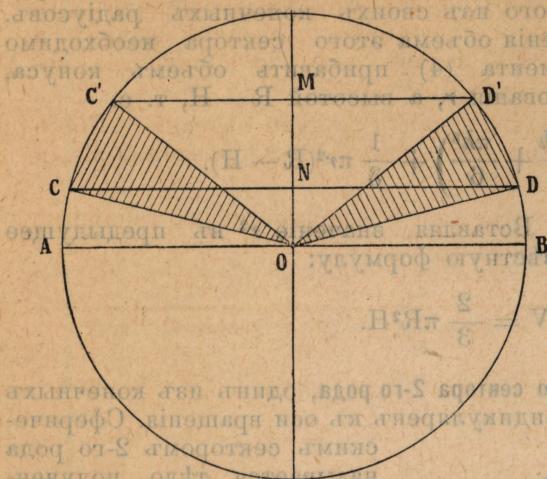
Слѣдовательно,

$$V(ACOB D) = \left(\pi R^2 H - \frac{\pi H^3}{3} \right) - \frac{\pi (R^2 - H^2) H}{3}.$$

Поэтому

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H.$$

8. Объемъ сферическаго сектора 2-го рода. Пусть $CC'ODD'$ сферическій секторъ 2-го рода, имѣющій высоту $MN = h$. Тогда



резъ центръ O шара проводимъ плоскость, перпендикулярную къ оси вращения. Вращая круговые секторы AOC и AOC' около діаметра, получимъ сферическіе секторы $ACOB$ и $AC'OB$, общее основаніе которыхъ перпендикулярно къ оси вращения, а высоты соответственно равны $ON = H_1$ и $OM = H$. Поэтому

$$\begin{aligned} V(CC'ODD') &= \\ &= V(AC'OB) - \\ &= \rho V(ACOB), \end{aligned}$$

гдѣ $\rho = \pm 1$, смотря по тому, будутъ ли радіусы OC и OC' лежать по одну сторону діаметра AB или по обѣ стороны его.

Но

$$V(AC'OB) = \frac{2}{3} \pi R^2 H \text{ и } V(ACOB) = \frac{2}{3} \pi R^2 H_1.$$

А такъ какъ $H - H_1 = h$, то

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

РЕЦЕНЗИИ.

Алгебра. Сборникъ задачъ, предлагавшихся на конкурсныхъ экзаменахъ въ институтахъ: Инженеровъ Путей Сообщенія Горномъ, Технологическомъ и др. Составилъ Владиславъ Вроблевскій. Цѣна 90 коп. С.-П. 1902 года.

Помѣщая краткую рецензію о книгѣ В. Вроблевскаго, я хотѣлъ указать на то, какъ теперь просто и легко можно составить любой сборникъ задачъ по математикѣ: стоитъ только зайти въ публичную библіотеку въ С.-П. или въ другомъ университетскомъ городѣ, обложить себя математическими журналами и книгами (жаль только, что у насъ въ Россіи журналовъ по элементарной математикѣ только одинъ, а между тѣмъ, во Франціи, Германіи и др. имѣется до 4—5), взять по одной задачѣ изъ

каждого №, и у Васъ получится довольно порядочный сборникъ задачъ. Попробуйте, напримѣръ, взять съ 1886 г. журналъ „В. О. Ф.“ и безобиднымъ образомъ возьмите по одной задачѣ, и у Васъ готовъ сборникъ въ 300 задачъ, т. е. то количество, которое имѣется у г. Вроблевскаго.

Но, чтобы книга имѣла ходъ, дайте модное названіе: „Сборникъ задачъ, предлагавшихся на конкурсныхъ экзаменахъ“, и есть полная гарантія на сбытъ.

Въ доказательство вышеизложеннаго я проставляю табличку, по которой составлены задачи г. Вроблевскимъ изъ журнала „В. О. Ф.“

№ Вробл.	№ зад. В. О. Ф.	№ Вробл.	№ зад. В. О. Ф.
1	219 1-я серія	30	427 2-я сер.
2	изъ зад. для ученик.	31	87 3-я сер.
3	275 1-я сер.	32	528 2-я сер.
4	172	33	424
5	123	34	268 2-я сер.
6	316 1-я сер.	35	519 2-я сер.
7	199	36	314 3-я сер.
8	175	37	409 2-я сер.
9	164	38	266
11	239	39	33 2-я сер.
12	262	40	238 2-я сер.
14	114	41	239 1-я сер.
15	332 1-я сер.	42	327
16	84	43	576 2-я сер.
17	162	44	110
18	78 1-я сер.	45	70 2-я сер.
19	180 1-я сер.	46	564 2-я сер.
20	182	47	217 3-я сер.
21	230	48	545
22	460	49	зад. на премію
23	397		при № 52 В. О. Ф.
24	85 2-я сер.	50	203
26	296	51	524 2-я сер.
27	442 2-я сер.	52	2-ой 3-я сер.
28	99	53	148 3-я сер.
29	242 3-я сер.		

Далѣ взяты задачи изъ „В. О. Ф.“

54 (№ 323 „В. О. Ф.“), 55 (№ 325 „В. О. Ф.“), 60 (№ 322 „В. О. Ф.“), 62, 63 , 102, 108, 110, 117, 118 (№ 443 1-я сер.) и т. д.

При бѣгломъ просмотрѣ замѣчено, что г. Вроблевскимъ взято около $\frac{1}{2}$ задачъ, помѣщающихся въ журналъ „В. О. Ф.“, и задачи изъ разныхъ отдѣловъ.

Задачи взяты съ полнымъ рѣшеніемъ, и ни одно выраженіе

не измѣнено, даже при № 110 добавлена историческая замѣтка цѣликомъ изъ № 198 „В. О. Ф.“ стр. 144-я.

Задача же № 49 г. Вроблевскаго, взятая изъ № 52 „В. О. Ф.“, была предложена на премію проф. В. Ермаковымъ.

Смѣло можно сказать, что подобныхъ задачъ, какъ № 49, ни проф. Ермаковъ, ни другой экзаменаторъ не предлагать на конкурснмъ экзаменѣ въ высшее учебное заведеніе.

С. Адамовичъ (Двинскъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Международная Ассоціація Академій. 4-го іюня (н. ст.) текущаго года, по приглашенію президента Международной Ассоціаціи Академій, сэра Michael Forster'a, состоялось комитетское засѣданіе делегатовъ въ Лондонѣ. Главнымъ вопросомъ, обсуждавшимся на этомъ засѣданіи, была подготовка общаго собранія, которое назначено въ Лондонѣ на осень 1904 года. Между предложеніями, которыя будутъ обсуждаться на этомъ собраніи, особеннаго вниманія заслуживаетъ проектъ наблюденія магнитныхъ явленій на многочисленныхъ пунктахъ одного и того же параллельнаго круга; это предпріятіе имѣетъ цѣлью провѣрить основанія, на которыхъ покоится Gauss'ова теорія земнаго магнетизма. (Jahresb. d. D. Math.-Ver.).

Электрическій ударъ при 5500 вольтахъ, не повлекшій смертельнаго исхода. Въ „Neues Wiener Tageblatt“ описанъ рѣдкій случай удара, испытаннаго рабочимъ отъ трехфазной цѣпи въ 5500 вольтъ; разрядъ при этомъ продолжался въ теченіе пяти минутъ и тѣмъ не менѣе рабочій остался живъ. Повидимому, онъ не испыталъ въ результатѣ удара какихъ-либо оставшихся послѣ несчастія серьезныхъ поврежденій за исключеніемъ ожога рукъ, которыя были сожжены настолько сильно, что предполагалась неизбежно ихъ ампутація. Верхній слой кожи на передней и тыльной поверхности костей, рукъ и лѣваго предплечія совершенно отсталъ отъ нижняго слоя и былъ совершенно сожженъ и высохъ. Нижний слой также былъ обожженъ и потерялъ всякую чувствительность. Подошва лѣваго башмака была продырявлена и мѣстами отваливалась. Пострадавшій висѣлъ въ теченіе пяти минутъ на раскаленной проволоцѣ, и присутствовавшіе при этомъ утверждаютъ, что видѣли пламя, исходившее изъ его рукъ и ногъ. Докторъ Еллинекъ, дѣлавшій по этому поводу докладъ въ Австрійскомъ медицинскомъ обществѣ, пришелъ къ заключенію, что черезъ тѣло пострадавшаго проходила въ теченіе пяти минутъ энергія отъ 10 до 12 лош. силъ; но повидимому при этомъ вычисленіи въ недостаточной степени принято во вниманіе весьма

высокое сопротивление сожженной кожи и кожаных подошв башмаков. Какъ бы то ни было тотъ фактъ, что, человекъ, испытавъ подобный ударъ, можетъ остаться живымъ, представляется весьма замѣчательнымъ.

(„Электро-Техн. Вѣстн.“).

Новый способъ телеграфирования безъ проводовъ. Американскіе журналы сообщаютъ намъ, что Маркони нашелъ новый способъ телеграфирования безъ проволоки, обходясь безъ высокихъ мачтъ или башенъ для помѣщенія безпроводочнаго аппарата.

Нынѣ депеши, которыя были обмѣнены между кораблями, будутъ отправляться на уровнѣ воды, въ другихъ же случаяхъ аппаратъ будетъ помѣщаемъ на высотѣ обыкновеннаго стола.

Этотъ новый способъ имѣетъ, кромѣ того, по отзывамъ, то преимущество, что препятствуетъ перехватыванію телеграммъ въ пути.

Телеграфированіе безъ проводовъ во время хода поѣзда. Недавно достигнуты благопріятные результаты телеграфирования безъ проводовъ между поѣздомъ шедшимъ со станціи Маріенфельде въ Ренгсдорфъ. Успѣхъ даетъ надежду, что эта система будетъ примѣняться въ скоромъ времени многими государствами.

(„Почтово-Телегр. Ж.“).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія вѣсѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 382 (4 сер.). Даны двѣ параллели и внѣ ихъ двѣ точки A и B . Изъ точки A провести сѣкущую, встрѣчающую параллели въ точкахъ X и Y такъ, чтобы площадь XBY была данной величины.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 383 (4 сер.). Доказать, что

$$\left(1 + \sqrt[3]{\operatorname{tg} \omega}\right) \left(1 + \sqrt[3]{\operatorname{tg} \omega_1}\right) = 2,$$

гдѣ ω — уголъ между медианой и биссекторомъ, проведенными изъ вершины одного изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника, а ω_1 — уголъ между аналогичными прямыми, проходящими черезъ вершину другого острого угла.

Ев. Григорьевъ (Казань).

№ 384 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{(5-x)^5 + (x-2)^5}{(5-x)^3 + (x-2)^3} = 3(5-x)(x-2).$$

Л. Ямольскій (Braunschweig).

№ 385 (4 сер.). Решить уравнение

$$\sqrt[3]{76+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{76-\sqrt{x}} = 8.$$

Г. Кривичкий (Кременчуг).

№ 386 (4 сер.). Показать, что

$$a^3 + b^3 \geq \frac{(a+b)^3}{4},$$

если

$$a + b \geq 0,$$

где a и b — вещественные числа.

В. Тюнин (Уфа).

№ 387 (4 сер.). Некоторый предмет, высотой в 2 метра, расположен в 6 метрах от собирающей чечевицы, главное фокусное расстояние которой равно 30 сантиметрам. Определить: 1) расстояние x изображения от чечевицы и 2) величину u этого изображения.

(Займств.) М. Гербановский.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

№ 288 (4 сер.). Вокруг круга радиуса R построены n равных окружностей, касающихся последовательно между собой и данного круга; определить 1) радиус каждой из этих окружностей и 2) предель, к которому стремится отношение суммы окружностей этих кругов к окружности данного круга при бесконечном возрастании n .

Называя центр круга радиуса R через O , центры n равных окружностей последовательно через $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ и обозначая радиус каждой из этих окружностей через x , находим: $O_1O_2 = O_2O_3 = \dots = O_nO_1 = 2x$, $OO_1 = OO_2 = \dots = OO_n = R + x$, откуда вытекает, что многоугольник $O_1O_2 \dots O_n$, будучи равносторонним и при том вписанным в круг радиуса $R + x$, оказывается правильным, так что $\angle O_1O_2 = \frac{2\pi}{n}$.

Следовательно,

$$\frac{O_1O_2}{2} = OO_1 \sin \frac{\angle O_1O_2}{2}, \text{ или } x = (R + x) \sin \frac{\pi}{n},$$

откуда

$$x = \frac{R \sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n}} \quad (1).$$

Сумма окружностей кругов $O_1O_2 \dots O_n$ равна (см. (1))

$$2\pi n x = \frac{2\pi R n \sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{2\pi^2 R \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n}} \quad (2).$$

Предель знаменателя $1 - \sin \frac{\pi}{n}$ (см. (2)) при бесконечном возрастании

ни n равенъ 1; предѣлъ числителя $2\pi^2 R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$ равенъ $2\pi^2 R$, такъ какъ при

безконечномъ возрастаніи n уголъ $\frac{\pi}{n}$ стремится къ 0, а потому, по из-

вѣстной теоремѣ, дробь $\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$ стремится къ предѣлу, равному 1. Итакъ

искомый предѣлъ равенъ $2\pi^2 R$. Вторую часть задачи можно также рѣшить, доказавши предварительно, что периметръ $2n\pi$ многоугольника $O_1 O_2 \dots O_n$ стремится при безконечномъ возрастаніи n къ предѣлу, равному длинѣ окружности $2\pi R$ круга O , откуда слѣдуетъ, что сумма длинъ окружностей O_1, O_2, \dots, O_n , равная $n \cdot 2\pi x = \pi \cdot (2n\pi)$, стремится къ предѣлу $2\pi^2 R$.

Я. Сыченко (Орелъ); Г. Огановъ (Эривань); А. Занжигъ (Оама); Н. Плотицкий (Одесса).

№ 311 (4 сер.). Преобразовать выраженіе

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi + \cos^2 2\varphi)}$$

въ другое, не содержащее радикала.

Сдѣлаемъ рядъ слѣдующихъ преобразованій даннаго выраженія:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2}(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi + \cos^2 2\varphi)} &= \sqrt{\frac{1}{2}[\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \cos^4 \varphi \left[1 + \operatorname{tg}^4 \varphi + \left(\frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right)^2 \right]} = \\ &= \cos^2 \varphi \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{tg}^4 \varphi + \left(\frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)^2 \right]} = \\ &= \cos^2 \varphi \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{tg}^4 \varphi + (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 \right]} = \\ &= \cos^2 \varphi \sqrt{\frac{1}{2} [1 + \operatorname{tg}^4 \varphi + (1 - \operatorname{tg}^4 \varphi)]} = \\ &= \cos^2 \varphi \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^4 \varphi + 1 - 4\operatorname{tg}^4 \varphi + 6\operatorname{tg}^8 \varphi - 4\operatorname{tg}^{12} \varphi + \operatorname{tg}^{16} \varphi)} = \\ &= \cos^2 \varphi \sqrt{x^{16} - 2x^{12} + 3x^8 - 2x^4 + 1} \quad (1), \end{aligned}$$

гдѣ положено $x = \operatorname{tg} \varphi$.

Но изъ многочлена $x^{16} - 2x^{11} + 2x^8 - 2x^4 + 1$ извлекается по известному правилу корень квадратный безъ остатка, и въ результатъ получается $x^8 - x^4 + 1$. Поэтому (см. (1))

$$\sqrt{\frac{1}{2} (\cos^{16}\varphi + \sin^{16}\varphi + \cos^4 2\varphi)} = \cos^8 \varphi (\operatorname{tg}^8 \varphi - \operatorname{tg}^4 \varphi + 1) = \\ = \sin^8 \varphi - \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi + \cos^8 \varphi.$$

Л. Ямольскій (Braunschweig); И. Плотникъ (Одесса); Г. Огановъ (Эривань).

№ 317 (4 сер.). Дана окружность и на ней точка А. Провести через точку А хорду такъ, чтобы опущенный на нее изъ данной точки В перпендикуляръ дѣлилъ ее въ данномъ отношеніи.

Пусть АС—искомая хорда, D—основаніе опущеннаго на нее изъ точки В перпендикуляра, О—центръ окружности, М—середина хорды, $\frac{m}{n}$ —данное отношеніе $\frac{AD}{DC}$. Предположимъ сперва, что точка D дѣлитъ хорду АС въ данномъ отношеніи внутреннимъ образомъ. Тогда

$$\frac{AD + DC}{AD} = \frac{AC}{AD} = \frac{m + n}{m},$$

$$\frac{AD + DC}{2} : AD = \frac{AM}{AD} = \frac{m + n}{2m} \quad (1).$$

Пусть X—точка встрѣчи прямыхъ BD и AO, которыя навѣрно пересекутся, такъ какъ хорда АС не перпендикулярна къ радіусу OA; такъ какъ $OM \perp AC$, то (см. (1))

$$\frac{AO}{AX} = \frac{AM}{AD} = \frac{m + n}{2m} \quad (2).$$

Отсюда вытекаетъ построеніе. Соединивъ прямой точку А съ центромъ О, строимъ точку X (см. (2)), удовлетворяющую равенству $\frac{AO}{AX} = \frac{m + n}{2m}$; затѣмъ проводимъ прямую BX и строимъ хорду АС, перпендикулярную къ BX. Если бы дѣленіе отрезка АС точкой D было внешнее, то, рассуждая подобнымъ же образомъ, мы нашли бы, что точка X удовлетворяетъ условію $\frac{AO}{AX} = \frac{m - n}{2m}$ (полагая $m > n$). Если точки В и X совпадаютъ, задача становится неопредѣленной, т. е. условію задачи удовлетворяетъ всякая хорда, проходящая черезъ точку А.

Л. Ямольскій (Одесса); Я. Дубиновъ (Одесса); Н. С. (Одесса).

Обложка
щется

Обложка
щется