Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXX Сем. № 3.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
элементарной математики.

15 Августа № 351. 1903 г.

Содержаніе: Основанія геометрической теоріи кватерніоновъ. *Дм. Ефремова.* — Электрическая звучащая труба. *Г. Э. Пфлаума.* — Опыты и приборы: Матеріалы для ученическихъ работъ въ физическихъ кабинетахъ. *Эр. Шпачинскаго.* — Научная хроника: Конгрессъ исторіи науки въ 1906 году. Вторая международная сейсмологическая конференція. Конференція по вопросу о стрѣльбѣ для предотвращенія непогоды. — Рецензіи: Д. Горячевъ и А. Воронецъ. „Задачи, вопросы и софизмы для любителей математики". *Н. Парфентьева.* — Задачи для учащихся, №№ 370—375 (4 сер.). — Рѣшенія задачъ, №№ 291, 300, 301, 302, 307. — Поправки. — Объявленія.

ОСНОВАНІЯ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ
КВАТЕРНІОНОВЪ.

Дм. Ефремова (Иваново-Вознесенскъ).

(*Продолженіе* *).

Примѣры.

Слѣдующіе примѣры служатъ для объясненія, какимъ образомъ можно пользоваться теоріей векторовъ для доказательства геометрическихъ теоремъ.

I. *Діагонали параллелограмма въ точкѣ пересѣченія ихъ дѣлятся пополамъ.*

Обозначимъ чрезъ O точку пересѣченія діагоналей парралле-

*) См. № 350 „Вѣстника".

лограмма ABCD (фиг. 6). Разсматривая стороны и діагонали какъ векторы, получимъ:

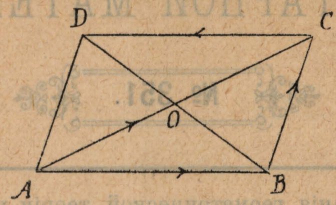
$$\overline{AO} = x . \overline{AC}, \quad \overline{BO} = y . \overline{BD},$$

гдѣ x и y неизвѣстныя алгебраическія количества; но

$$\overline{AO} = \overline{AB} + \overline{BO};$$

поэтому

$$x . \overline{AC} = \overline{AB} + y . \overline{BD}.$$



Фиг. 6.

Такъ какъ

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

и

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BC} - \overline{AB},$$

то послѣднее равенство представляется въ видѣ:

$$x . (\overline{AB} + \overline{BC}) = \overline{AB} + y . (\overline{BC} - \overline{AB}),$$

или

$$(x + y - 1) . \overline{AB} + (x - y) . \overline{BC} = 0;$$

отсюда ур-нія (14)

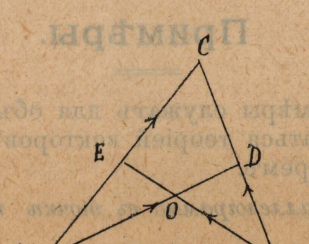
$$x + y - 1 = 0 \text{ и } x - y = 0,$$

изъ которыхъ слѣдуетъ, что

$$x = y = \frac{1}{2};$$

значитъ, $AO = \frac{1}{2} AC$ и $BO = \frac{1}{2} BD$, что и требовалось доказать.

II. *Медіаны тр-ка пересѣкаются въ одной точкѣ, въ которой каждая изъ нихъ дѣлится въ отношеніи 2 : 1, считая отъ вершинъ тр-ка.*



Фиг. 7.

Обозначимъ чрезъ O точку пересѣченія медіанъ AD и BE тр-ка ABC.

Разсматривая стороны и медiаны тр-ка какъ векторы и полагая $\overline{AB}=\overline{B}$, $\overline{AC}=\overline{C}$ и $\overline{BC}=\overline{M}$, вслѣдствiе равенствъ

$$\overline{BD}=\overline{DC} \text{ и } \overline{AE}=\overline{EC},$$

получимъ (22):

$$\overline{AD}=\frac{\overline{B}+\overline{C}}{2},\ \overline{BE}=\frac{\overline{BC}+\overline{BA}}{2}=\frac{\overline{M}-\overline{B}}{2};$$

поэтому

$$\overline{AO}=x\,.\,\overline{AD}=\frac{x}{2}(\overline{B}+\overline{C})$$

и

$$\overline{BO}=y\,.\,\overline{BE}=\frac{y}{2}(\overline{M}-\overline{B});$$

но

$$\overline{AO}+\overline{OB}=\overline{B},$$

или

$$\overline{AO}-\overline{BO}=\overline{B};$$

слѣдовательно,

$$\frac{x}{2}\cdot(\overline{B}+\overline{C})-\frac{y}{2}(\overline{M}-\overline{B})=\overline{B};$$

исключивъ отсюда $\overline{M}$, на основанiи равенства

$$\overline{B}+\overline{M}=\overline{C} \text{ или } \overline{M}=\overline{C}-\overline{B},$$

получимъ:

$$\frac{x}{2}\cdot(\overline{B}+\overline{C})-\frac{y}{2}\cdot(\overline{C}-2\overline{B})=\overline{B},$$

или

$$\left(\frac{x}{2}+y-1\right)\cdot\overline{B}+\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\cdot\overline{C}=0;$$

отсюда (14):

$$\frac{x}{2}+y-1=0 \text{ и } \frac{x}{2}-\frac{y}{2}=0;$$

изъ этихъ уравненiй находимъ, что

$$x=y=\frac{2}{3},$$

т. е., что $\frac{AO}{OD}=\frac{BO}{OE}=2$, что и требовалось доказать.

III. *Прямыя, соединяющiя средины противоположныхъ сторонъ четыреугольника, и прямая, соединяющая средины его дiагоналей, пересѣкаются въ одной точкѣ и взаимно дѣлятся пополамъ.*

Пусть E, F, G, H, K, L суть средины сторонъ и дiагоналей четыреугольника ABCD (фиг. 8). Соединимъ произвольную точку O съ вершинами этого четыреугольника и положимъ

$$\overline{OA}=\overline{A},\quad \overline{OB}=\overline{B},\quad \overline{OC}=\overline{C},\quad \overline{OD}=\overline{D},$$

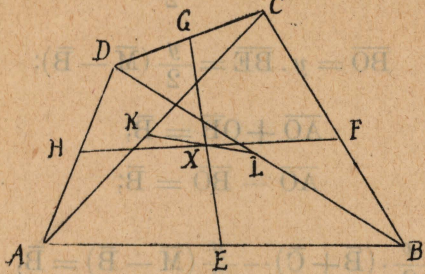
Такъ какъ (22)

$$\overline{OE} = \frac{\bar{A} + \bar{B}}{2} \text{ и } \overline{OG} = \frac{\bar{C} + \bar{D}}{2},$$

то, обозначивъ чрезъ X средину отрѣзка EG, получимъ:

$$\overline{OX} = \frac{\overline{OE} + \overline{OG}}{2} = \frac{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}}{4};$$

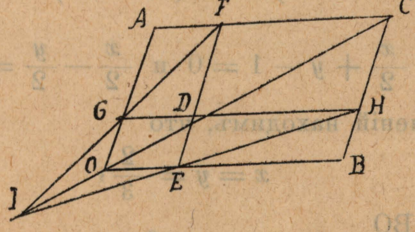
отсюда видно, что средина прямой EG совпадаетъ со среднею



Фиг. 8.

точкою вершинъ четыреугольника (24). Такимъ же способомъ можно убѣдиться, что этимъ свойствомъ обладаютъ и средины прямыхъ FH и KL; слѣдовательно, теорема доказана.

IV. *Если чрезъ какую-нибудь точку D, взятую внутри параллелограмма OACB (фиг. 9) провести прямыя EF и GH, параллельныя его сторонамъ OA и OB, то діагонали параллелограммовъ OC, EH и GF пересѣкутся въ одной точкѣ.*



Фиг. 9.

Обозначимъ векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ чрезъ $\bar{A}$ и $\bar{B}$ и положимъ

$$\overline{OG} = m.\bar{A}, \quad \overline{OE} = n.\bar{B}.$$

Если OC и GF пересѣкаются въ точкѣ I, то, положивъ

$$\overline{GI} = x.\overline{GF}, \quad \overline{IO} = y.\overline{OC}$$

и замѣтивъ, что

$$\overline{OG} + \overline{GI} = \overline{IO},$$

получимъ:

$$\overline{OG} + x.\overline{GF} = y.\overline{OC};$$

но

$$\overline{OG} = m.\overline{A}, \ \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{A} + \overline{B}$$

и

$$\overline{GF} = \overline{GD} + \overline{DF} = \overline{OE} + \overline{GA} = n.\overline{B} + (1-m).\overline{A};$$

слѣдовательно,

$$m.\overline{A} + x.[n.\overline{B} + (1-m).\overline{A}] = y.(\overline{A} + \overline{B}),$$

или

$$[m + x.(1-m) - y].\overline{A} + (nx - y).\overline{B} = 0;$$

отсюда уравненія (14):

$$(1-m)x - y + m = 0, \quad nx - y = 0;$$

рѣшивъ ихъ, найдемъ, что

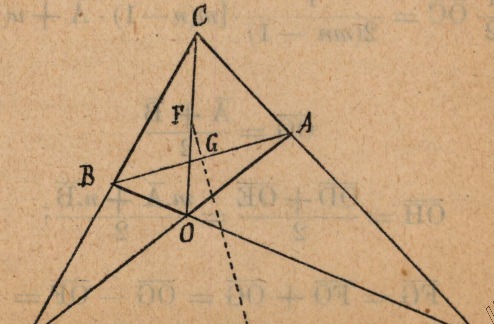
$$y = \frac{mn}{m + n - 1}.$$

Такимъ образомъ,

$$\overline{IO} = \frac{mn}{m + n - 1} \cdot \overline{OC}.$$

Обозначивъ пересѣченіе OC и EH чрезъ I′ и положивши $\overline{OI'} = y' \cdot \overline{OC}$, нашли бы, что $y' = y$; слѣдовательно, I′ совпадаетъ съ I, что и треб. доказ.

V. *Средины трехъ діагоналей полнаго четыреугольника находятся на одной прямой.* (Фиг. 10).



Фиг. 10.

Пусть F, G, H суть средины діагоналей OC, AB и ED полнаго четыреугольника OACBED. Положивъ $\overline{OA} = \overline{A}$, $\overline{OB} = \overline{B}$,

$$\overline{OE} = m.\overline{A}, \ \overline{OD} = n.\overline{B}, \ \overline{AC} = x.\overline{AD}, \ \overline{BC} = y.\overline{BE},$$

и замѣтивъ, что

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OB} + \overline{BC},$$

получимъ:

$$\overline{A} + x.\overline{AD} = \overline{B} + y.\overline{BE};$$

но

$$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{A} = n.\overline{B} - \overline{A}$$

и

$$\overline{BE} = \overline{OE} - \overline{B} = m.\overline{A} - \overline{B};$$

поэтому предыдущее равенство принимаетъ видъ:

$$\overline{A} + x.(n.\overline{B} - \overline{A}) = \overline{B} + y.(m.\overline{A} - \overline{B}),$$

или

$$(1-x-my).\overline{A} + (nx+y-1).\overline{B} = 0;$$

отсюда уравненія

$$x + my - 1 = 0 \quad \text{и} \quad nx + y - 1 = 0,$$

изъ которыхъ находимъ, что

$$x = \frac{m-1}{mn-1}, \quad y = \frac{n-1}{mn-1};$$

слѣдовательно,

$$\overline{OC} = \overline{A} + x.(n.\overline{B} - \overline{A}) =$$

$$= \frac{m(n-1)}{mn-1} \cdot \overline{A} + \frac{n(m-1)}{mn-1} \cdot \overline{B}$$

и

$$\overline{OF} = \frac{1}{2}\,\overline{OC} = \frac{1}{2(mn-1)} \cdot [m(n-1) \cdot \overline{A} + n(m-1)\overline{B}];$$

кромѣ того,

$$\overline{OG} = \frac{\overline{A} + \overline{B}}{2}$$

и

$$\overline{OH} = \frac{\overline{OD} + \overline{OE}}{2} = \frac{m.\overline{A} + n.\overline{B}}{2};$$

поэтому

$$\overline{FG} = \overline{FO} + \overline{OG} = \overline{OG} - \overline{OF} =$$

$$= \frac{1}{2(mn-1)} \cdot [(m-1) \cdot \overline{A} + (n-1) \cdot \overline{B}]$$

и

$$\overline{GH} = \overline{GO} + \overline{OH} = \overline{OH} - \overline{OG} =$$

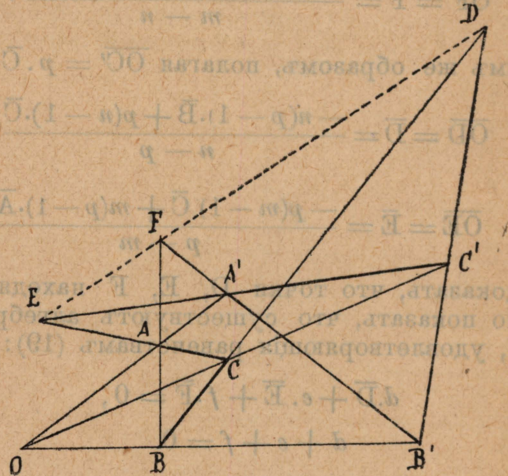
$$= \frac{1}{2}\,[(m-1) \cdot \overline{A} + (n-1) \cdot \overline{B}];$$

изъ этихъ равенствъ видно, что

$$\overline{GH} = (mn-1).\overline{FG};$$

значитъ, векторы $\overline{FG}$ и $\overline{GH}$ направлены по одной прямой, что и требовалось доказать.

VI. *Если три прямыя, соединяющія соотвѣтственныя вершины двухъ треугольниковъ, пересѣкаются въ одной точкѣ, то три точки пересѣченія соотвѣтственныхъ сторонъ этихъ треугольниковъ находятся на одной прямой.*



Фиг. 11.

Допустимъ, что прямыя AA', BB', CC', соединяющія вершины треугольниковъ ABC и A'B'C', пересѣкаются въ одной точкѣ O (фиг. 11). Положивъ $\overline{OA}=\overline{A}$, $\overline{OB}=\overline{B}$, $\overline{OC}=\overline{C}$, $\overline{OD}=\overline{D}$, ...

$$\overline{OA'}=m.\overline{A},\ \overline{OB'}=n.\overline{B},\ \overline{AF}=z.\overline{BA},\ \overline{A'F}=z'.\overline{B'A'},$$

гдѣ F, D и E суть точки пересѣченія сторонъ AB и A'B', BC и B'C', AC и A'C', получимъ:

$$\overline{OF}=\overline{F}=\overline{OA}+\overline{AF}=\overline{A}+z.\overline{BA}=$$

$$=\overline{OA'}+\overline{A'F}=m.\overline{A}+z'\overline{B'A'};$$

но $$\overline{BA}=\overline{A}-\overline{B} \text{ и } \overline{B'A'}=\overline{A'}-\overline{B'}=m.\overline{A}-n.\overline{B};$$

слѣдовательно,

$$\overline{F}=\overline{A}+z.(\overline{A}-\overline{B})=m\overline{A}+z'.(m.\overline{A}-n.\overline{B})$$

и $$[1+z-m(1+z')].\overline{A}-(z-nz').\overline{B}=0;$$

отсюда уравненія:

$$z - mz' - (m-1) = 0 \text{ и } z - nz' = 0,$$

изъ которыхъ найдемъ, что

$$z = \frac{n(m-1)}{n-m};$$

подставивъ это выраженіе вмѣсто z въ равенство

$$\overline{OF} = \overline{F} = \overline{A} + z.(\overline{A} - \overline{B}),$$

получимъ:

$$\overline{OF} = \overline{F} = \frac{-m(n-1).\overline{A} + n(m-1).\overline{B}}{m-n}.$$

Подобнымъ же образомъ, полагая $\overline{OC'} = p.\overline{C}$, найдемъ, что

$$\overline{OD} = \overline{D} = \frac{-n(p-1).\overline{B} + p(n-1).\overline{C}}{n-p}$$

и

$$\overline{OE} = \overline{E} = \frac{-p(m-1)\,\overline{C} + m(p-1).\overline{A}}{p-m}.$$

Чтобы доказать, что точки D, E, F находятся на одной прямой, нужно показать, что существуютъ алгебраическія количества d, e, f, удовлетворяющія равенствамъ (19):

$$d.\overline{D} + e.\overline{E} + f.\overline{F} = 0,$$

$$d + e + f = 0.$$

Но, подставивъ въ первое изъ этихъ равенствъ найденныя выраженія для $\overline{D}$, $\overline{E}$, $\overline{F}$, получимъ:

$$\left[\frac{m(p-1)}{p-m}.e - \frac{m(n-1)}{m-n}.f\right].\overline{A} +$$

$$+\left[\frac{n(m-1)}{m-n}.f - \frac{n(p-1)}{n-p}.d\right].\overline{B} +$$

$$+\left[\frac{p(n-1)}{n-p}.d - \frac{p(m-1)}{p-m}.e\right].\overline{C} = 0.$$

Это равенство должно удовлетворяться независимо отъ $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$; поэтому коэффиціенты при $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ равны нулю; изъ этого слѣдуетъ, что

$$\frac{d}{(n-p)(m-1)} = \frac{e}{(p-m)(n-1)} = \frac{f}{(m-n)(p-1)}.$$

Такимъ образомъ, можно принять

$$d=(n-p)(m-1),$$

$$e=(p-m)(n-1),$$

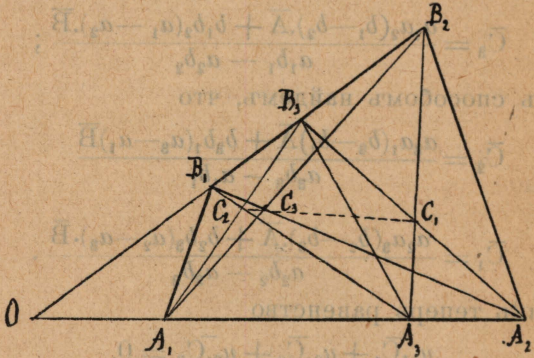
$$f=(m-n)(p-1);$$

сложивъ эти равенства, увидимъ, что

$$d+e+f=0;$$

слѣдовательно, теорема доказана.

VII. *Если данный четыреугольникъ дѣлится прямою на два другихъ четыреугольника, то точки пересѣченія діагоналей этихъ четыреугольниковъ и даннаго находятся на одной прямой.*



Фиг. 12.

Положимъ, что четыреугольникъ $A_1A_2B_2B_1$ дѣлится прямою A_3B_3 на четыреугольники $A_1A_3B_3B_1$ и $A_2A_3B_3B_2$, и обозначимъ чрезъ C_3, C_2, C_1 точки пересѣченія діагоналей этихъ четыреугольниковъ и чрезъ O—точку пересѣченія прямыхъ A_1A_2 и B_1B_2 (фиг. 12). Взявъ какіе-нибудь векторы $\overline{A}$ и $\overline{B}$, параллельные прямымъ A_1A_2 и B_1B_2, положимъ

$$\overline{OA_1}=a_1.\overline{A},\quad \overline{OA_2}=a_2.\overline{A},\quad \overline{OA_3}=a_3.\overline{A},$$

$$\overline{OB_1}=b_1.\overline{B},\quad \overline{OB_2}=b_2.\overline{B},\quad \overline{OB_3}=b_3.\overline{B}.$$

Положивъ затѣмъ

$$\overline{A_1C_3}=x.\overline{A_1B_2},\quad \overline{B_1C_3}=y.\overline{B_1A_2},$$

на основаніи равенствъ

$$\overline{OC_3}=\overline{OA_1}+\overline{A_1C_3}=\overline{OB_1}+\overline{B_1C_3}\,,$$

получимъ

$$\overline{OC_3}=\overline{OA_1}+x.\overline{A_1B_2}=\overline{OB_1}+y.\overline{B_1A_2}\,;$$

но

$$\overline{A_1B_2}=\overline{OB_2}-\overline{OA_1}=b_2.\overline{B}-a_1.\overline{A}$$

и
$$\overline{B_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OB_1} = a_2.\overline{A} - b_1.\overline{B};$$
поэтому
$$\overline{OC_3} = \overline{C}_3 = a_1.\overline{A} + x.(b_2\overline{B} - a_1.\overline{A}) = b_1.\overline{B} + y.(a_2.\overline{A} - b_1\overline{B})$$
и
$$(a_1 - xa_1 - ya_2).\overline{A} - (b_1 - xb_2 - yb_1)\,\overline{B} = 0;$$
отсюда уравненія
$$a_1 - xa_1 - ya_2 = 0,\quad b_1 - xb_2 - yb_1 = 0,$$
изъ которыхъ находимъ, что
$$x = \frac{b_1(a_1 - a_2)}{a_1b_1 - a_2b_2};$$
слѣдовательно,
$$\overline{C}_3 = a_1.\overline{A} + \frac{b_1(a_1 - a_2)}{a_1b_1 - a_2b_2}.(b_2\overline{B} - a_1\overline{A}),$$
или
$$\overline{C}_3 = \frac{a_1a_2(b_1 - b_2).\overline{A} + b_1b_2(a_1 - a_2).\overline{B}}{a_1b_1 - a_2b_2};$$
аналогичнымъ способомъ найдемъ, что
$$\overline{C}_2 = \frac{a_3a_1(b_3 - b_1)\overline{A} + b_3b_1(a_3 - a_1)\overline{B}}{a_3b_3 - a_1b_1}$$
и
$$\overline{C}_1 = \frac{a_2a_3(b_2 - b_3).\overline{A} + b_2b_3(a_2 - a_3).\overline{B}}{a_2b_2 - a_3b_3}.$$

Допустивъ теперь равенство
$$u_1.\overline{C}_1 + u_2.\overline{C}_2 + u_3.\overline{C}_3 = 0,$$
подставимъ въ него найденныя выраженія для $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, $\overline{C}_3$ и приравняемъ нулю коэффиціенты при $\overline{A}$ и $\overline{B}$; получимъ уравненія
$$\frac{a_2a_3(b_2 - b_3)}{a_2b_2 - a_3b_3}\cdot u_1 + \frac{a_3a_1(b_3 - b_1)}{a_3b_3 - a_1b_1}\cdot u_2 + \frac{a_1a_2(b_1 - b_2)}{a_1b_1 - a_2b_2}\cdot u_3 = 0,$$
$$\frac{b_2b_3(a_2 - a_3)}{a_2b_2 - a_3b_3}\cdot u_1 + \frac{b_3b_1(a_3 - a_1)}{a_3b_3 - a_1b_1}\cdot u_2 + \frac{b_1b_2(a_1 - a_2)}{a_1b_1 - a_2b_2}\cdot u_3 = 0,$$
которыя, очевидно, удовлетворяются при
$$u_1 = a_1b_1.(a_2b_2 - a_3b_3),$$
$$u_2 = a_2b_2.(a_3b_3 - a_1b_1),$$
$$u_3 = a_3b_3.(a_1b_1 - a_2b_2),$$
при чемъ
$$u_1 + u_2 + u_3 = 0;$$
слѣдовательно, точки C_1, C_2, C_3 находятся на одной прямой (19).

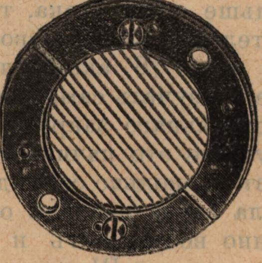
(Продолженіе слѣдуетъ).

Электрическая звучащая труба.

Г. Э. Пфлаума.

Описываемый ниже акустическій приборъ даетъ возможность получать тоны при помощи электрически нагрѣтой проволоки; назовемъ его для краткости *электрическою (звучащею) трубою.* Приборъ этотъ послужилъ уже для ряда опытовъ, когда я при просмотрѣ соотвѣтствующей литературы узналъ, что возбужденіе тоновъ такимъ же образомъ удалось уже давно профессору Лейденскаго университета *P. L. Rijke* (см. Pogg. Ann. 107 р. 339—343). При подробномъ описаніи опытовъ съ проволоками, накаленными при помощи пламенъ спирта, водорода и окиси углерода, проф. Rijke, однако, своего аппарата для полученія тоновъ съ электрически нагрѣтыми проволоками вовсе не описываетъ, а сообщаетъ только, что пользовался 30-ти парною батареею изъ элементовъ Grove, соединенныхъ въ 10 группъ. Въ виду этого обстоятельства, позволяю себѣ дать описаніе прибора, построеннаго мною въ прошломъ году, и сообщить нѣсколько простыхъ опытовъ, сдѣланныхъ съ нимъ.

1. Главная часть электрической трубы—это платиновая проволока (фиг. 1), обогнутая такъ, чтобы отдѣльныя ея части ле-



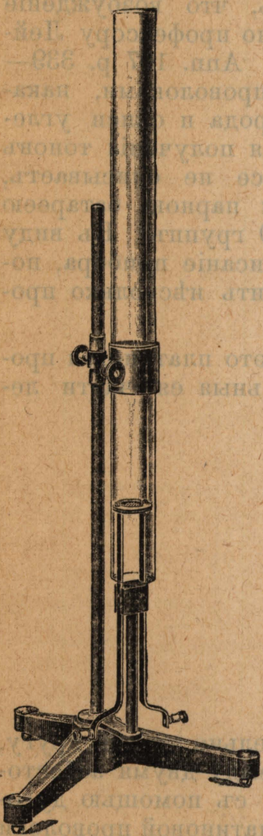
Фиг. 1.

жали въ одной и той же плоскости, параллельно другъ другу, образуя рѣшетку. Вся проволока натянута между двумя азбестовыми кольцами, прижатыми одно къ другому съ помощью дугообразныхъ латунныхъ полосъ. Къ концамъ платиновой проволоки придѣланы двѣ широкія мѣдныя полоски, въ которыя ввинчиваются винты для соединенія съ проволоками отъ батареи. На весь этотъ прикрѣпленный къ треножнику снарядъ (фиг. 2) надѣвается стеклянная трубка, движущаяся внутри муфты, которая, съ своей стороны, можетъ быть передвигаема вдоль желѣзнаго стержня, ввинченнаго также въ упомянутый треножникъ. (Длина стеклянной трубки 497 mm., внутренній ея діаметръ 34 mm.).

2. При употребленіи восьмипарной батареи изъ аккумуляторовъ проволочная рѣшетка накаливается до желтаго каленія; сила тока при этомъ 7,1 amp. Трубка издаетъ при этихъ усло-

віяхъ довольно сильный тонъ, начинающійся черезъ секунду послѣ замыканія тока и сохраняющій, вообще, постоянную силу и высоту. Послѣ размыканія цѣпи звукъ продолжается еще около секунды.

3. При силѣ тока, меньшей трехъ амперъ, получить звука не удалось. Наименьшая сила тока, при которой получился весьма слабый и кратковременный звукъ, равнялась при моихъ опытахъ 3,8 amp. (токъ отъ 4 аккумуляторовъ); при этомъ слѣдовало держать закрытымъ верхній конецъ трубки во время прохожденія тока черезъ платиновую рѣшетку въ теченіе нѣсколькихъ секундъ, а затѣмъ быстро открыть трубку. Возникновеніе звука, очевидно, находится въ зависимости отъ разности температуръ рѣшетки и окружающаго воздуха; точное опредѣленіе этой разности пока не было сдѣлано по недостатку надлежащихъ приборовъ. При закрытой трубкѣ выходящій потокъ нагрѣтаго воздуха останавливается, вслѣдствіе чего и рѣшетка можетъ нагрѣваться сильнѣе и можетъ принять ту разность температуры противъ внѣшняго воздуха, которая, согласно сказанному, необходима для возникновенія звука. Чѣмъ больше сила тока, тѣмъ сильнѣе и продолжительнѣе вообще возникающій звукъ. При 5,7 amp. (6 аккумуляторовъ) трубка начинаетъ звучать самостоятельно, т. е. безъ предварительнаго закрыванія ея верхняго конца; звучаніе это начинается, однако, только черезъ нѣсколько секундъ послѣ замыканія тока. Сила звука вначалѣ очень мала, она постепенно возрастаетъ и становится, наконецъ, постоянною. Рѣшетка при этихъ условіяхъ не накаливается, а остается вполнѣ темною.



Фиг. 2.

4. Всякій разъ, какъ закрывается верхній конецъ трубки, сила электрическаго тока падаетъ на нѣсколько десятыхъ ампера и тѣмъ сильнѣе, чѣмъ больше она была до закрыванія трубки. Это явленіе объясняется тѣмъ, что гальваническое сопротивленіе рѣшетки при закрытой трубкѣ увеличивается. Закрытая хотя бы съ одного конца трубка звука не издаетъ.

5. Электрическая труба звучитъ не только въ вертикальномъ положеніи, но и въ сильно наклонномъ. Если её наклонять во время звучанія, то издаваемый ею звукъ исчезаетъ только при углѣ въ 10—15° между горизонтомъ и осью трубки. Если же, наоборотъ, переводить трубку изъ горизонтальнаго по-

ложенія въ вертикальное, то она начинаетъ звучать при гораздо большемъ углѣ наклоненія ея оси къ горизонту, равномъ приблизительно 25^{0}.

6. Передвигая рѣшетку внутри трубки, легко убѣдиться, что ея положеніе вліяетъ какъ на возникновеніе, такъ и на силу и высоту звука Звукъ удается получить особенно легко въ томъ случаѣ, если разстояніе рѣшетки отъ нижняго конца равно одной четверти длины трубки. При постепенномъ приближеніи рѣшетки къ нижнему концу трубки, звучаніе начинается все позже и позже. Если трубка больше не звучитъ самостоятельно, то можно возбудить звучаніе описаннымъ уже образомъ, закрывая предварительно верхній ея конецъ, чтобы рѣшетка успѣла сильнѣе нагрѣться, и быстро открывая его затѣмъ. Такимъ образомъ получается хотя слабый, сейчасъ же умирающій звукъ при разстояніи рѣшетки отъ нижняго конца трубки даже въ 15 mm. (0,03 длины трубки).

7. При разстояніи рѣшетки отъ нижняго конца трубки, равномъ одной четверти длины трубки, — назовемъ это положеніе нормальнымъ — трубка издаетъ свойственный ей тонъ, при другихъ положеніяхъ рѣшетки тонъ замѣтно *повышается*, при чемъ максимумъ этого повышенія доходитъ до полутона $\left(\text{интервалъ } \frac{25}{24}\right)$. Нѣкоторое, но трудно опредѣляемое повышеніе тона замѣтно и тогда, когда сила его очень ничтожна.

8. При нормальномъ положеніи рѣшетки узелъ находится въ серединѣ трубки. Это можетъ быть показано весьма удобно при помощи папковаго кружка, покрытаго сухимъ пескомъ и опущеннаго въ трубку; песокъ остается въ покоѣ, если кружокъ опущенъ до середины трубки. Менѣе удобнымъ способомъ является пользованіе туманомъ нашатыря или табачнымъ дымомъ; при этомъ, однако, можно получить нѣкоторое представленіе о движеніяхъ воздуха, происходящихъ внутри трубки во время ея звучанія. Если, напр., покрыть рѣшетку папироснымъ табакомъ и чрезъ нее пропустить токъ, недостаточный для накаливанія проволоки, то табакъ медленно сгораетъ, и вся трубка наполняется табачнымъ дымомъ. Какъ только начинается звучаніе, дымовыя нити внутри трубки приходятъ въ сильное вихревое движеніе, около рѣшетки поднимаются находящіяся вблизи оси трубки нити, въ небольшомъ разстояніи отъ рѣшетки онѣ снова опускаются вдоль стѣнокъ трубки. Движенія дыма въ верхней части трубки менѣе правильны, и вблизи самого конца трубки исходящихъ потоковъ вовсе не видно. Близъ узла табачный дымъ кажется болѣе прозрачнымъ, какъ будто нѣсколько разрѣженнымъ. Можетъ быть, это аналогично извѣстному явленію, заключающемуся въ томъ, что мелкій порошокъ, насыпанный на звучащую хладніевую пластинку, удаляется отъ узловыхъ линій и собирается надъ мѣстами болѣе сильнаго движенія.

9. Если такъ называемую химическую или газовую гармонику, настроенную почти въ унисонъ съ электрической трубою, помѣстить вблизи послѣдней и высоту ея пламени регулировать такъ, чтобы она молчала, то она, вслѣдствіе резонанса, приходитъ въ звучаніе, какъ только заставить звучать электрическую трубу, и звукъ ея не прекращается и тогда, когда электрическая труба перестаетъ звучать. Обращеніе этого опыта, т. е. возбужденіе электрической трубы, чрезъ рѣшетку которой течетъ слишкомъ слабый токъ, при помощи газовой гармоники удается только съ трудомъ.

10. Другой, болѣе интересный примѣръ резонанса получается, если газовая гармоника и электрическая труба первоначально издаютъ тоны не вполнѣ одинаковой высоты: онѣ тогда повременамъ начинаютъ звучать въ унисонъ. Если число біеній вначалѣ дошло до пяти—шести въ секунду, то оно мало по малу уменьшается, біенія совершенно исчезаютъ, но чрезъ нѣсколько времени они иногда снова возникаютъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

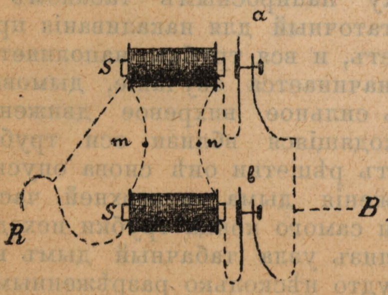
ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Матеріалы для ученическихъ работъ въ физическихъ кабинетахъ

Эр. Шпачинскаго.

*(Продолженіе *).*

IV. Двойная индуктивная катушка. (Трансформаторъ). Для электро-акустическихъ опытовъ, которые будутъ описаны ниже, мнѣ понадобилась такая индуктивная катушка, которая могла бы давать альтернативные индуктивные токи одинаковой продолжительности и напряженія. Вслѣдствіе этого, я и задался цѣлью устроить такой „трансформаторъ" постояннаго тока отъ батареи въ токъ перемѣннаго направленія, подобный тѣмъ, напримѣръ, какіе получаются отъ электромагнитныхъ машинокъ и, вообще, отъ альтернаторовъ.



Фиг. 1.

Такую задачу можно было бы рѣшить, сдѣлавъ двѣ обыкновенныя и совершенно тождественныя катушки Румкорфа I и II (фиг. 1) и расположивъ ихъ въ развѣтвленіяхъ тока отъ батареи RB. При полной тождественности первичныхъ обмотокъ, по ко-

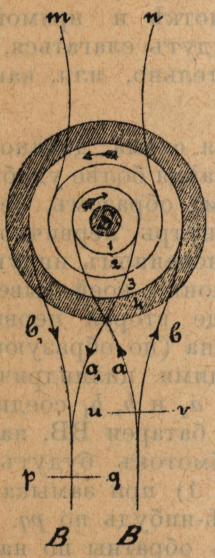
*) См. „В. О. Ф." №№ 328, 349.

имъ проходитъ наводящій токъ, вслѣдствіе равенства сопротивленій обѣихъ вѣтвей, сила тока будетъ въ нихъ одинакова. Молоточки-прерыватели *a* и *b* должны быть строго изохронны и ихъ можно было бы регулировать такъ, чтобы намагничиваніе сердечниковъ половиннымъ токомъ было недостаточно сильно для приведенія этихъ молоточковъ въ дрожаніе; при такомъ условіи приборъ самъ по себѣ въ дѣйствіе не приходитъ. Но если, толкнувъ одинъ изъ молоточковъ, напр. *a*, разомкнемъ токъ въ I-ой вѣтви, тогда весь токъ отъ батареи пройдетъ по вѣтви II и, намагничивая сильнѣе сердечникъ, притянетъ якорь молоточка *b* и, вслѣдствіе этого, разомкнется, что, въ свою очередь, направитъ весь токъ по вѣтви I и вслѣдъ затѣмъ вызоветъ притяженіе якоря *a* и т. д. Наростаніе силы тока въ каждой вѣтви отъ нуля до максимальной величины, замедляемое самоиндукціей первичныхъ катушекъ, будетъ совпадать по времени съ болѣе кратковременнымъ ослабленіемъ и исчезновеніемъ тока въ другой вѣтви, а слѣдовательно, индуктивные токи, обратный (болѣе продолжительный) въ одной вторичной обмоткѣ и прямой—въ другой,—какъ возникающіе одновременно, будутъ слагаться, если соединить эти внѣшнія спирали послѣдовательно, или, какъ на фиг. 1 представлено, параллельно.

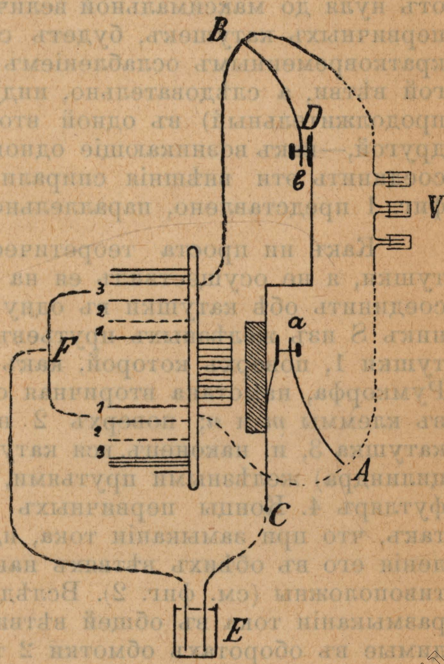
Какъ ни проста теоретически подобная схема двойной катушки, я не осуществилъ ея на практикѣ, найдя болѣе удобнымъ соединить обѣ катушки въ одну слѣдующимъ образомъ. Сердечникъ S изъ желѣзныхъ прутьевъ вложенъ внутрь первичной катушки 1, поверхъ которой, какъ и въ обыкновенномъ индукторѣ Румкорфа, намотана вторичная обмотка 2, концы коей выведены въ клеммы *m* и *n*; поверхъ 2 намотана еще вторая первичная катушка 3, и, наконецъ, вся катушка обложена (по образующимъ цилиндра) желѣзными прутьями, составляющими цилиндрическій футляръ 4. Концы первичныхъ обмотокъ a, a_1 и b, b_1 соединены такъ, что при замыканіи тока, идущаго отъ батареи BB, направленія его въ обѣихъ вѣтвяхъ наводящихъ обмотокъ будутъ противоположны (см. фиг. 2). Вслѣдствіе этого, 1) при замыканіи и размыканіи тока въ общей вѣтви, напр., гдѣ-нибудь по *pq*, наводимые въ оборотахъ обмотки 2 токи будутъ обратны по направленію и, слѣдовательно, будутъ почти уничтожаться, и 2) при замыканіи одной изъ вѣтвей тока и одновременномъ размыканіи другой, напр., гдѣ-нибудь по *uv*, наводимые въ оборотахъ вторичной обмотки 2 токи будутъ имѣть одинаковое направленіе и, слѣдовательно, будутъ складываться.

Чтобы достигнуть такого періодическаго направленія тока, то по одной, то по другой вѣтви, я присоединилъ къ такъ составленной катушкѣ молоточекъ CD (фиг. 3), снабженный двумя платиновыми накладками, соотвѣтствующими контактнымъ винтамъ *a* и *b*. Подставка перваго винта A соединена съ концомъ внутренней первичной обмотки 1, а подставка второго B съ концомъ внѣшней первичной обмотки 3; вторые концы этихъ обмотокъ 1 и 3 выведены въ особыя клеммы и сообщены съ однимъ изъ полюсовъ батареи E; второй ея полюсъ соединяется посредствомъ клеммы C съ молоточкомъ. Изъ чертежа видно, что молоточекъ автоматически направляетъ токъ то въ 1-ую, то въ 3-ью обмотку; винты a и b можно регулировать такъ, чтобы замыканіе одной вѣтви происходило раньше разобщенія второй.

Въ устроенномъ мною приборѣ внутренняя первичная обмотка 1 состоитъ изъ проволоки въ 0,5 mm. въ діаметрѣ, дѣлающей всего 576 оборотовъ (6 слоевъ), внѣшняя первичная обмотка 3 изъ такой же проволоки, 424 оборота (4 слоя), а вторичная обмотка 2 изъ проволоки въ 0,16 mm. имѣетъ 1960 оборотовъ (11 слоевъ). При такихъ размѣрахъ катушка дѣйствуетъ очень



Фиг. 2.



Фиг. 3.

хорошо уже и при токѣ отъ одного элемента (Лекланше), и индуктивный токъ, введенный въ телефонъ, даетъ очень чистую ноту. Конечно, искры въ воздухѣ такая катушка не дастъ, даже при употребленіи болѣе сильнаго наводящаго тока, ибо прямой и обратный индуктивные токи въ данномъ случаѣ имѣютъ одинаковую продолжительность и, по причинѣ самоиндукціи обмотокъ, наростаютъ сравнительно медленно.

При 3-хъ элементахъ искры въ контактахъ a и b становятся уже весьма замѣтными. Чтобы ихъ уменьшить, можно, конечно, прибѣгнуть, какъ и въ обыкновенномъ индукторѣ, къ конденсатору и направить въ него экстратокъ размыканія. Въ виду того, что, какъ выше сказано, размыканіе каждой изъ вѣтвей происходитъ позже замыканія второй, можно, какъ это я испыталъ на опытѣ, употребить для погашенія искръ только одинъ общій для обѣихъ вѣтвей конденсаторъ, обкладки котораго надо соединить съ клеммами A и B.

Но въ данномъ случаѣ и удобнѣе, и даже лучше пользоваться для уничтоженія искръ въ контактахъ a и b не конденсаторомъ, коего емкость, разъ онъ уже сдѣланъ, такъ трудно поддается регулировкѣ, а попросту „вольтаметромъ" съ подкисленною водою. Я употребляю для этой цѣли маленькую пробирочную (или даже „наперсточную") батарею V свинцовыхъ аккумуляторовъ, коей полюсы сообщаются точно также съ клеммами A и B. Въ нее всякій разъ отводится экстратокъ размыканія, но не трудно видѣть, что ни заряженія этихъ аккумуляторовъ, ни окончательнаго разложенія воды въ нихъ не произойдетъ, такъ какъ всякіе два послѣдовательные экстратока, возникающіе въ моменты разрывовъ тока въ a и въ b, пройдутъ черезъ батарею V въ обратныхъ направленіяхъ, и въ результатѣ почти вся энергія экстратоковъ, проявлявшаяся въ видѣ искръ, перенесется теперь въ аккумуляторы и израсходуется тамъ на нагрѣваніе воды. При помощи особаго приспособленія можно въ V включать въ цѣпь AB то либо другое число вторичныхъ элементиковъ и, регулируя такимъ образомъ сопротивленіе, можно почти совсѣмъ потушить обѣ искры. У меня, напр., ихъ почти не было вовсе видно при токѣ отъ 3-хъ большихъ элементовъ Гаснера, когда батарея V состояла изъ трехъ пробирочныхъ аккумуляторовъ.

Повидимому, однакожъ, здѣсь еще есть и другое преимущество вольтаметровъ передъ конденсаторомъ. Я какъ то раньше пробовалъ замѣнить конденсаторъ вольтаметромъ при опытахъ съ обыкновеннымъ индукторомъ Румкорфа и убѣдился, что такая замѣна, хотя и позволяетъ довести искру въ прерывателѣ до minimum'а, но всегда вредно вліяетъ на длину искры между борнами катушки; слѣдовательно, напряженіе прямого индуктивнаго тока значительно падаетъ при включеніи вольтаметра. Это и понятно: электрическое колебаніе, возникающее въ конденсаторѣ вслѣдъ за его заряженіемъ экстратокомъ, сокращаетъ его продолжительность, чего при употребленіи вольтаметра нѣтъ. Точно также и по той же причинѣ оказалось невыгоднымъ замѣнять конденсаторъ лампочками накаливанія: онѣ могутъ отлично горѣть (на счетъ той энергіи экстратока, которая безъ нихъ проявлялась искрою въ прерывателѣ), но напряженіе прямого индуктивнаго тока при этомъ сильно падаетъ. — Совершенно иныя условія имѣемъ при употребленіи вышеописанной двойной катушки: здѣсь продолжительность экстратока размыканія выгодно не уменьшить, а, напротивъ, увеличить по возможности, ибо, выражаясь графически, измѣняемость силы перемѣннаго даваемаго катушкой тока въ томъ лишь идеальномъ случаѣ изображалась бы „чистой“ синусоидой (а не „составной“, какъ бываетъ въ дѣйствительности), когда періоды наростанія и ослабѣванія тока въ обѣихъ вѣтвяхъ были бы строго равны по времени и симметричны.

Замѣчу еще, что такую двойную катушку возможно сдѣлать приборомъ *обратимымъ*, т. е. устроить ее такъ, чтобы она, вмѣстѣ съ тѣмъ, могла служить также и трансформаторомъ тока альтернативнаго въ токъ постоянный. Для этого слѣдуетъ только снабдить пружину молоточка регуляторомъ, который позволялъ бы „настраивать“ молоточекъ такъ, чтобы его колебанія были изохронны съ періодомъ перемѣнъ направленія даннаго тока. Въ такомъ случаѣ этотъ токъ, вводимый въ приборъ черезъ клеммы m и n въ обмотку 2 (см. фиг. 2), въ теченіе 1-ой фазы, когда сила его наростаетъ отъ 0 до $+i$, будетъ наводить въ обмоткѣ 1, замкнутой контактомъ a, токъ обратнаго направленія, который въ проводникѣ, соединяющемъ борны C и F (фиг. 3), пойдетъ, напримѣръ, отъ C къ F. Притянутый, вслѣдствіе намагничиванія этимъ индуктивнымъ токомъ сердечника S, якорь молоточка разомкнетъ контактъ въ a и замкнетъ въ b, а потому въ теченіе 2-ой фазы, когда сила альтернативнаго тока падаетъ отъ $+i$ до 0, наводимый въ замкнутой теперь обмоткѣ 3 токъ будетъ имѣть (какъ видно изъ фиг. 2) такое направленіе, какъ и токъ 1-ой фазы; т. е. отъ C къ F внѣ прибора. По причинѣ изохронности колебаній молоточка, въ теченіе 3-ьей фазы, когда наводящій токъ, измѣнивъ направленіе, будетъ наростать отъ 0 до $-i$, контактъ b долженъ оставаться еще замкнутымъ, а потому индуктивный токъ, возникающій въ той же обмоткѣ 3, будетъ имѣть опять то же направленіе, Въ моментъ окончанія 3-ьей фазы и начала 4-ой, въ теченіе коей сила тока измѣняется отъ $-i$ до 0, контактъ b долженъ быть разомкнутъ и a замкнутъ; тогда индуктивный токъ этой 4-ой фазы возникнетъ въ обмоткѣ 1 и будетъ опять требуемаго направленія отъ C къ F. Слѣдующая затѣмъ 5-ая фаза будетъ уже повтореніемъ первой.

Не имѣя въ данный моментъ подъ руками правильнаго альтернативнаго тока въ кабинетѣ *), я не могъ до сихъ поръ приспособить двойной катушки вышеописаннаго устройства къ роли такого обратнаго трансформатора. Думаю, однакожъ, что такой трансформаторъ съ изохроннымъ молоточкомъ былъ бы удобнѣе и *экономнѣе* для преобразованія альтернативнаго тока въ постоянный, нежели ротаціонные трансформаторы, поглощающіе непроизводительно часть энергіи на вращеніе.

(Продолженіе слѣдуетъ).

---

*) Опять таки потому, что полученная отъ Max Kohl'a ручная динамомашина, съ приспособленіемъ для постояннаго и для альтернативнаго тока, исполнена была такъ небрежно, что рукоятка главнаго колеса сломалась послѣ первыхъ же опытовъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Конгрессъ исторіи науки въ 1906 году. Секція исторіи науки международнаго конгресса историковъ въ Римѣ въ 1903 году постановила организовать интернаціональную комиссію для подготовки *конгресса исторіи науки*. Президентомъ комиссіи избранъ P. Tannery, секретаремъ G. Loria. Конгрессъ будетъ происходить въ 1906 году въ Берлинѣ.

Вторая международная сейсмологическая конференція. Отъ 24—28-ое іюля (н. ст.) текущаго года происходила въ Страсбургѣ *II-ая интернаціональная сейсмологическая конференція*. Главною цѣлью ея является основаніе *интернаціональной ассоціаціи для изслѣдованія землетрясеній*. Двадцать государствъ прислали делегатовъ: Германія, *Россія*, Японія, Италія, Англія, Венгрія, Греція, Бельгія, Болгарія, Сербія, Румынія, Испанія, Португалія, Голландія, Сѣв.-Америк. Соединенные Штаты, Мексика, Аргентина, Чили, Швейцарія, Швеція. Делегатами отъ Россіи явились: проф. Баклундъ (Пулково) и проф. Левицкій (Юрьевъ).

Результаты совѣщаній объ ассоціаціи, которые будутъ предложены на утвержденіе правительствъ, слѣдующіе. Членами ассоціація являются государства; но, кромѣ нихъ, и ученыя общества, занимающіяся изслѣдованіемъ землетрясеній, могутъ, съ разрѣшенія президента бюро ассоціаціи, посылать на общія собранія ассоціаціи своихъ членовъ. Общія собр нія происходятъ каждые 4 года. Президентомъ бюро является директоръ сейсмологическаго института въ Страсбургѣ, гдѣ бюро и находится постоянно.—Для цѣлей изслѣдованія землетрясеній члены, т. е. государства, должны будутъ вносить ежегодно въ суммѣ не меньше 20000 германскихъ марокъ (около 10000 рублей) членскихъ взносовъ; взносы эти распредѣляются соотвѣтственно численности населенія даннаго государства: государства съ населеніемъ, не превышающимъ 5 милліоновъ, платятъ 400 герм. марокъ въ годъ,—съ населеніемъ отъ 5—10 милліоновъ—800 марокъ,—отъ 10—20 милліоновъ—1600 марокъ, больше 20 милліоновъ—3200 марокъ. Вступивъ въ ассоціацію, каждое государство обязуется оставаться членомъ въ теченіе 12 лѣтъ, считая отъ 1-го апрѣля 1904 г. Затѣмъ контрактъ считается продолженнымъ на 4 года, если за полгода до названнаго срока не послѣдовало соотвѣтствующаго заявленія.

Кромѣ того, конференція выработала соглашеніе относительно единообразія наблюденій землетрясеній. Такъ, установлено опредѣленное счисленіе времени; далѣе, выработана схема вопросныхъ листовъ, которые наблюдатель долженъ будетъ заполнять и отсылать въ Страсбургское центральное бюро.

Конференція по вопросу о стрѣльбѣ для предотвращенія грозы. По приглашенію Австрійскаго правительства отъ 20—24 іюня (н. ст.), происходила въ Грацѣ *конференція экспертовъ по вопросу о стрѣльбѣ для предотвращенія грозы.* Въ то время, какъ конгрессы, посвященные этому предмету, высказывались до сихъ поръ съ большой увѣренностью въ цѣлесообразности стрѣльбы, конференція эта приходитъ къ заключенію, что дѣйствіе сирѣльбы на грозы и градъ подлежитъ большому сомнѣнію.

(Meteorologische Zeitschrift).

РЕЦЕНЗІИ.

Д. Горячевъ и А. Воронецъ. *Задачи, вопросы и софизмы для любителей математики*

Книга подъ только что приведеннымъ заглавіемъ явилась результатомъ совмѣстной работы приватъ-доцента *Д. Горячева* и преподавателя Московскаго Частнаго Реальнаго Училища г. Воскресенскаго *А. Воронца.* Она представляетъ собой сборникъ задачъ, вопросовъ и софизмовъ, предназначенныхъ для лицъ, интересующихся математикой и владѣющихъ послѣдней лишь въ объемѣ курса нашихъ реальныхъ училищъ, т. е. отъ читателей требуется лишь знаніе элементарной математики. Всего въ сборникѣ помѣщено 190 вопросовъ, относящихся къ Ариѳметикѣ, Алгебрѣ и Геометріи съ Тригонометріей. Существеннымъ признакомъ *каждой* задачи или вопроса является ихъ незаурядность, ихъ „интересность“, если можно такъ выразиться. Авторы не преслѣдовали спеціально какой-либо учебной или педагогической цѣли, а стремились дать читателю по возможности больше интереснаго матеріала для размышленій; поэтому сборникъ не останавливается спеціально на какой-либо отдѣльной главѣ элементарной математики, а представляетъ собой совокупность интересныхъ вопросовъ, интересъ которыхъ заключается часто или въ самомъ замыслѣ задачи, или въ ея редакціи, или въ особенностяхъ ея рѣшенія,—въ простотѣ, остроуміи, изяществѣ, нѣкоторой трудности и т. п. Въ книгѣ мы встрѣчаемъ немало задачъ и вопросовъ—шутокъ или загадокъ. Весьма много есть задачъ, имѣющихъ цѣлью рѣшить тотъ или иной вопросъ жизненной практики. Задачи этой послѣдней категоріи особенно должны заинтересовать учениковъ и ученицъ старшихъ классовъ нашихъ гимназій, которымъ мы рекомендуемъ разбираемую нами книгу: всякое приложеніе математики къ чему-либо реальному всегда интересно! Больше всего задачъ помѣщено по алгебрѣ и ариѳметикѣ; сравнительно меньше задачъ по геометріи (тригонометрически рѣшаемымъ задачамъ удѣлено мѣсто). Весьма интересными задачами для учащихся являются задачи на maxima и minima; составители и на этотъ отдѣлъ помѣстили рядъ задачъ. Одинъ изъ отдѣловъ книги (именно IV) является чисто историческимъ: онъ состоитъ изъ задачъ, выбранныхъ изъ учебника ариѳметики

Магницкаго, изъ курса чистой математики артиллеріи штыкъ-юнкера Войтяховскаго и изъ „Очерковъ исторіи развитія физико-математическихъ знаній въ Россіи“ В. Бобынина.

Софизмовъ въ книгѣ немного (всего 12); изъ нихъ наиболѣе интересными являются геометрическіе софизмы.

Къ сборнику приложена глава: „Отвѣты и рѣшенія“, въ которой къ наиболѣе труднымъ вопросамъ даны полезныя указанія, примѣчанія или даже цѣлыя рѣшенія. Цѣна книги—недорогая: 70 коп. Мы, ознакомившись съ книгой, думаемъ, что она будетъ полезна и для преподавателей математики въ среднихъ школахъ: въ томъ матеріалѣ, который собранъ въ разбираемой нами книгѣ, преподаватель всегда нуждается; книга же до извѣстной степени сгруппировала этотъ матеріалъ.

Н. Парфентьевъ, препод. математики
Казанской 3-ей гимназіи.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 370 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC по данному периметру $2p$ и сторонѣ a такъ, чтобы биссекторъ угла A былъ наибольшій.

Л. Ямпольскій (Одесса).

№ 371 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC по высотѣ h_a, проведенной къ сторонѣ a, радіусу r круга вписаннаго и радіусу ρ круга, проходящаго черезъ центръ O круга вписаннаго и центры O_b и O_c круговъ, внѣвписанныхъ относительно сторонъ b и c.

И. Коровинъ (Екатеринбургъ).

№ 372 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[3]{8x-3}+\sqrt[3]{24x+15}=4.$$

Г. Огановъ (Эривань).

№ 373 (4 сер.). Доказать, что изъ равенства

$$a+b+c=0$$

вытекаетъ, что

$$6(a^5+b^5+c^5)=5(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3).$$

(Заимств.).

№ 374 (4 сер.). На сторонѣ BC угла ABC построить такую точку O, чтобы описанная изъ нея даннымъ радіусомъ R окружность встрѣчала стороны угла въ точкахъ N, P и M, удовлетворяющихъ условію $MN=NP$, при чемъ предполагается, что точки N и P лежатъ на сторонѣ AB, а точка M—на сторонѣ BC.

І. Ѳеодоровъ (Спб.).

№ 375 (4 сер.). Полый металлическій шаръ вѣсомъ p граммовъ и плотности d при температурѣ t^0 плаваетъ въ состояніи безразличнаго равновѣсія въ жидкости плотности δ. Опредѣлить толщину оболочки шара. Коэффиціенты объемнаго теплового расширенія металла и жидкости суть соотвѣтственно k и α.

Л. Ямпольскій (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 291 (4 сер.). *Въ серебряный сосудъ, вѣсящій* 200 *граммовъ и содержащій* 150 *граммовъ снѣга при* -10^0, *впускаютъ* 25 *граммовъ водяного пара при* 100^0 *Опредѣлить температуру смѣси.*

Даны: скрытая теплота плавленія льда 80; *скрытая теплота испаренія воды при* $100^0 = 537$; *теплоемкость льда* 0,5; *теплоемкость серебра* 0,056.

Предположимъ, что окончательная температура смѣси x градусовъ и что x—число положительное, меньшее 100. Чтобы нагрѣть серебряный сосудъ вѣсомъ въ 200 граммовъ съ -10^0 до x градусовъ, придется придать ему $200.0{,}056(x+10)$ калорій тепла. Чтобы нагрѣть 150 граммовъ снѣга съ -10^0 до 0^0, слѣдуетъ сообщить снѣгу $150.0{,}5.10$ калорій; затѣмъ, для обращенія снѣга при 0^0 въ воду при 0^0 придется затратить 150.80 калорій; наконецъ, чтобы нагрѣть расплавленный снѣгъ съ 0^0 до x^0, надо сообщить этой водѣ $150x$ калорій. Тепло, полученное снѣгомъ и сосудомъ, заимствуется отъ пара, который, сгущаясь въ воду, отдаетъ 25.537 калорій, а затѣмъ охлаждаясь со 100^0 до x^0, теряетъ еще $25(100-x)$ калорій. Такимъ образомъ,

$$00.0{,}056(x+10)+150.0{,}5.10+150.80+150x=25.537+25(100-x).$$

Дѣля обѣ части на 25, имѣемъ:

$$8(10+x).0{,}056+6.10.0{,}5+6.80+6x=537+100-x,$$

$$x(0{,}056.8+6+1)=537+100-6.10.0{,}5-6.86-8.10.0{,}056,$$

$$7{,}448x=122{,}52, \quad \text{откуда } x=16^0{,}45,$$

что и представляетъ собою правильное рѣшеніе, такъ какъ $16^0{,}45$ есть число положительное, меньшее 100.

Г. Огановъ (Эривань); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig); *А. Заикинъ* (Самара).

№ 300 (4 сер.). *Доказать, что число* N *не можетъ быть точной четвертой степенью, если* N — 5 *дѣлится безъ остатка на* 9.

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Называя цѣлое число, полученное отъ дѣленія $N-5$ на 9, черезъ x, находимъ $N-5=9x$, $N=9x+5$ (1), т. е N есть цѣлое число, которое при дѣленіи на 9 даетъ въ остаткѣ 5. Предположимъ, что N есть точная четвертая степень раціональнаго числа y, которое, какъ извѣстно, должно быть при N цѣломъ также цѣлымъ, такъ что $N=y^4$ (2). Цѣлому числу y всегда можно дать видъ $9k\pm r$, гдѣ k число цѣлое, а r принимаетъ одно изъ значеній 0, $+1$, $+2$, $+3$, $+4$. Тогда (см. (1)) $N=(9k\pm r)^4=9(9^3k^4\pm 4.9^2k^3r+\ldots+4kr^3)+r^4$, гдѣ во второй части внутри скобокъ находится число цѣлое, а потому N при дѣленіи на 9 даетъ такой же остатокъ, какъ и r^4. Но r^4, имѣя одно изъ значеній 0^4, 1^4, 2^4, 3^4, 4^4, по дѣленіи на 9, можетъ давать лишь соотвѣтственные остатки 0, 1, 7, 0, 4, такъ что N, будучи точной четвертой степенью, даетъ при дѣленіи на 9 одинъ изъ остатковъ 0, 1, 4, 7, а потому не можетъ давать при дѣленіи на 9 остатка 5, что противно условію (см. (1)). Слѣдовательно, N не есть точная четвертая степень.

Я. Дубновъ (Одесса); *Н. Гончаровъ* (Короча); *И. Плотникъ* (Одесса); *В. Верроntz* (Москва); *Л. Ямпольскій* (Одесса).

№ 301 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=n\operatorname{tg}3x.$$

(Заимств. изъ *Casopis*).

Изъ тожества

$$\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}(x+2x)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}x.\operatorname{tg}2x}$$

находимъ

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=(1-\operatorname{tg}x.\operatorname{tg}2x).\operatorname{tg}3x,$$

Поэтому данное уравненіе можно записать въ видѣ

$$(1-\operatorname{tg}x.\operatorname{tg}2x).\operatorname{tg}3x = n\operatorname{tg}3x$$

или

$$\operatorname{tg}3x\,[(1-\operatorname{tg}x.\operatorname{tg}2x)-n]=0 \qquad (1).$$

Поэтому, либо

$$\operatorname{tg}3x=0, \quad \text{откуда } 3x=m.180^\circ, \quad x=m.60^\circ \qquad (2),$$

гдѣ m — произвольное цѣлое число, либо (см. (1))

$$1-\operatorname{tg}x.\operatorname{tg}2x-n=0,$$

или

$$1-\frac{2\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}^2x}-n=0,$$

откуда

$$1-3\operatorname{tg}^2x-n+n\operatorname{tg}^2x=0,$$

$$\operatorname{tg}^2x=\frac{n-1}{n-3}, \quad \operatorname{tg}x=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n-3}}. \qquad (3)$$

Называя наименьшій уголъ, тангенсъ котораго равенъ ариѳметическому значенію $\sqrt{\frac{n-1}{n-3}}$ (см. (3)), что возможно лишь при условіи $\frac{n-1}{n-3}\geqslant 0$, черезъ α, находимъ, что данное уравненіе удовлетворяется, кромѣ найденныхъ рѣшеній (см. (2)), при $x=\pm\alpha+180^\circ.m$, гдѣ m произвольное цѣлое число.

Н. Гончаровъ (Короча); *Г. Огановъ* (Эривань); *И. Плотникъ* (Одесса); *В. Berpontz* (Москва); *А. Заикинъ* (Самара); *В. Пароcновъ* (Спб.); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig); *Нерсесъ Сагателовъ* (Шуша).

№ 302 (4 сер.). *Число* N *имѣетъ видъ* $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, *гдѣ* a, b, c — *простыя, а* α, β, γ — *цѣлыя числа. Опредѣлить* N, *зная,* 1) *что число всѣхъ дѣлителей числа* N *равно* 24; 2) *что* α, β, γ *суть послѣдовательныя цѣлыя числа, при чемъ* $\alpha<\beta<\gamma$; 3) *что* b *и* c *также послѣдовательныя цѣлыя числа и* $b>c$; 4) *что* a^α, b^β, c^γ *послѣдовательныя цѣлыя числа и* $a^\alpha<c^\gamma<b^\beta$.

Число всѣхъ дѣлителей числа $N=a^\alpha b^\beta c^\gamma$ равно, какъ извѣстно, $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$, или, — замѣчая, что $\alpha=\beta-1$, $\gamma=\beta+1$, — $\beta(\beta+1)(\beta+2)$. Поэтому

$$\beta(\beta+1)(\beta+2)=24,$$

или

$$\beta^3+3\beta^2+2\beta-24=0 \qquad (1).$$

Уравненіе (1) имѣетъ однимъ изъ корней 2, на основаніи чего, согласно съ теоремой Безу, лѣвая его часть можетъ быть представлена въ видѣ

$$(\beta-2)(\beta^2+5\beta+12)=0.$$

Но $\beta^2+5\beta+12\neq 0$, такъ какъ β есть, по условію, число положительное. Поэтому изъ уравненія (1) слѣдуетъ, что $\beta=2$, а потому $\alpha=1$, $\gamma=3$; кромѣ того, по условію $b=c+1$, такъ что число N имѣетъ видъ $a(c+1)^2c^3$. Изъ условія задачи находимъ также, что $c^\gamma=a^\alpha+1$, $b^\beta=c^\gamma+1$, или

$$c^3=a+1 \quad (2), \qquad (c+1)^2=c^3+1 \quad (3).$$

Представивъ уравненіе (3) въ видѣ

$$c^3 - c^2 - 2c = c(c^2 - c - 2) = 0 \qquad (4)$$

и замѣчая, что $c \neq 0$ по условію, находимъ (см. (4)) $c^2 - c - 2 = 0$, откуда c равно 2 или -1; но c, по условію, положительно; поэтому $b = c + 1 = 2$, и (см. (2)) $a = c^3 - 1 = 7$, такъ что число N имѣетъ видъ $7.3^2.2^3$, что и представляетъ правильное рѣшеніе вопроса, такъ какъ числа 7, 3 и 2 простыя. Итакъ, $N = 7.3^2.2^3 = 504$.

Г. Огановъ (Эривань); *И. Плотникъ* (Одесса); *Я. Дубновъ* (Одесса); *А. Заикинъ* (Самара); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig).

№ 307 (4 сер.). *Если сумма квадратовъ двухъ цѣлыхъ чиселъ есть точный квадратъ, то произведеніе этихъ чиселъ кратно* 6.

Назовемъ одно изъ цѣлыхъ чиселъ, сумма квадратовъ которыхъ есть точный квадратъ, черезъ x, а другое черезъ y. Если числа x и y оба нечетны, то каждое изъ нихъ равно соотвѣтственно выраженіямъ $2k+1$ и $2l+1$, гдѣ k и l суть числа цѣлыя. Поэтому

$$x^2 + y^2 = (2k+1)^2 + (2l+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 =$$

$$= 4(k^2 + l^2 + k + l) + 2,$$

такъ что число $x^2 + y^2$ дѣлится на 2, но при дѣленіи на 4 даетъ въ остаткѣ 2; дѣлясь на 2, но не дѣлясь на 4, сумма $x^2 + y^2$ не можетъ быть точнымъ квадратомъ, такъ какъ показатель наивысшей степени простого числа, на которую дѣлится точный квадратъ, должна быть четной. Такъ какъ $x^2 + y^2$ есть, по условію, точный квадратъ, то одно изъ чиселъ x и y должно быть четнымъ, а потому произведеніе xy дѣлится на 2. Точно также, полагая, что ни одно изъ чиселъ x и y не кратно 3, найдемъ, что

$$x^2 + y^2 = (3k \pm 1)^2 + (3l \pm 1)^2 \qquad (1),$$

гдѣ k и l числа цѣлыя, или (см. (1))

$$x^2 + y^2 = 3(3k^2 \pm 2k + 3l^2 \pm 2l) + 2,$$

такъ что сумма $x^2 + y^2$ при дѣленіи на 3 даетъ въ остаткѣ 2; между тѣмъ всякій точный квадратъ есть число вида $(3k)^2$ или $(3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2) + 1$, гдѣ k—число цѣлое, такъ что точный квадратъ при дѣленіи на 3 даетъ въ остаткѣ либо 0, либо 1. Отсюда вытекаетъ, что одно изъ чиселъ x и y кратно 3, такъ какъ въ противномъ случаѣ число $x^2 + y^2$ не могло бы быть, какъ это намъ дано, точнымъ квадратомъ; значитъ и произведеніе xy кратно 3. Дѣлясь на 2 и на 3, произведеніе xy кратно 6.

Л. Ямпольскій (Braunschweig); *Г. Огановъ* (Эривань); *И. Плотникъ* (Одесса); *Я. Дубновъ* (Одесса).

Поправки. Въ концѣ условія задачи **№ 288** въ № 337 „Вѣстника" слѣдуетъ добавить: при безграничномъ возрастаніи n.

Въ задачѣ № 310 въ № 341 „Вѣстника" вмѣсто $\sin^2 + \sin^2 y = m$ слѣдуетъ читать $\sin^2 x + \sin^2 y = m$.

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 5-го Сентября 1903 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

Обложка
ищется

Обложка
ищется