Обложка
ищется

Обложка
пщется

XXX Сем. № 2.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

31 Іюля № 350. 1903 г.

Содержаніе: Основанія геометрической теоріи кватерніоновъ. *Дм. Ефремова.* — Построеніе кубичнаго корня съ произвольной точностью. *Студента А. Пѣвцова.* — Отклоненіе свободно падающаго тѣла къ востоку. *В. А. Е.* — Научная хроника: Звучащее пламя. 75-ый Съѣздъ нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей. Интернаціональный научный конгрессъ въ Сенъ-Луи въ 1904 году. Проникновеніе лучей свѣта черезъ тѣло человѣка. Леченіе лучами радія. Газы, содержащіеся въ бромистомъ радіѣ. — Задачи для учащихся, №№ 364—369 (4 сер.). — Рѣшенія задачъ, №№ 285, 287, 294, 296, 303. — Поправка. — Объявленія.

ОСНОВАНІЯ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ
КВАТЕРНІОНОВЪ.

Дм. Ефремова (Иваново-Вознесенскъ).

(*Продолженіе* *).

15. **Компланарные векторы.** Векторы, имѣющіе общее начало и находящіеся въ одной плоскости, называются *компланарными* (*complanaires*, Laisant).

Для трехъ компланарныхъ векторовъ $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ *всегда можно найти три такихъ алгебраическихъ количества* a, b, c, *что*

$$a.\overline{A}+b.\overline{B}+c.\overline{C}=0.$$

Дѣйствительно, проведя три прямыя, соотвѣтственно параллельныя векторамъ $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ и не пересѣкающіяся въ одной точкѣ,

*) См. № 349 „Вѣстника“.

получимъ нѣкоторый тр-къ LMN. Разсматривая стороны этого тр-ка, какъ послѣдовательные векторы, получимъ (14):

$$\overline{LM}+\overline{MN}+\overline{NL}=0;$$

вмѣстѣ съ тѣмъ, можно положить (6)

$$\overline{LM}=a.\overline{A},\quad \overline{MN}=b.\overline{B},\quad \overline{NL}=c.\overline{C};$$

слѣдовательно, можно найти такія алгебраическія количества a, b, c, что

$$a.\overline{A}+b.\overline{B}+c.\overline{C}=0.$$

Если это равенство удовлетворяется еще алгебраическими количествами a', b', c', такъ что

$$a'.\overline{A}+b'.\overline{B}+c'.\overline{C}=0,$$

то $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'};$

ибо, исключивъ изъ предположенныхъ равенствъ $\overline{C}$, получимъ:

$$\frac{a}{c}\cdot\overline{A}+\frac{b}{c}\cdot\overline{B}=\frac{a'}{c'}\cdot\overline{A}+\frac{b'}{c'}\cdot\overline{B};$$

слѣдовательно (14), $\dfrac{a}{c}=\dfrac{a'}{c'}$ и $\dfrac{b}{c}=\dfrac{b'}{c'}$,

т. е. $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}\cdot$ *)

16. Изъ равенства

$$a.\overline{A}+b.\overline{B}+c.\overline{C}=0$$

слѣдуетъ, что

$$\overline{C}=-\frac{a}{c}\cdot\overline{A}-\frac{b}{c}\cdot\overline{B}=m.\overline{A}+n.\overline{B},$$

гдѣ $m=-\dfrac{a}{c}$ и $n=-\dfrac{b}{c}\cdot$ Значитъ, *изъ трехъ компланарныхъ векторовъ, между которыми нѣтъ расположенныхъ на одной прямой*,

---

*) Приведенное разсужденіе предполагаетъ, что въ числѣ данныхъ трехъ векторовъ нѣтъ такихъ, которые расположены на одной прямой; оно обнаруживаетъ также, что въ этомъ случаѣ ни одинъ изъ коэффиціентовъ a, b и c не равенъ нулю; на этомъ существенно основывается вторая часть доказательства. Читатель самъ справится съ тѣмъ случаемъ, когда между данными векторами имѣются такіе, которые расположены на одной прямой. Замѣтимъ только, что въ томъ случаѣ, когда, скажемъ, векторы $\overline{A}$ и $\overline{B}$ лежатъ на одной прямой, а векторъ $\overline{C}$ на этой прямой не лежитъ, коэффиціентъ c необходимо равенъ нулю

каждый равенъ суммѣ двухъ остальныхъ, умноженныхъ на нѣкоторыя алгебраическія количества.

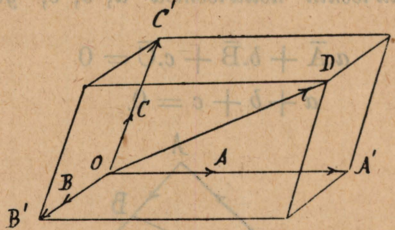
17. Если векторы $\overline{OA}=\overline{A}$, $\overline{OB}=\overline{B}$, $\overline{OC}=\overline{C}$ не находятся въ одной плоскости, то, взявъ параллельные имъ векторы $\overline{OA'}=a.\overline{A}$, $\overline{OB'}=b.\overline{B}$, $\overline{OC'}=c.\overline{C}$ и построивъ на нихъ параллелепипедъ OD, найдемъ, что (фиг. 2)

$$\overline{OA'}+\overline{OB'}+\overline{OC'}=a.\overline{A}+b.\overline{B}+c.\overline{C}=\overline{OD}.$$

Но діагональ параллелепипеда не можетъ быть равна нулю; слѣдовательно, для трехъ векторовъ $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, не лежащихъ на одной плоскости, равенство

$$a.\overline{A}+b.\overline{B}+c.\overline{C}=0$$

возможно только при $a=0$, $b=0$ и $c=0$.



Фиг. 2.

18. Равенство

$$a.\overline{A}+b.\overline{B}+c.\overline{C}=\overline{OD}$$

показываетъ, что всякій векторъ $\overline{OD}$ можетъ быть представленъ въ видѣ суммы трехъ *заданныхъ некомпланарныхъ* векторовъ $\overline{A}$, B, $\overline{C}$, умноженныхъ на нѣкоторыя алгебраическія количества. Для опредѣленія этихъ количествъ строится параллелепипедъ, діагональ котораго $=\overline{OD}$, а сходящіяся ребра $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$ параллельны векторамъ $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$. Тогда

$$\overline{OD}=\overline{OA'}+\overline{OB'}+\overline{OC'}=a.\overline{A}+b.\overline{B}+c.\overline{C},$$

гдѣ

$$a=\frac{\overline{OA'}}{\overline{A}},\quad b=\frac{\overline{OB'}}{\overline{B}},\quad c=\frac{\overline{OC'}}{\overline{C}}.$$

19. Пусть $\overline{A}$, $\overline{B}$, C суть три вектора, расположенные въ одной плоскости и имѣющіе общее начало O. Если концы этихъ векторовъ, т. е. точки A, B, C, находятся на одной прямой (фиг. 3), то (6)

$$\overline{AB}=x.\overline{AC}.$$

Но

$$\overline{AB}=\overline{B}-\overline{A}\ \text{и}\ \overline{AC}=\overline{C}-\overline{A};$$

слѣдовательно,

$$\overline{B} - \overline{A} = x.(\overline{C} - \overline{A}),$$

или

$$(x-1).\overline{A} + \overline{B} - x.\overline{C} = 0.$$

Такимъ образомъ, обозначивъ чрезъ a, b, c—алгебраическія количества, удовлетворяющія равенству (15)

$$a.\overline{A} + b.\overline{B} + c.\overline{C} = 0,$$

и сравнивъ это равенство съ предыдущимъ, получимъ:

$$a = x - 1, \quad b = 1, \quad c = -x$$

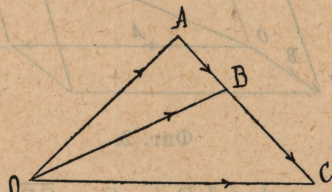
и

$$a + b + c = 0.$$

Итакъ, *если концы трехъ компланарныхъ векторовъ съ общимъ началомъ $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ находятся на одной прямой, то существуютъ дѣйствительныя алгебраическія количества a, b, c, удовлетворяющія равенствамъ:*

$$a.\overline{A} + b.\overline{B} + c.\overline{C} = 0$$

$$a + b + c = 0.$$



Фиг. 3.

Обратно, если такія равенства существуютъ одновременно, то, замѣнивъ второе тождественнымъ съ нимъ равенствомъ

$$a.\overline{A} + b.\overline{A} + c.\overline{A} = 0$$

и вычтя послѣднее изъ перваго, получимъ

$$b.(\overline{B} - \overline{A}) + c \cdot (\overline{C} - \overline{A}) = 0,$$

или

$$b.\overline{AB} + c.\overline{AC} = 0;$$

отсюда

$$\overline{AB} = -\frac{c}{b} \cdot \overline{AC} \cdot$$

Слѣдовательно, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ параллельны (6), а такъ какъ они имѣютъ общее начало A, то они суть отрѣзки одной прямой.

20. Если четыре точки A, B, C, D находятся въ одной плоскости, то векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ должны быть компланарными, а потому должно удовлетворяться равенство вида (15)

$$l.\overline{AB} + m.\overline{AC} + n.\overline{AD} = 0;$$

но, взявъ произвольную точку O и положивъ $\overline{OA}=\overline{A}$, $\overline{OB}=\overline{B}$, $\overline{OC}=\overline{C}$, $\overline{OD}=\overline{D}$, получимъ:

$$\overline{AB}=\overline{B}-\overline{A},\ \overline{AC}=\overline{C}-A,\ \overline{AD}=\overline{D}-\overline{A};$$

поэтому предыдущее равенство представляется въ видѣ

$$l.(\overline{B}-\overline{A})+m.(\overline{C}-\overline{A})+n.(\overline{D}-\overline{A})=0,$$

или
$$-(l+m+n).\overline{A}+l.\overline{B}+m.\overline{C}+n.\overline{D}=0.$$

Положивъ здѣсь

$$-(l+m+n)=a,\ l=b,\ m=c,\ n=d,$$

получимъ равенства

$$a.\overline{A}+b.\overline{B}+c.\overline{C}+d.\overline{D}=0$$

$$a+b+c+d=0,$$

выражающія условія, что четыре точки A, B, C, D находятся въ одной плоскости.

21. Эти условія можно выразить также равенствами

$$\overline{A}=p.\overline{B}+q.C+r.\overline{D}$$

и
$$p+q+r=1.$$

Дѣйствительно, изъ равенства

$$a.\overline{A}+b.\overline{B}+c.\overline{C}+d.\overline{D}=0$$

слѣдуетъ, что

$$\overline{A}=-\frac{b}{a}\,\overline{B}-\frac{c}{a}\cdot\overline{C}-\frac{d}{a}\overline{D},$$

если $a\gtrless 0$; положивъ здѣсь

$$-\frac{b}{a}=p,\ -\frac{c}{a}=q,\ -\frac{d}{a}=r,$$

получимъ:

$$\overline{A}=p.\overline{B}+q.\overline{C}+r.\overline{D}$$

и
$$p+q+r=\frac{-b-c-d}{a}=\frac{a}{a}=1.$$

22. **Средніе векторы.** Положимъ, что отрѣзокъ AB, соединяющій концы двухъ векторовъ $\overline{OA}=\overline{A}$ и $\overline{OB}=\overline{B}$ (фиг. 4), дѣлится въ точкѣ C въ отношеніи $m:n$, такъ что

$$\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}.$$

Обозначивъ векторъ $\overline{OC}$ черезъ $\overline{C}$, получимъ:

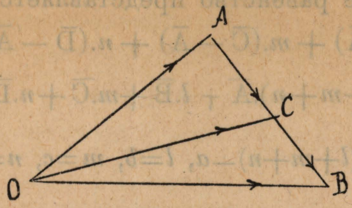
$$\overline{AC}=\overline{C}-\overline{A},\ \overline{CB}=\overline{B}-\overline{C};$$

слѣдовательно,
$$\frac{\overline{C}-\overline{A}}{\overline{B}-\overline{C}}=\frac{m}{n},$$

откуда
$$\overline{OC}=\overline{C}=\frac{n.\overline{A}+m.\overline{B}}{m+n}.$$

Если отрѣзокъ AB дѣлится въ точкѣ C пополамъ, то $m = n$; въ этомъ случаѣ

$$\overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{C}} = \frac{\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}}}{2}.$$



Фиг. 4.

Векторъ $\overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{C}}$, конецъ котораго есть средина отрѣзка, соединяющаго концы векторовъ $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{A}}$ и $\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{B}}$, называютъ *среднимъ* этихъ векторовъ.

23. Пусть $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{A}}$, $\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{B}}$, $\overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{C}}$ суть компланарные векторы. Если прямая AB (фиг. 5) дѣлится въ точкѣ D такъ, что

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} = \frac{m}{n},$$

то, по предыдущему,

$$\overline{\mathrm{OD}} = \overline{\mathrm{D}} = \frac{n.\overline{\mathrm{A}} + m.\overline{\mathrm{B}}}{m + n}.$$

Если, кромѣ того, прямая CD дѣлится въ точкѣ E такъ, что

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{ED}} = \frac{n}{p},$$

то

$$\overline{\mathrm{OE}} = \overline{\mathrm{E}} = \frac{p.\overline{\mathrm{C}} + n.\overline{\mathrm{D}}}{n + p}.$$

Подставивъ сюда найденное выраженіе для вектора $\overline{\mathrm{D}}$, получимъ:

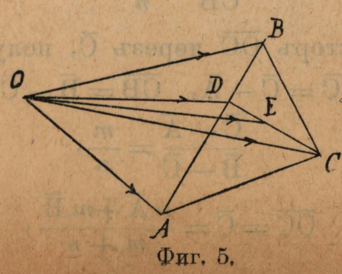
$$\overline{\mathrm{OE}} = \overline{\mathrm{E}} = \frac{n^2.\overline{\mathrm{A}} + mn.\overline{\mathrm{B}} + (m + n)p\overline{\mathrm{C}}}{n^2 + mn + (m + n)p},$$

или

$$\overline{\mathrm{OE}} = \overline{\mathrm{E}} = \frac{a.\overline{\mathrm{A}} + b.\overline{\mathrm{B}} + c.\overline{\mathrm{C}}}{a + b + c},$$

гдѣ

$$a = n^2, \quad b = mn, \quad c = (m + n)p.$$



Фиг. 5.

Если точка E совпадаетъ съ барицентромъ тр-ка ABC, то векторъ $\overline{OE}=\overline{E}$ называется *среднимъ* трехъ векторовъ $\overline{OA}=\overline{A}$, $\overline{OB}=\overline{B}$, $\overline{OC}=\overline{C}$.

Въ этомъ случаѣ $\dfrac{m}{n}=1$ и $\dfrac{n}{p}=2$, такъ что можно положить

$$m=n=1 \text{ и } p=\frac{1}{2};$$

вслѣдствіе этого, $a=b=c=1$ и

$$\overline{OE}=\overline{E}=\frac{\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}}{3}.$$

24. Возьмемъ четыре компланарныхъ вектора $\overline{OA}=\overline{A}$, $\overline{OB}=\overline{B}$, $\overline{OC}=\overline{C}$ и $\overline{OD}=\overline{D}$. Обозначивъ чрезъ $\overline{E}$ и $\overline{F}$ средины діагоналей AC и BD чет-ка ABCD, по предыдущему (22), получимъ:

$$\overline{OE}=\overline{E}=\frac{\overline{A}+\overline{C}}{2},\quad \overline{OF}=\overline{F}=\frac{\overline{B}+\overline{D}}{2};$$

поэтому, если G есть средина EF, то

$$\overline{OG}=\overline{G}=\frac{\overline{E}+\overline{F}}{2}=\frac{\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}}{4}.$$

Векторъ $\overline{OG}=\overline{G}$, опредѣляющійся этою формулою, называется *среднимъ* четырехъ векторовъ $\overline{OA}=\overline{A}$, $\overline{OB}=\overline{B}$, $\overline{OC}=\overline{C}$ и $\overline{OD}=\overline{D}$.

25. Вообще, *среднимъ векторомъ* n векторовъ $\overline{OA_1}=\overline{A}_1$, $\overline{OA_2}=\overline{A}_2$, $\overline{OA_3}=\overline{A}_3, \ldots, \overline{OA_n}=\overline{A}_n$ называется векторъ $\overline{OM}=\overline{M}$, опредѣляющійся формулою

$$\overline{OM}=\overline{M}=\frac{\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3+\ldots+\overline{A}_n}{n}.$$

Конецъ M этого вектора называется *центромъ среднихъ разстояній* или *среднею* точкою системы точекъ A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n$. *)

Изъ разсужденій, приведенныхъ въ рубрикахъ 22 и 23, явствуетъ, что въ случаѣ двухъ и трехъ точекъ средняя точка системы не зависитъ отъ выбора точки O: въ случаѣ двухъ точекъ это есть середина отрѣзка A_1A_2, въ случаѣ трехъ точекъ— центръ тяжести треугольника $A_1A_2A_3$. Обнаружимъ, что и при какомъ угодно числѣ точекъ положеніе центра среднихъ разстояній не зависитъ отъ выбора точки O. Положимъ, что, выбравъ за начало точку O, мы получимъ центръ среднихъ разстояній

---

*) См. *Д. Ефремовъ*. Новая геометрія треугольника. I, 30.

въ точкѣ M; выбравъ же за начало точку O′, получимъ центръ въ точкѣ M′. Согласно опредѣленію,

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OA}_1 + \overline{OA}_2 + \dots + \overline{OA}_n}{n}$$

$$\overline{O'M'} = \frac{\overline{O'A}_1 + \overline{O'A}_2 + \dots + \overline{O'A}_n}{n}.$$

Тогда

$$\overline{OM} - \overline{O'M'} = \frac{(\overline{OA}_1 - \overline{O'A}_1) + (\overline{OA}_2 - \overline{O'A}_2) + \dots + (\overline{OA}_n - \overline{O'A}_n)}{n}.$$

Однако, легко видѣть, что

$$\overline{OA}_i - \overline{O'A}_i = \overline{A_iO'} - \overline{A_iO} = \overline{OO'}\ (i = 1, 2, \dots n).$$

Поэтому

$$\overline{OM} - \overline{O'M'} = \overline{OO'}.$$

Съ другой стороны,

$$\overline{OM} - \overline{O'M} = \overline{MO'} - \overline{MO} = \overline{OO'}.$$

Сопоставляя это съ предыдущимъ равенствомъ, получимъ

$$\overline{O'M} = \overline{O'M'}.$$

Слѣдовательно, точка M совпадаетъ съ точкой M′.

25. *Сумма векторовъ, проведенныхъ къ даннымъ точкамъ изъ средней точки ихъ, равна нулю.*

Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенства

$$\overline{M} = \frac{\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \dots + \overline{A}_n}{n}$$

слѣдуетъ, что

$$\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \dots + \overline{A}_n - n.\overline{M} =$$

$$= (\overline{A}_1 - \overline{M}) + (\overline{A}_2 - \overline{M}) + \dots + (\overline{A}_n - \overline{M}) = 0;$$

но
$$\overline{A}_1 - \overline{M} = \overline{MA}_1,\ \overline{A}_2 - \overline{M} = \overline{MA}_2, \dots;$$

слѣдовательно,

$$\overline{MA}_1 + \overline{MA}_2 + \dots + \overline{MA}_n = 0.$$

26. Если M и N суть среднія точки системъ точекъ A_1, $A_2, \dots, A_m$ и $B_1, B_2, \dots, B_n$, то средняя точка P системы A_1, $A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n$, составленной изъ двухъ первыхъ, находится на прямой MN.

Дѣйствительно, взявъ произвольную точку O и положивъ

$$\overline{OA}_1 = \overline{A}_1,\ \overline{OA}_2 = \overline{A}_2 \dots,\ \overline{OB}_1 = \overline{B}_1,\ \overline{OB}_2 = \overline{B}_2, \dots$$

$$\overline{OM} = \overline{M},\ \overline{ON} = \overline{N},\ \overline{OP} = \overline{P},$$

получимъ:

$$\overline{M} = \frac{\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \dots + \overline{A}_m}{m},$$

$$\overline{N} = \frac{\overline{B}_1 + \overline{B}_2 + \dots + \overline{B}_n}{n}$$

и

$$\overline{P} = \frac{\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \dots + \overline{A}_m + \overline{B}_1 + \overline{B}_2 + \dots + \overline{B}_n}{m+n};$$

слѣдовательно,

$$\overline{P} = \frac{m.\overline{M} + n.\overline{N}}{m+n}.$$

Отсюда

$$m.\overline{M} + n.\overline{N} - (m+n).\overline{P} = 0,$$

при чемъ

$$m + n - (m+n) = 0;$$

значитъ (19), точки M, N, P находятся на одной прямой.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Построеніе кубичнаго корня съ произвольной точностью.

Студента А. Пѣвцова.

Положимъ, что дана слѣдующая задача:

Параллелепипедъ, имѣющій измѣренія a, b и c превратить въ равновеликій ему кубъ.

Алгебраическое рѣшеніе подобной задачи не представляетъ ни малѣйшихъ затрудненій, такъ какъ приводится къ извлеченію корня кубичнаго изъ произведенія abc, что всегда можетъ быть исполнено съ какой угодно точностью. Если же даны три линіи, выражающія въ извѣстномъ масштабѣ измѣренія a, b и c параллелепипеда, и требуется съ помощью циркуля и линейки опредѣлить ребро равновеликаго куба, то, какъ извѣстно, задача эта можетъ быть рѣшена только приблизительно. Въ нижеслѣдующемъ приводится способъ геометрическаго рѣшенія этой задачи съ какой угодно точностью, которая при этомъ легко опредѣляется по нижеприведеннымъ несложнымъ формуламъ для всякаго отдѣльнаго случая.

Способъ этотъ основанъ на слѣдующемъ:

Пусть, какъ и прежде, a, b и c—измѣренія параллелепипеда. Тогда $\sqrt[3]{abc}$ будетъ искомое нами ребро равновеликаго ему куба.

Возьмемъ всевозможныя сочетанія по 2 изъ a, b и c. Ихъ будетъ 3: a и b, a и c, b и c. Взявъ изъ каждой пары среднее геометрическое, найдемъ:

$$(1) \qquad \sqrt{ab}, \ \sqrt{ac}, \ \sqrt{bc};$$

произведеніе этихъ величинъ дастъ намъ опять прежній объемъ abc. Это показываетъ, что три эти новыя количества могутъ быть приняты за измѣренія новаго параллелепипеда, равнаго по объему первоначальному. Но, вмѣстѣ съ тѣмъ, очевидно, *) что относительныя разности между отдѣльными измѣреніями во второмъ случаѣ меньше, чѣмъ въ первомъ, т. е. второй параллелепипедъ по формѣ ближе подходитъ къ кубу.

Возьмемъ опять среднія геометрическія изъ выраженій (1) точно такъ же, какъ дѣлали въ первомъ случаѣ. Получимъ:

$$\sqrt[4]{a^2bc}, \ \sqrt[4]{ab^2c}, \ \sqrt[4]{abc^2}, \text{ произведеніе } abc.$$

Продолжая въ такомъ же порядкѣ, найдемъ:

$$\sqrt[8]{a^3b^3c^2}, \ \sqrt[8]{a^3b^2c^3}, \ \sqrt[8]{a^2b^3c^3}, \text{ произведеніе } abc$$

$$\sqrt[16]{a^6b^5c^5}, \ \sqrt[16]{a^5b^6c^5}, \ \sqrt[16]{a^5b^5c^6}, \qquad \text{,,} \qquad \text{,,}$$

и т. д.

Повторяя вышеприведенное разсужденіе, замѣтимъ, что, продоливъ подобное вычисленіе до извѣстнаго предѣла и принявъ полученныя три величины за измѣренія параллелепипеда, найдемъ, что онъ будетъ весьма мало отличаться отъ куба, сохраняя первоначальный объемъ. Въ дальнѣйшемъ будетъ доказано, что разница между кубомъ и получаемыми такимъ образомъ параллелепипедами можетъ быть сколь угодно малою.

Очевидно, что показатели корней получаемыхъ выраженій будутъ всегда степенью двухъ, и именно такою, сколько разъ мы брали среднія геометрическія. Кромѣ того, получивъ одно выраженіе даннаго порядка, два другихъ найдемъ круговымъ перемѣщеніемъ буквъ.

Вглядываясь внимательнѣй въ получаемыя послѣдовательно выраженія, мы замѣтимъ слѣдующее:

1) Если показатель корня есть нечетная степень двухъ, то показатель одной изъ буквъ на 1 меньше показателей двухъ другихъ, которые (т. е. показ.) равны между собой.

2) Если показатель корня—четная степень двухъ, то показатель одной изъ буквъ на 1 больше двухъ равныхъ между собою показ. другихъ буквъ.

*) Это не вполнѣ такъ; иногда мы можемъ даже удалиться отъ требуемаго значенія корня; но послѣдовательный процессъ, какъ авторъ ниже доказываетъ, дѣйствительно, приводитъ къ цѣли.

Прим ред.

Пользуясь этими замѣчаніями и примѣнимымъ въ данномъ случаѣ закономъ аналогіи, мы выведемъ общее выраженіе средняго геометрическаго съ показателями корней, равными нечетной и четной степени двухъ.

1. *Нечетная степень двухъ.* Найдемъ непосредственнымъ умноженіемъ и извлеченіемъ корня нѣсколько выраженій и, выбравъ изъ нихъ тѣ, у которыхъ показатели корней суть нечетныя степени двухъ, составимъ слѣдующую таблицу:

Показ. корней.	Показ., встрѣч. два раза.	Показ., встрѣч. одинъ разъ.
2^1	1	0
2^3	$3=2^1+1$	2
2^5	$11=2^3+3=2^3+2^1+1$ *)	$10.$

Внимательно разсмотрѣвъ эту табличку, нетрудно будетъ составить общее выраженіе показателей подкоренного количества черезъ показателя корня.

Пусть показатель корня $P=2^{2k+1}$. Тогда, на основаніи вышеприведенной таблички, показатель, встрѣчающійся подъ корнемъ два раза, будетъ:

$$1+2^1+2^3+2^5+\ldots+2^{2k-1}=\frac{2^{2k+1}+1}{3}=\frac{P+1}{3},$$

а показатель одиночный

$$1+2^1+2^3+2^5+\ldots+2^{2k-1}-1=2^1+2^3+2^5+\ldots+2^{2k-1}=$$

$$=\frac{2^{2k+1}-2}{3}=\frac{P-2}{3}.$$

Очевидно, что количества $\frac{P+1}{3}$ и $\frac{P-2}{3}$ будутъ всегда цѣлыми числами (по теоремѣ Фермата).

Такимъ образомъ, общій видъ средняго геометрическаго съ показателемъ корня, равнымъ нечетной степени двухъ, будетъ слѣдующій:

$$\sqrt[2^{2k+1}]{a^{\frac{2^{2k+1}+1}{3}}\,b^{\frac{2^{2k+1}+1}{3}}\,c^{\frac{2^{2k+1}-2}{3}}}\text{ или }\sqrt[P]{a^{\frac{P+1}{3}}\,b^{\frac{P+1}{3}}\,c^{\frac{P-2}{3}}}.$$

*) Показатели складываются при перемноженіи.

2.) *Четная степень двухъ.* Продѣлавъ все вышеписанное для даннаго случая, найдемъ:

Показ. корня.	Показ., встр. 2 раза.	Показ., встр. 1 разъ.
2^2	1	2
2^4	$5=1+2^2$	6
2^6	$21=5+2^4=1+2^2+2^4$	22
. . . . .	. . . .	. . . .
$2^{2k}=R$	$1+2^2+2^4+2^6+\ldots+2^{2(k-1)}$	$1+2^2+2^4+\ldots+2^{2(k-1)}+1=$
	$=\frac{2^{2k}-1}{3}=\frac{R-1}{3}$	$=\frac{2^{2k}+2}{3}=\frac{R+2}{3}$;

общій видъ средн. геом.:

$$\sqrt[2^{2k}]{a^{\frac{2^{2k}-1}{3}}\,b^{\frac{2^{2k}-1}{3}}\,c^{\frac{2^{2k}+2}{3}}} \text{ или } \sqrt[R]{a^{\frac{R-1}{3}}\,b^{\frac{R-1}{3}}\,c^{\frac{R+2}{3}}}.$$

Для доказательства того, что послѣдовательно получаемыя среднія геометрическія безпредѣльно приближаются по величинѣ къ ребру куба, равновеликаго данному параллелепипеду, достаточно доказать, что отношеніе ихъ къ $\sqrt[3]{abc}$ въ предѣлѣ (т. е. когда $k=\infty$) равно единицѣ. Чтобы показать это, найдемъ общій видъ этого отношенія.

1.) $$\sqrt[2^{2k+1}]{a^{\frac{2^{2k+1}+1}{3}}\,b^{\frac{2^{2k+1}+1}{3}}\,c^{\frac{2^{2k+1}-2}{3}}} : \sqrt[3]{abc} =$$

$$= \sqrt[3.2^{2k+1}]{a^{2^{2k+1}+1}\,b^{2^{2k+1}+1}\,c^{2^{2k+1}-2}} :$$

$$: \sqrt[3.2^{2k+1}]{a^{2^{2k+1}}\,b^{2^{2k+1}}\,c^{2^{2k+1}}} = \sqrt[3.2^{2k+1}]{\frac{ab}{c^2}} = \left(\frac{ab}{c^2}\right)^{\frac{1}{3.2^{2k+1}}} \quad \ldots \quad (2)$$

2.) $$\sqrt[2^{2k}]{a^{\frac{2^{2k}-1}{3}}\,b^{\frac{2^{2k}-1}{3}}\,c^{\frac{2^{2k}+2}{3}}} : \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3.2^{2k}]{a^{2^{2k}-1}\,b^{2^{2k}-1}\,c^{2^{2k}+2}} :$$

$$: \sqrt[3.2^{2k}]{a^{2^{2k}}\,b^{2^{2k}}\,c^{2^{2k}}} = \sqrt[3.2^{2k}]{\frac{c^2}{ab}} = \left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\frac{1}{3.2^{2k}}} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Если k безпредѣльно возрастаетъ, то отношенія (2) и (3) стремятся къ единицѣ, какъ къ своему предѣлу, что и требовалось доказать.

Если одно изъ выраженій $\frac{ab}{c^2}$ и $\frac{c^2}{ab}$ больше единицы, то другое, очевидно, меньше и, слѣдовательно, если одно изъ среднихъ геометрическихъ больше искомаго ребра куба, то слѣдующее, имѣющее показателемъ корня степень двухъ на единицу бо́льшую, чѣмъ въ первомъ, и составленное аналогично первому, (т. е. показатель, встрѣчающійся подъ корнемъ одинъ разъ, стоитъ у прежней буквы), будетъ меньше ребра куба, иначе говоря, приближеніе къ предѣлу совершается съ двухъ сторонъ, увеличеніемъ однихъ среднихъ геометрич. и уменьшеніемъ другихъ.

Показатель степени двухъ въ показателѣ корня указываетъ, сколько разъ взято среднее геометрическое, а при построеніи — сколько разъ выполнено построеніе.

Точность $(2k+1)$-аго построенія (или $2k$-аго) выражается формулою: $\upsilon = \sqrt[3.2^{2k+1}]{\frac{ab}{c^2}} - 1$ $\left(\text{или же } \upsilon = \sqrt[3.2^{2k}]{\frac{c^2}{ab}} - 1\right)$, при чемъ при круговомъ перемѣщеніи буквъ a, b и c получатся три выраженія для точности. При этомъ очевидно, что, чѣмъ ближе отношеніе, аналогичное $\frac{ab}{c^2}$ $\left(\text{или } \frac{c^2}{ab}\right)$ къ единицѣ, тѣмъ меньшее число построеній надо выполнить для полученія ребра куба съ данной точностью.

Способъ этотъ можетъ быть также примѣненъ для извлеченія кубичнаго корня изъ чиселъ. Если дано число, изъ котораго требуется извлечь кубичный корень, то мы разлагаемъ его на три произвольныхъ множителя, по возможности, близкихъ другъ къ другу, и поступаемъ по вышеуказанному. Лучше всего, конечно, разлагать на цѣлые множители. Такъ, напримѣръ, для извлеченія $\sqrt[3]{2}$ (для рѣшенія задачи объ удвоеніи куба) можно взять множители 1, 1 и 2 и т. д.

Въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ легко рѣшить, сколько разъ нужно выполнить построеніе среднихъ геометрическихъ, чтобы получить результатъ съ требуемой точностью. *)

*) Это опредѣленіе можетъ быть сопряжено съ значительными затрудненіями. Однако, самая идея представляется намъ очень трудной,

Прим. ред.

Отклоненіе свободно-падающаго тѣла къ востоку.

Еще въ 1679 году Newton писалъ д ру Hooke'у, что если бросить тяжелое тѣло съ достаточной высоты, то оно должно, благодаря суточному вращенію земли, упасть на землю нѣсколько къ востоку отъ вертикальной линіи, проходящей черезъ исходную точку. Это явленіе, приводимое во всѣхъ учебникахъ космографіи и астрономіи въ качествѣ доказательства вращенія земли вокругъ оси, достаточно знакомо всѣмъ въ теоріи. Что-же касается практики, то наблюдалось подобное отклоненіе весьма рѣдко и всегда съ недостаточной точностью.

Причиною отсутствія точныхъ наблюденій надъ отклоненіемъ свободно падающихъ тѣлъ къ востоку служитъ незначительность этихъ отклоненій и вліяніе различныхъ постороннихъ обстоятельствъ, искажающихъ весьма сильно явленіе. Однимъ изъ такихъ обстоятельствъ является трудность опустить тѣло, не придавъ ему никакого, хотя бы и незначительнаго, толчка вбокъ. Различные наблюдатели пользовались для этого различными способами: одни пережигали нитку, поддерживающую тяжелый шарикъ, служащій для опытовъ; другіе зажимали нитку въ особые зажимы, открывающіеся при легкомъ нажатіи рычажка или винта; пробовали разрѣзаніе нитки. Наконецъ, былъ употребленъ и такой способъ: нагрѣтый шарикъ вкладывался въ кольцо, діаметръ котораго былъ нѣсколько больше діаметра шарика въ холодномъ состояніи, но меньше таковаго въ нагрѣтомъ, при охлажденіи шарикъ проходилъ черезъ кольцо и падалъ. Но, помимо несовершенства механизма спуска шарика, трудно добиться спокойствія его и въ то время, пока онъ еще подвѣшенъ, чему препятствуютъ, между прочимъ, и колебанія, хотя и незначительные, зданія, гдѣ производились опыты, и неспокойствіе воздуха; послѣднее обстоятельство даетъ себя знать и при самомъ паденіи тѣла.

Всѣ эти причины дѣлаютъ опыты съ паденіемъ тѣлъ крайне сложными и кропотливыми, и, благодаря имъ-же, весьма трудно добиться точныхъ результатовъ. Эта именно неточность прежнихъ опытовъ побудила парижскаго астронома C. Flammarion'а предпринять повтореніе ихъ со всѣми возможными предосторожностями.

Прежде чѣмъ излагать, впрочемъ, результаты опытовъ Flammarion'а, приведемъ свѣдѣнія о прежнихъ опытахъ въ томъ-же направленіи.

Первымъ экспериментаторомъ здѣсь является итальянскій аббатъ J.-B. Guglielmini, производившій свои опыты въ Болоньѣ въ башнѣ *degli Asinelli*. Послѣ ряда неудачъ онъ въ іюнѣ—августѣ 1791 года получилъ изъ 16 опытовъ среднее отклоненіе къ востоку въ 16.7 мм. (высота паденія была около 78 метровъ), но, кромѣ отклоненія къ востоку, имъ было замѣчено еще уклоненіе къ югу на 11.75 мм. Теорія даетъ для восточнаго отклоненія 11.0 мм. и не даетъ никакого отклоненія къ югу. Впрочемъ, опыты Guglielmini не могутъ считаться цѣнными, такъ какъ въ нихъ была допущена одна ошибка, весьма значительная: направленіе вортикальной линіи опредѣлено было не во время самихъ опытовъ, а лишь спустя шесть мѣсяцевъ.

Во второй разъ опыты съ паденіемъ тѣлъ были произведены Benzenberg'омъ въ Гамбургѣ, сначала въ башнѣ St.-Michel (въ октябрѣ 1802 года), а затѣмъ въ каменноугольной шахтѣ *zur alten Rosskunst* (въ октябрѣ 1804 года). Средній результатъ первыхъ опытовъ былъ: восточное отклоненіе 9.023 мм. и южное 4.48 мм. (при паденіи съ высоты около 76.3 метровъ); въ теоріи-же должно было быть 8.91 мм. и 0 мм. Хотя здѣсь и замѣчается почти полное совпаденіе теоріи и практики для восточнаго отклоненія, но полное несовпаденіе теоріи съ практикой въ отношеніи южнаго отклоненія значительно уменьшаетъ цѣнность перваго совпаденія. Прибавимъ еще, что отдѣльныя наблюденія давали весьма различныя числа: отъ 47 мм. къ востоку до 31.5 мм. къ западу.

Средній результатъ опытовъ Benzenberg'а въ 1804 г. былъ таковъ: восточное отклоненіе изъ 29 опытовъ оказалось 13.3 мм. (теоретическая величина 13.7 мм.), сколько-нибудь значительнаго южнаго отклоненія не получилось. Эти результаты можно бы считать вполнѣ хорошими, если бы не разногласія между собою отдѣльныхъ опытовъ, дававшихъ отклоненія къ востоку до 45 мм., къ западу до 22.5 мм., къ югу до 34 мм. и къ сѣверу до 43 мм.

Послѣ Benzenberg'а за опыты съ паденіемъ тѣлъ взялся проф. Reich, который воспользовался шахтой *Dreibrüderschacht* въ рудникѣ *Reschert Glück* близъ Фрейберга. Не останавливаясь на подробностяхъ оборудованія опытовъ, скажемъ только, что всѣ возможныя мѣры для достиженія возможно лучшихъ результатовъ были приняты. Высота паденія была 158.50 метровъ. Опыты произведены въ шесть пріемовъ (серій), всего наблюдено 107 паденій. Въ среднемъ получилось восточное отклоненіе 28.396 мм. (теорет. величина 27.5 мм.) и южное 4.37 мм. (теорет. величина 0 мм.). Такимъ образомъ, оказывается, что и эти опыты страдаютъ тѣми-же недостатками, что̀ и опыты Benzenberg'а, кромѣ того, и здѣсь результаты отдѣльныхъ серій (не говоря уже объ отдѣльныхъ опытахъ) сильно различаются одинъ отъ другого, напр., 4-ая серія даетъ для вост. откл. 46.34 мм., а 5-ая серія 10.70 мм.; южное отклоненіе получилось въ трехъ серіяхъ, а въ остальныхъ—сѣверное, доходящее даже до 16 мм.; отдѣльные же опыты даютъ отъ 179 мм. вост. откл. до 105 западнаго, и отъ 187 мм. южнаго до 151 сѣвернаго.

Такова исторія опытовъ съ паденіемъ тѣлъ. Какъ сказано выше, Flammarion рѣшился воспроизвести ихъ снова, пользуясь всѣми возможными приспособленіями, и, дѣйствительно, выполнилъ ихъ въ промежутокъ времени съ 20 апрѣля по 14 мая сего года.

Отчетъ о нихъ мы находимъ въ послѣдней (іюльской) книжкѣ „Bulletin de la Société Astronomique de France".

Мѣсто опытовъ—Пантеонъ, въ Парижѣ; высота паденія 68 метровъ; теоретическая величина восточнаго отклоненія 8.11 мм. Какъ видно изъ предыдущаго изложенія исторіи подобныхъ опытовъ, однимъ изъ самыхъ трудныхъ пунктовъ является способъ подвѣса и опусканія шариковъ. Flammarion отказался отъ тѣхъ способовъ, которые примѣнялись прежними наблюдателями, и воспользовался электромагнитомъ, при чемъ шарики бралъ изъ закаленной стали (діаметръ шариковъ 15.84 мм., вѣсъ 16.25 грамма). При паденіи шарики попадали на свинцовыя пластины (толщ. $2^1/_2$ мм.), прикрѣплявшіяся къ стальной доскѣ, покоившейся, въ свою очередь, на столѣ. На свинцовыхъ пластинахъ были нанесены двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя, и пластины оріентировались по этимъ линіямъ на С.-Ю и В.-З. Точка пересѣченія прямыхъ приходилась не вполнѣ точно подъ точкою, изъ которой падали шарики, а именно, на 2.9 мм. къ Западу и на 1.3 мм. къ Югу. При паденіи на пластины шарики оставляли слѣды, положеніе которыхъ и опредѣлялось относительно сказанныхъ прямыхъ. Каждая свинцовая пластина употреблялась для 11—13 опытовъ.

Всего Flammarion'омъ произведено 14 серій опытовъ (169 отдѣльныхъ опытовъ); изъ нихъ исключены 1-ая серія, какъ подготовительная, и 7-ая серія, которая совпала со временемъ открытія большой двери Пантеона, запертой на зиму, что̀ вызвало сильныя движенія воздуха во всемъ зданіи; такимъ образомъ, осталось 12 серій (144 опыта), результаты которыхъ сгруппированы въ слѣдующей таблицѣ (отклоненія въ миллиметрахъ):

№№ серій.	Число опытовъ въ серіи.	Среднія отклоненія: Вост.	Западн.	Южн.	Сѣв.
II	13	8.5	—	—	3.5
III	13	—	0.2	5.5	—
IV	12	7.2	—	—	0.0
V	13	1.0	—	—	6.1
VI	12	11.3	—	—	7.7
VIII	11	3.4	—	—	4.5
IX	12	6.1	—	—	1.0
X	12	5.5	—	—	3.9
XI	12	6.8	—	0.1	—
XII	11	3.3	—	—	5.1
XIII	12	15.8	—	6.8	—
XIV	11	7.7	—	—	0.1
Среднее изъ 144 опытовъ		**6.3**	—	—	**1.6.**

Изъ этихъ 144 опытовъ восточное отклоненіе наблюдалось въ 95 случаяхъ (наибольшее 45.7 мм.), западное—въ 49 случаяхъ (max. 22.8 мм.), южное отклоненіе—въ 64 случаяхъ (max. 37.4 мм.) и сѣверное—въ 80 случаяхъ (max. 45.7 мм.).

Такимъ образомъ, и эти опыты, оказывается, нисколько не лучше старыхъ опытовъ Benzenberg'а и Reich'а. Интересно въ нихъ, впрочемъ, то, что въ среднемъ результатѣ не получилось южнаго отклоненія, столь упорно получавшагося въ прежнихъ опытахъ; взамѣнъ того, оказалось сѣверное отклоненіе и довольно значительное. По теоріи и должно, собственно говоря, получиться отклоненіе къ сѣверу, но настолько ничтожное, что никакими опытами оно никогда обнаружено не будетъ: при высотѣ паденія въ 150 метровъ это отклоненіе выражается всего только нѣсколькими милліонными долями миллиметра.

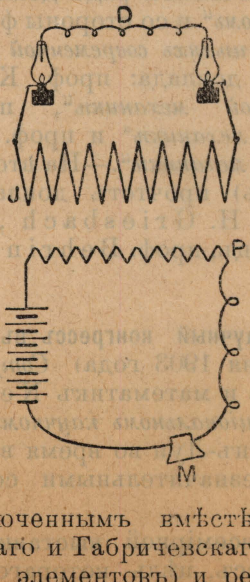
Заключая свой отчетъ, Flammarion высказываетъ надежду на возможность снова повторить опыты, съ еще бо́льшими предосторожностями.

В. А. Е.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Звучащее пламя. Гг. А. Бачинскій и В. Габричевскій недавно подмѣтили слѣдующее любопытное явленіе.

Если зажимы вторичной обмотки индукціонной катушки (J на прилагаемомъ рисункѣ) соединить съ пламенами двухъ керосиновыхъ лампъ (или свѣчей), то звукъ, произведенный передъ



микрофономъ (M), включеннымъ вмѣстѣ съ источникомъ тока (для опытовъ Бачинскаго и Габричевскаго служила аккумуляторная баттарея изъ семи элементовъ) и реостатомъ въ первичную обмотку катушки (P), будетъ повторяться пламенемъ лампъ или свѣчей. Лампы могутъ быть изолированы другъ отъ друга или соединены помощью проволоки (D); послѣднее обстоятельство нѣсколько способствуетъ усиленію звука. При опытахъ лампы и микрофонъ находились въ разныхъ помѣщеніяхъ, разстояніе между которыми равнялось 30 метрамъ. Лампы воспроизводили пѣніе, свистъ и отдѣльныя слова.

Опытъ былъ опубликованъ въ „Phys. Zeit.“ № 14, 1903 г.; настоящая замѣтка заимствована изъ журнала „Электротехникъ“.

75-ый съѣздъ нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей. Очередной *(75-ый) съѣздъ нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей* будетъ происходить отъ 21—26 сентября (н. ст.) 1903 года въ г. Касселѣ.

Президентомъ съѣзда избранъ проф. химіи Берлинскаго Университета Van't Hoff.

Мы приводимъ изъ программы съѣзда пункты, посвященные общимъ вопросамъ.

На первомъ общемъ собраніи, 21-го сентября, проф. химіи въ Бреславлѣ Ladenburg прочтетъ докладъ на тему: „*Вліяніе естествознанія на міровоззрѣніе*“; проф. психологіи въ Утрехтѣ Th. Ziehen „Физіологическая психологія чувствъ и аффектовъ“. —23-го сентября на соединенномъ засѣданіи обѣихъ группъ будутъ прочитаны слѣдующіе доклады: проф. A. Penk (Вѣна)— „О геологическомъ времени“; проф. G. J. Schwalbe (Страсбургъ)—„О происхожденіи человѣка“; д-ръ M. Alsberg (Кассель) — „Наслѣдственное вырожденіе вслѣдствіе соціальныхъ условій“.—24-го сентября на общемъ засѣданіи естественно-научныхъ группъ будетъ прочитанъ рядъ докладовъ съ медицинской стороны „*О терапіи свѣтомъ*“ и со стороны физиковъ „*О естественно-научныхъ результатахъ и цѣляхъ современной механики*“. Послѣднему вопросу посвящены три доклада: проф. K. Schwarzschild'a (Геттингенъ) „*О небесной механикѣ*“, проф. Sommerfeld'a (Аахенъ) „*О технической механикѣ*“ и проф. O. Fischer'a (Лейпцигъ) „*О физіологической механикѣ*“.—На второмъ общемъ собраніи W. Ramsay (Лондонъ) прочтетъ докладъ „*О періодической системѣ элементовъ*“; проф. H. Griesbach „*О современномъ состояніи школьной гигіены*“. Наконецъ, проф. Behring (Марбургъ) „*О борьбѣ съ туберкулезомъ*“.

Интернаціональный научный конгрессъ въ Сенъ-Луи въ 1904 году. Въ № 25 (отъ 22-го іюня 1903 года) *Comptes rendus* знаменитый американскій астрономъ и математикъ Newcomb опубликовалъ сообщеніе объ *интернаціональномъ научномъ конгрессѣ*, имѣющемъ быть созваннымъ въ Сенъ-Луи во время всемірной выставки. Мы приводимъ здѣсь, съ незначительными сокращеніями, переводъ этого сообщенія.

„Во время нашей всемірной выставки въ Сенъ-Луи готовится научный конгрессъ, цѣль котораго состоитъ въ реализаціи единенія выдающихся ученыхъ, — единенія, долженствующаго превзойти всѣ попытки, сдѣланныя въ этомъ направленіи до сихъ поръ. На этомъ конгрессѣ представители всѣхъ вѣтвей человѣческихъ знаній будутъ обсуждать взаимныя соотношенія отдѣльныхъ наукъ, ихъ прогрессъ въ теченіе истекшаго вѣка и ихъ приложенія къ нуждамъ человѣчества. Цѣлью этого предпріятія служитъ стремленіе къ объединенію многочисленныхъ вѣтвей научной дѣятельности; ибо такое объединеніе помогло бы возстановить взаимодѣйствіе между различными дисциплинами.

„Чтобы обезпечить успѣхъ такого проекта, необходимо обладать заранѣе выработаннымъ планомъ, детали котораго точно опредѣлены. Въ виду этого, директора выставки организовали особый административный комитетъ и нѣсколько совѣтовъ; членами ихъ избраны значительнѣйшіе люди страны. Эти совѣты и комитетъ выработали програму конгресса, существенное содержаніе которой слѣдующее.

„Конгрессъ соберется 19-го сентября 1904 года. Это время выбрано преимущественно по климатическимъ соображеніямъ. Кромѣ того, профессора университетовъ Европы и Америки послѣ конгресса успѣютъ вернуться домой къ началу зимняго семестра *).

„Утро перваго дня будетъ посвящено торжественному общему засѣданію, на которомъ, между прочимъ, будетъ произнесена *рѣчь о единствѣ наукъ и о цѣли конгресса*. Пополудни того же дня конгрессъ раздѣлится на семь большихъ отдѣловъ, соотвѣтственно четыремъ областямъ нашихъ знаній и тремъ областямъ ихъ приложеній.

„Второй день будетъ посвященъ докладамъ въ 26 подотдѣлахъ наукъ и ихъ приложеній. Эти доклады будутъ общаго характера и послужатъ введеніемъ къ нижеслѣдующему.

„На третій день конгрессъ распадется на 130 секцій (приблизительно), каждая изъ которыхъ составитъ вѣтвь, связанную съ остальными. Въ каждой изъ этихъ секцій будутъ сдѣланы по два доклада. Засѣданія эти будутъ продолжаться четыре дня.

„Дирекція выставки издастъ отчеты конгресса".

Проникновеніе лучей свѣта через тѣло человѣка. Dr. J. W. Kime сообщаетъ въ журналѣ „Scientific American" о своихъ опытахъ, обнаруживающихъ, что солнечный свѣтъ въ сравнительно короткое время проникаетъ чрезъ значительную толщу человѣческаго тѣла. Онъ связалъ небольшой негативъ и бромо-желатиновую пластинку и помѣстилъ ихъ между зубами и щекой экспериментируемаго субъекта; при этомъ были приняты всѣ предосторож-

---

*) Въ американскихъ университетахъ зимній семестръ начинается въ концѣ сентября.

Прим. ред.

ности, чтобы свѣтъ не проникалъ черезъ ротъ. Затѣмъ щека была выставлена подъ дѣйствіе солнечныхъ лучей Опытъ производился въ февралѣ; тѣмъ не менѣе не позже 40 секундъ изображеніе обозначалось на пластинкѣ. Одинъ изъ субъектовъ, подвергавшихся такому эксперименту, имѣлъ короткую, но довольно густую черную бороду; это отразилось на дѣйствіи экспозиціи: отпечатокъ оказался блѣднѣе. Другой субъектъ былъ негръ съ толстыми мясистыми щеками; результаты экспозиціи были слабѣе, но отпечатокъ все же явственно обозначался.

Леченіе лучами радія. Можно считать установленнымъ, что проф. Gussenbauer въ Вѣнѣ въ одномъ случаѣ съ успѣхомъ примѣнилъ лучи радія къ леченію рака. Опухоль совершенно исчезла подъ вліяніемъ лучей бромистаго радія.

Газы, содержащіеся въ бромистомъ радіѣ. Въ послѣднемъ (1759) № анг. „Nature" W. Ramsay и F. Soddy сообщаютъ слѣдующее:

Rutherford и Soddy указали на постоянное присутствіе гелія въ металлахъ, содержащихъ уранъ; по ихъ мнѣнію, это обстоятельство можетъ служить указаніемъ на то, что этотъ газъ, быть можетъ, является однимъ изъ конечныхъ продуктовъ выдѣленія радіо-активныхъ веществъ. Болѣе того, Rutherford опредѣлилъ массу одной изъ частицъ, образующихъ „α — лучи" радія *). Онъ пришелъ къ заключенію, что масса такой частицы приблизительно въ два раза больше массы атома водорода. Эти α—частицы легко абсорбируются твердыми тѣлами и, повидимому, центрируются въ соляхъ радія и въ радіоактивныхъ минералахъ.

„Въ теченіе нѣсколькихъ мѣсяцевъ мы занимались изслѣдованіемъ спектра „радіоактивной эманаціи" радія. Эта работа дала намъ случай изслѣдовать газы, содержащіеся въ 20 mgrs бромистаго радія, который былъ нами взятъ въ твердомъ состояніи. Эти постоянно образующіеся газы были уже частью изучены изслѣдователями Sichel'емъ и Bodländer'омъ, которые нашли, что они состоятъ, главнымъ образомъ, изъ водорода и нѣкотораго количества кислорода. Мы нашли, что по удаленіи изъ газовъ, выдѣляемыхъ нашимъ образцомъ бромистаго радія, водорода и кислорода, спектръ обнаружилъ присутствіе двууглекислаго газа. Когда мы удалили двууглекислый газъ, а вмѣстѣ съ нимъ значительную часть „эманаціи", остатокъ явственно показалъ линію D_3 гелія. Мы заключили этотъ газъ въ трубку и сличили его спектръ со спектромъ, даваемымъ трубкой съ геліемъ; совпаденіе было почти полное".

Если это наблюденіе оправдается, то оно послужитъ подтвержденіемъ высказаннаго выше предположенія.

*) См. рефератъ „Радій и его лучи", „Вѣстникъ" № 343.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 364 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$(x-a)(x-2a)(x-3a)(x-4a)=b.$$

С. Адамовичъ (Двинскъ).

№ 365 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[3]{5x+2}+\sqrt[3]{2x-2}=5.$$

Г. Огановъ (Эривань).

№ 366 (4 сер.). Въ полушаръ даннаго радіуса R вписать цилиндръ наибольшаго объема (подъ вписаннымъ въ полушаръ подразумѣвается такой цилиндръ, одна изъ окружностей основаній котораго лежитъ на кривой, а другая на плоской части поверхности полушара).

Л. Ямпольскій (Одесса).

№ 367 (4 сер.). Найти на данной окружности двѣ точки A и B такъ, чтобы сумма квадратовъ перпендикуляровъ AM и BN, опущенныхъ изъ точекъ A и B на произвольный діаметръ, была постоянной

А. Янковскій.

№ 368 (4 сер.). Доказать справедливость тожества

$$2\cos\frac{a}{2}\sin\left(\frac{a}{4}+15^0\right)\cos\left(\frac{a}{4}-15^0\right)=\sin\left(45^0+\frac{3a}{4}\right)\cos\left(45^0-\frac{a}{4}\right).$$

Н. С. (Одесса).

№ 369 (4 сер.). Зная длину l желѣзнаго стержня при 0^0 и коэффиціентъ k кубическаго расширенія желѣза, найти длину этого стержня при той температурѣ, при которой термометры Фаренгейта и Реомюра показываютъ одно и то же число градусовъ.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 285 (4 сер.). *При барометрическомъ давленіи въ* 76 *сант погружаютъ узкую цилиндрическую трубку на половину ея длины* l *въ сосудъ со ртутію. Закрывъ верхнее отверстіе трубки, ее вынимаютъ изъ ртути. Опредѣлить, какая часть ртути выльется и какая останется въ трубкѣ?*

Пусть x—выраженная въ сантиметрахъ длина части трубки, заполненной оставшейся ртутью; тогда, полагая, что l также дано въ сантиметрахъ, $l-x$ есть длина части трубки, наполненной расширившимся воздухомъ, а $\frac{l}{2}:(l-x)$ есть отношеніе (въ виду цилиндрической формы трубки) первоначальнаго и новаго объема, занимаемаго воздухомъ. Называя давленіе расширившагося воздуха черезъ h, по закону Бойль-Маріотта, имѣемъ: $h:76=\frac{l}{2}:(l-x)$, откуда $h=\frac{76l}{2(l-x)}\cdot$ Такимъ образомъ, расширившійся воздухъ и оставшаяся ртуть давятъ вмѣстѣ, какъ столбъ ртути, высотой въ $\frac{76l}{2(l-x)}+x$ сантиметровъ, и для того, чтобы ртуть перестала выливаться, необходимо и достаточно, чтобы это давленіе равнялось давленію наружнаго воздуха. Поэтому

$$\frac{76l}{2(l-x)}+x=76,\quad 2x^2-2(76+l)x+76l=0,$$

откуда

$$x_1=\frac{l+76-\sqrt{l^2+76^2}}{2},\quad x_2=\frac{l+76+\sqrt{l^2+76^2}}{2}\quad (1).$$

Ариѳметическое значеніе выраженія $\sqrt{l^2+76^2}$ болѣе l и болѣе 76, а потому (см. (1)) $x_1=\frac{l}{2}-\frac{\sqrt{l^2+76^2}-76}{2}<\frac{l}{2}$, $x_2>l$, такъ что отвѣтъ на искомый вопросъ даетъ x_1. Слѣдовательно, отношеніе объема оставшейся части ртути къ первоначальному ея объему равно $x_1:\frac{l}{2}=1-\left(\sqrt{1+\left(\frac{76}{l}\right)^2}-\frac{76}{l}\right)$; вычитая это отношеніе изъ единицы, находимъ, что отношеніе объема вылившейся части ртути къ первоначальному ея объему равно $\sqrt{1+\left(\frac{76}{l}\right)^2}-\frac{76}{l}\cdot$

Л. Ямпольскій (Braunschweig); *Г. Огановъ* (Эривань).

№ 287 (4 сер.). *Опредѣлить уголъ, составленный образующей конуса, описаннаго около полушара даннаго радіуса, съ плоскостью основанія, зная, что боковая поверхность этого конуса достигаетъ* minimum'a.

Пусть M—вершина конуса, O—центръ полушара, AMC—осевое сѣченіе конуса, В—точкая касанія образующей MC къ поверхности полушара. Называя радіусъ OB шара черезъ r, радіусъ основанія OC конуса черезъ x, образующую MC черезъ y, уголъ образующей MC съ плоскостью основанія конуса черезъ α и боковую поверхность конуса черезъ S, имѣемъ:

$$x=\frac{r}{\sin\alpha},\quad y=\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{r}{\sin\alpha\cos\alpha};\quad S=\pi xy=\frac{\pi r^2}{\sin^2\alpha\cos\alpha}\quad (1).$$

Изъ формулы (1) видно, что поверхность S достигаетъ minimum'a тогда, когда выраженіе $\sin^2\alpha\cos\alpha$ достигаетъ maximum'a. Называя это выраженіе черезъ u и замѣчая, что въ данномъ случаѣ u^2 и u достигаютъ maximum'а одновременно, будемъ искать maximum выраженія u^2. Замѣчая, что

$$u^2 = \sin^4\alpha\cos^2\alpha = (1-\cos^2\alpha)^2\cos^2\alpha = (1-z)^2.z \qquad (2),$$

гдѣ положено $z = \cos^2\alpha$, и что сумма выраженій $1-z$ и z есть величина постоянная, находимъ, что u^2 достигаетъ maximum'а и вмѣстѣ съ тѣмъ S minimum'а при условіи

$$\frac{1-z}{2} = z,\quad \text{откуда } z = \cos^2\alpha = \frac{1}{3};\quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} \qquad (3).$$

Логариѳмируя формулу (3), получимъ $\lg\cos\alpha = 9{,}76149$, откуда съ помощью таблицъ находимъ: $\alpha = 54^0 43' 50''$.

Н. Гончаровъ (Короча); *Г. Огановъ* (Эривань); *А. Заикинъ* (Самара); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig); *В. Бергеръ* (Ильинцы); *И. Плотникъ* (Одесса).

№ **294** (4 сер.). *Построить вписуемый въ кругъ даннаго радіуса* R *четыреугольникъ* ABCD, *зная отношеніе* AB : CD *и разстоянія каждой изъ двухъ другихъ сторонъ отъ центра описаннаго круга.*

Предположимъ, что задача рѣшена; отложимъ на дугѣ ABC дугу $AB' = \smile BC$; тогда и $\smile AB = \smile B'C$, такъ какъ $\smile AB + \smile BC = \smile AB' + \smile B'C$. Слѣдовательно хорды AB и BC также равны соотвѣтственно хордамъ $B'C$ и AB'. Постараемся построить раньше четыреугольникъ $AB'CD$, отъ котораго уже легко перейти къ построенію четыреугольника $ABCD$. Пусть O—центръ описаннаго круга, m и n—соотвѣтственныя разстоянія сторонъ AD и BC отъ точки O, $\frac{p}{q}$ — данная величина отношенія $\frac{AB}{CD}$. Для построенія четыреугольника $AB'CD$ опишемъ радіусомъ R окружность изъ произвольной точки O, затѣмъ отложимъ отъ точки O отрѣзокъ $OK = m$, возставимъ въ точкѣ K перпендикуляръ къ прямой OK и продолжимъ его до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ P и Q; подобнымъ же образомъ построимъ хорду $P'Q'$, отстоящую отъ центра O на данномъ разстояніи n. Изъ произвольной точки A окружности O сдѣлаемъ на ней засѣчки D и B' соотвѣтственно радіусами, равными PQ и $P'Q'$ *); раздѣлимъ затѣмъ отрѣзокъ $B'D$ соотвѣтственно внутреннимъ и внѣшнимъ образомъ въ точкахъ X и Y въ данномъ отношеніи $\frac{p}{q}$ и на отрѣзкѣ XY построимъ, какъ на діаметрѣ, окружность; та точка встрѣчи C этой окружности съ окружностью O, которая не лежитъ на дугѣ $B'AD$, есть искомая четвертая вершина четыреугольника $AB'CD$; дѣйствительно, окружность, имѣющая діаметромъ XY, есть геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ точекъ B' и D находятся въ данномъ отношеніи $\frac{p}{q}$, а потому $\frac{B'C}{CD} = \frac{p}{q}$.

Построивъ четыреугольникъ $AB'CD$, отложимъ на дугѣ $AB'C$ дугу $AB = B'C$; четыреугольникъ $ABCD$ есть искомый.

Я. Дубновъ (Одесса); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig); *Г. Огановъ* (Эривань).

№ **296** (4 сер.). *Доказать, что при всякомъ цѣломъ значеніи* n *числовая величина выраженія* n(n²—49) (n²+49) *дѣлится на* 30.

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Если n число четное, то разсматриваемое выраженіе, дѣлясь на n, дѣлится на 2; если n нечетное, то разность n^2-49 двухъ нечетныхъ чиселъ

---

*) Всѣхъ засѣчекъ этого рода четыре, и онѣ даютъ для начала построенія двѣ вообще различныя комбинаціи.

дѣлится на 2, а потому и все выраженіе дѣлится на 2. Если n кратно 3, то и разсматриваемое выраженіе кратно 3; если n не кратно 3, то n есть число вида $3k \pm 1$, гдѣ k число цѣлое, а потому въ этомъ случаѣ $n^2 - 49 = (3k \pm 1)^2 - 49 = 3(3k^2 \pm 2k) - 48$, что представляетъ собою число, кратное 3, а потому и число $n(n^2-49)(n^2+49)$ кратно 3. Если n кратно 5, то и разсматриваемое выраженіе кратно 5; если n не кратно 5, то n есть число одного изъ двухъ видовъ $5k \pm 2$ или $5k \pm 1$, гдѣ k—число цѣлое. Въ первомъ случаѣ n^2-49 дѣлится на 5, такъ какъ

$$n^2 - 49 = (5k \pm 2)^2 - 49 = 5(5k^2 \pm 4) - 45.$$

Во второмъ случаѣ $n^2 + 49$ дѣлится на 5, такъ какъ

$$n^2 + 49 = (5k \pm 1)^2 + 49 = 5(5k^2 \pm 2) + 50.$$

Итакъ число $n(n^2 - 49)(n^2 + 49)$ при всякомъ цѣломъ значеніи n кратно 2, 3 и 5, а потому кратно и произведенія $2.3.5 = 30$

Я. Дубновъ (Одесса); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig); *Г. Огановъ* (Эривань); *Н. Гончаровъ* (Короча); *М. Домбровскій* (Спб.); *И. Плотникъ* (Одесса); *А. Заикинъ* (Самара).

№ 303 (4 сер.). *Продавецъ отвѣсилъ покупателю дважды одно и то же, какъ ему казалось, количество товара; но вѣсы его были невѣрны. Кто изъ двухъ, продавецъ или покупатель, потерялъ при этомъ, если извѣстно, что во второй разъ товаръ и гиря были положены на иныхъ чашкахъ, нежели въ первый разъ?*

Пусть l и l' суть различныя, согласно съ условіемъ задачи, длины плечъ коромысла, p — вѣсъ гири, x и y — соотвѣтственные дѣйствительные вѣса товара, когда гирю клали на чашки, прикрѣпленныя къ коромысламъ l' и l. Тогда имѣемъ:

$$xl = pl', \quad yl' = pl; \quad x = \frac{pl'}{l}, \quad y = \frac{pl}{l'};$$

$$x + y = p\left(\frac{l'}{l} + \frac{l}{l'}\right) \qquad (1).$$

Обозначая по условію неравное 1 положительное отношеніе $\frac{l'}{l}$ черезъ k^2, находимъ (см. (1)):

$$x + y = p\left(k^2 + \frac{1}{k^2}\right) = p\left[2 + \left(k - \frac{1}{k}\right)^2\right] \qquad (2).$$

Такъ какъ, по предположенію, $k^2 \neq 1$, то $k - \frac{1}{k} \neq 0$; поэтому $\left(k - \frac{1}{k}\right)^2 > 0$, и (см. (2)) $x + y > 2p$, такъ что выгадываетъ покупатель, а торговецъ теряетъ.

Г. Огановъ (Эривань); *И. Плотникъ* (Одесса); *И. Литвинъ* (Воронежъ); *А. Заикинъ* (Самара).

Поправка. Въ рецензію проф. Н. Гезехуса книги проф. Н. Пильчикова (см. „Вѣстникъ" № 349, стран. 20, строка 25 сверху) вкралась искажающая смыслъ опечатка: напечатано „.... запасъ теплоты можетъ перейти ...." —должно быть „.... запасъ теплоты **не** можетъ перейти ...."

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 20-го Августа 1903 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

Обложка
ищется

Обложка
ищется