Обложка
пщется

Обложка
ищется

XXIX Сем. № 9.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

15 Мая № 345. 1903 г.

Жизнь и труды Н. Абеля.

Рѣчь, произнесенная И. Слешинскимъ въ годичномъ засѣданіи Общества Естествоиспытателей при Новороссійскомъ университетѣ 14-го марта 1903 года.

*(Окончаніе *).*

Для выясненія хода занятій Абеля большое значеніе имѣютъ сохранившіяся тетради его, содержащія извлеченія изъ изучаемыхъ сочиненій и самостоятельныя изслѣдованія Абеля. Ихъ всего 6. Первыя двѣ относятся ко времени до поѣздки за границу, 3-я ко времени пребыванія за границей, а остальныя 3 къ періоду послѣ возвращенія его на родину. Первая тетрадь, относящаяся, повидимому, къ 1820 году, т. е. ко времени пребыванія Абеля въ лицеѣ, содержитъ выписки изъ изучаемыхъ сочиненій. Въ ней содержатся, между прочимъ, статьи: „рѣшеніе уравненій 3-ей степени (Кардана)“ и „рѣшеніе уравненій 4-й степени (Бомбелли)“. Вопросъ о рѣшеніи алгебраическихъ уравненій, интересовавшій многихъ знаменитыхъ математиковъ, былъ однимъ изъ первыхъ, глубоко заинтересовавшихъ Абеля. Нужно замѣтить, что, начиная съ 16 вѣка, когда итальянскими математиками (Del Ferro, Tartaglia, Ferrari) было найдено рѣшеніе уравненій 3-ьей и 4-ой степени, усилія математиковъ были на-

*) См. № 344 „Вѣстника“.

правлены къ рѣшенію уравненій высшихъ степеней. Но уже первый шагъ—рѣшеніе уравненія 5-ой степени—представлялъ непреодолимыя затрудненія. Gauss высказалъ убѣжденіе въ невозможности рѣшенія уравненія 5-ой степени въ радикалахъ, т. е. нахожденія выраженія, составленнаго при помощи 6 алгебраическихъ дѣйствій изъ коэффиціентовъ уравненія, обозначенныхъ различными буквами, которое, будучи подставлено вмѣсто неизвѣстной въ уравненіе, обращало бы его въ тождество. Итальянскій математикъ Ruffini въ началѣ 19 вѣка дѣйствительно доказалъ невозможность такого рѣшенія. Въ этомъ доказательствѣ одно изъ основныхъ положеній не было, однако, доказано. Притомъ работа Ruffini была написана неясно, была мало извѣстною и Абель ничего не зналъ о ней въ это время. Еще будучи ученикомъ лицея, онъ пытался разрѣшить уравненіе 5-ой степени и ему показалось, что онъ достигъ цѣли. Его работа была Hansteen'омъ послана въ Копенгагенъ проф. Degen'у для доклада ученому обществу. Degen потребовалъ подробнаго изложенія и приложенія къ примѣру. Притомъ онъ совѣтовалъ Абелю оставить этотъ неблагодарный вопросъ и заняться эллиптическими интегралами. Абель, провѣряя свой выводъ, нашелъ ошибку, но вмѣсто того, чтобы, подобно другимъ выдающимся математикамъ (напр., Jacobi) бросить этотъ предметъ, постановилъ или найти рѣшеніе уравненій 5-ой степени или доказать его невозможность. Это обстоятельство имѣло въ жизни Абеля большое значеніе. Съ одной стороны, усилія его увѣнчались успѣхомъ и въ 1824 г. онъ далъ первое полное доказательство невозможности рѣшить буквенное уравненіе 5-ой степени въ радикалахъ. Съ другой стороны, вниманіе его, вслѣдствіе совѣта Degen'a, было привлечено эллиптическими интегралами, которые стали областью величайшихъ его открытій. Проф. Sylow справедливо видитъ въ Абелѣ прежде всего алгебриста. Его замѣчательныя изслѣдованія въ области интегральнаго исчисленія тѣснѣйшимъ образомъ связаны съ его теоріей алгебраическихъ уравненій. Къ сожалѣнію, статья Абеля, содержащая попытку рѣшить уравненіе 5-ой степени, имѣвшая столь важныя послѣдствія, не сохранилась. Весьма возможно, какъ это предполагаетъ проф. Sylow, что ошибка Абеля состояла въ томъ, что онъ исходилъ изъ предположенія возможности рѣшенія уравненій 5-ой степени въ радикалахъ, предположенія, оказавшагося потомъ ложнымъ. Какъ бы то ни было, эта ошибка оставила глубокій слѣдъ въ научныхъ убѣжденіяхъ Абеля. Въ одномъ изъ послѣдующихъ его мемуаровъ, посвященныхъ алгебраическимъ уравненіямъ, говорится: „Слѣдуетъ задачѣ давать такую форму, чтобы можно было разрѣшить ее во всякомъ случаѣ; этого можно всегда достигнуть относительно всякой задачи. Вмѣсто того, чтобы задаваться вопросомъ о зависимости, о существованіи которой неизвѣстно, слѣдуетъ поставить вопросъ, возможна-ли въ дѣйствительности такая зависимость. Напримѣръ, въ интегральномъ исчисленіи, вмѣсто того чтобы искать, путемъ пробъ и догадокъ, интегрированія дифференціальныхъ формулъ, должно изслѣдовать, возможно-ли интегрировать ихъ тѣмъ или другимъ способомъ. Если ставить задачу такимъ образомъ, то самое условіе ея содержитъ зародышъ рѣшенія и указываетъ путь, которому должно слѣдовать; и я полагаю, что немного найдется случаевъ, когда такимъ путемъ не получится болѣе или менѣе важныхъ теоремъ даже тогда, когда не удается разрѣшить вопросъ вполнѣ, вслѣдствіе сложности вычисленій. Что этотъ методъ,—безспорно, единственно-научный, потому что только о немъ можно сказать напередъ, что онъ приводитъ къ поставленной цѣли, такъ мало употреблялся въ математикѣ,—объясняется крайней сложностью, съ которой онъ представляется связаннымъ, въ особенности, когда имѣется въ виду нѣкоторая общность; но во многихъ случаяхъ эта сложность только кажущаяся и съ первыхъ шаговъ исчезаетъ. Я примѣнялъ этотъ способъ ко многимъ отдѣламъ анализа и, хотя я часто предлагалъ себѣ задачи, превосходящія мои силы, тѣмъ не менѣе, я получилъ много общихъ результатовъ, бросающихъ яркій свѣтъ на природу количествъ, знаніе которыхъ составляетъ предметъ математики. Этотъ методъ особенно легко прилагается въ интегральномъ исчисленіи“ (мем. VIII. II т. нов. изд. соч. Abel'я, стр. 217).

Эти убѣжденія сложились у Абеля, повидимому, въ очень раннемъ возрастѣ, потому что уже въ 1823 году, т. е. въ возрастѣ 21 года, Абель представилъ факультету мемуаръ, къ сожалѣнію, потерянный, по интегральному исчисленію (который послужилъ для исходатайствованія ему заграничной командировки), содержащій, насколько можно судить по сохранившемуся отзыву проф. Hansteen'a и Rasmusen'a, именно приложеніе вышеприведеннаго метода изслѣдованія къ интегральному исчисленію. Нѣкоторыя указанія, относящіяся, повидимому, къ этому мемуару, находятся во второй тетради Абеля, относящейся къ тому же времени. Въ этой тетради, между прочимъ, сказано: „Я доказалъ въ другомъ мѣстѣ, что интегралъ

$$\frac{(\log x)^{\alpha} dx}{c+x}$$

не можетъ быть никоимъ образомъ проинтегрированъ съ помощью функцій, принятыхъ раньше, и, слѣд., представляетъ новый классъ трансцендентныхъ функцій“.

Уже до поѣздки за границу, т. е. до сентября 1825 года, Абель сдѣлалъ тѣ замѣчательныя открытія, развитію которыхъ была посвящена вся остальная его жизнь. Эти открытія относятся къ 3-емъ областямъ: 1) къ теоріи алгебраическихъ уравненій, 2) къ теоріи эллиптическихъ функцій и 3) къ общей теоріи интеграловъ алгебраическихъ функцій.

О первой мы говорили уже отчасти выше. Чтобы дать хотя нѣкоторое понятіе о второй, замѣтимъ слѣдующее. Раньше открытія интегральнаго исчисленія, путемъ геометрическимъ, были найдены такъ наз. тригонометрическія функціи: синусъ, косинусъ и др. Всѣмъ извѣстно, какую важную роль играютъ онѣ въ математикѣ и ея приложеніяхъ. Интегральное исчисленіе указало новый путь, ведущій къ нимъ. Было найдено, какъ сказано выше, что если $y=arc\sin x$ (т. е. $x=\sin y$), то $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т. е. $y=arc\sin x$ есть интегралъ дифференціала $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Слѣдовательно, интегрируя алгебраическій дифференціалъ $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, приходимъ къ функціи $y=$ $=arc\sin x$, а если будемъ разсматривать, наоборотъ, y, т. е. интегралъ, какъ независимое перемѣнное, а x какъ его функцію, то приходимъ къ функціи $x=\sin y$. Такимъ образомъ, обращеніе интеграловъ, содержащихъ раціонально корень квадратный изъ полинома 2-ой степени, приводитъ къ функціямъ тригонометрическимъ, изъ которыхъ каждая есть функція періодическая объ одномъ періодѣ. Этимъ указывался путь дальнѣйшаго обогащенія анализа новыми функціями. На этотъ-то путь и вступилъ Абель.

Изъ письма его къ Holmboe видно, что онъ ранѣе 1823 года написалъ мемуаръ, въ которомъ разсматривалъ обращеніе эллиптическаго интеграла, т. е. интеграла, содержащаго раціональную функцію отъ x и корня квадратнаго изъ многочлена 3-ьей или 4-ой степени. Этотъ путь привелъ его къ открытію новаго рода функцій, носящихъ въ настоящее время имя эллиптическихъ функцій, имѣющихъ 2 періода. Сохранился одинъ интересный мемуаръ, въ которомъ Абель обращаетъ болѣе общій, такъ наз. гиперэллиптическій интегралъ, содержащій корень квадратный изъ полинома любой степени, и приходитъ къ заключенію, что обратная функція имѣетъ нѣсколько періодовъ. Этотъ мемуаръ относится, по свидѣтельству Holmboe, къ 1825 году. Весьма возможно поэтому, что основныя положенія теоріи эллиптическихъ функцій были найдены Абелемъ еще до поѣздки его за границу, такъ какъ идеи обращенія и двоякой періодичности были имъ, несомнѣнно, открыты въ это время.

Что касается третьей группы вопросовъ, къ которой относится потерянный мемуаръ интегральнаго исчисленія, то сохранился мемуаръ того-же періода, до поѣздки за границу, содержащій доказательство знаменитой теоремы, носящей теперь имя теоремы Абеля, которую Legendre назвалъ monumentum aere perennium. Эта теорема была потомъ положена въ основаніе теоріи высшихъ трансцендентныхъ функцій, которыя носятъ имя Абелевыхъ функцій.

Мы видимъ такимъ образомъ, какъ много сдѣлалъ открытій Абель еще передъ поѣздкой за границу.

Поѣздка за границу начинаетъ собой новую эпоху въ научной жизни Абеля. Онъ познакомился съ новыми взглядами на точность математическихъ изслѣдованій, со взглядами Gauss'а, Bolzano и Cauchy, и эти взгляды оказали на него очень сильное вліяніе. Чтобы понять и оцѣнить это вліяніе, остановимся въ немногихъ словахъ на взглядахъ въ этомъ направленіи вышеупомянутыхъ ученыхъ.

Прежде, однако, мы должны сказать нѣсколько словъ объ одномъ математическомъ понятіи, къ которому, главнымъ образомъ, относится перемѣна взглядовъ Абеля. Это—понятіе о сходимости безконечнаго ряда. Въ этомъ понятіи, точно также какъ въ основныхъ понятіяхъ исчисленія безконечно-малыхъ, мы имѣемъ дѣло съ понятіемъ о предѣлѣ. Если имѣется безконечный рядъ чиселъ, слѣдующихъ опредѣленному закону, напр.,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots,$$

то, разсматривая сумму n первыхъ членовъ и предполагая, что n увеличивается безпредѣльно, мы получимъ одно изъ двухъ: или измѣняющаяся сумма будетъ стремиться къ нѣкоторому предѣлу или нѣтъ. Въ первомъ случаѣ говорятъ, что этотъ рядъ сходится, во-второмъ—расходится.

Требованіе полной точности и строгости, завѣщанное геометрами древности, находило себѣ во всѣ эпохи ревностныхъ поборниковъ среди математиковъ. Даже въ 17-омъ вѣкѣ, въ эпоху полнаго увлеченія погоней за новыми результатами, мы видимъ напр., Ньютона, обосновывающаго съ возможной точностью новое исчисленіе съ помощью понятія о предѣлѣ. Затѣмъ, въ 18-омъ столѣтіи, когда философъ Berkely оспариваетъ обоснованность новаго ученія, предложеннаго Ньютономъ, мы видимъ Maclaurin'а, ставящаго себѣ задачей безукоризненное обоснованіе этого ученія. Но особенное вниманіе къ строгости математическихъ разсужденій мы встрѣчаемъ у Gauss'а и Cauchy. Каждый математикъ знаетъ, въ какой мѣрѣ точность понятій и строгость доказательствъ были необходимы для созданія современной теоріи функцій, основанія которой были установлены этими великими математиками независимо другъ отъ друга, (хотя опубликовалъ свои изслѣдованія лишь одинъ изъ нихъ—Cauchy). Къ этимъ двумъ математикамъ должно присоединить философа Bolzano, имя котораго и въ настоящее время мало извѣстно, а еще не такъ давно было почти совершенно забыто. Многочисленныя сочиненія его составляютъ библіографическую рѣдкость. Бернгардъ Больцано (1781 — 1848) былъ профессоромъ философіи религіи въ Прагѣ съ 1805 по 1820, когда вынужденъ былъ оставить профессуру, вслѣдствіе того, что не согласился отречься отъ нѣкоторыхъ тезисовъ своего ученія, признанныхъ еретическими. Въ началѣ своей ученой дѣятельности съ 1805 по

1817 годъ онъ опубликовалъ 5 сочиненій [1]) по математикѣ. Реформаторскія идеи Bolzano въ области математики лишь въ послѣднее время находятъ себѣ отголосокъ, преимущественно, среди современныхъ итальянскихъ математиковъ. Bolzano много опередилъ свой вѣкъ.

Абель еще до поѣздки за границу читалъ нѣкоторыя сочиненія Gauss'а. Уже въ первомъ своемъ сочиненіи, вышедшемъ въ 1799 году на латинскомъ языкѣ подъ заглавіемъ „Новое доказательство теоремы, что цѣлая раціональная алгебраическая функція одной перемѣнной можетъ быть разложена на вещественные множители первой или второй степени". Gauss совершенно опредѣленно высказывается за полную строгость математическихъ разсужденій.

„Хотя", говоритъ Гауссъ: „величайшіе математики часто прилагали истины, предполагающія существованія тѣхъ количествъ, къ которымъ онѣ относятся, къ такимъ количествамъ, которыхъ возможность была еще сомнительной, и хотя я не отрицаю, что вольности этого рода чаще всего касаются лишь формы и, слѣдовательно, какъ бы внѣшняго облика разсужденій, что проницательность истиннаго геометра сейчасъ можетъ усмотрѣть,—однако, кажется болѣе благоразумнымъ и болѣе достойнымъ высоты наукъ, которая заслуженно представляется, какъ совершеннѣйшій образецъ ясности и точности, или изгнать совершенно подобныя вольности или, по крайней мѣрѣ, употреблять ихъ порѣже и не иначе, какъ въ тѣхъ случаяхъ, когда и менѣе упражненные въ состояніи усмотрѣть, что вещь можетъ быть доказана и безъ ихъ помощи, хотя и менѣе кратко, однако, такъ же строго". Незаконность недоказанныхъ допущеній Gauss разъясняетъ въ одномъ изъ писемъ къ Bessel'ю. Онъ говоритъ: „если обозначить функцію $\frac{1}{x}$ черезъ $f(x)$, то $f(x)+f(-x)=0$. Если позволимъ себѣ разсматривать $f(0)$ какъ опредѣленную величину, то отсюда слѣдуетъ: $2f(0)=0$, т. е. $f(0)=0$."

Въ другомъ письмѣ къ тому же Bessel'ю сказано: „а какъ только онъ (рядъ) перестаетъ сходиться, то его сумма, какъ сумма, не имѣетъ никакого смысла".

---

1. Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie. Prag. 1804.

2. Beiträge zu einer begründeten Darstellung der Mathematik. 1. Lieferung. Prag 1810.

3. Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und der Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen. Prag. 1816.

4. Rein analytischer Beweis etc. (переизд. въ 1894 г.).

5. Die drei Probleme etc.

Другія сочиненія Bolzano см. Sitzungsberichte der Kais. Ak. der W. Wien. 1849. 8 Heft. Verzeichnis der eingegangenen Druckschriften. S. I.

Къ этому списку слѣдуетъ прибавить посмертное сочиненіе Paradoxien des Unendlichen, вышедшее въ 1850 г. и переизданное въ 1889 г.

Во время перваго своего пребыванія въ Берлинѣ, бывая у Crelle, гдѣ собирались молодые математики, Абель не могъ не познакомиться близко съ научными взглядами Gauss'а, которому въ то время нѣмецкіе математики уже поклонялись. Что касается Cauchy, то, какъ видно изъ одного изъ писемъ Абеля, онъ тамъ же въ Берлинѣ познакомился съ его анализомъ и вполнѣ оцѣнилъ значеніе этой книги. Въ предисловіи къ этой книгѣ Cauchy говоритъ: „что же касается до способовъ изложенія, то я старался придать имъ ту строгость, которая требуется въ геометріи, совершенно избѣгая сужденій, извлекаемыхъ изъ алгебраическаго обобщенія. Хотя и допускаются подобныя сужденія, особенно, при переходѣ отъ сходящихся рядовъ къ расходящимся, отъ вещественныхъ количествъ къ мнимымъ выраженіямъ,—но мнѣ кажется, что ихъ можно принять за наведенія, посредствомъ которыхъ, и то не всегда, только угадывается истина, что весьма мало удовлетворяетъ точности, которою хвалятся математическія науки. Къ тому же, наведенія могутъ дать безграничный просторъ алгебраическимъ формуламъ, между тѣмъ какъ въ дѣйствительности большая часть этихъ формулъ справедлива только при извѣстныхъ условіяхъ и то для нѣкоторыхъ значеній количествъ, въ нихъ заключающихся.“ „Правда, чтобы остаться вѣрнымъ этимъ началамъ, я долженъ былъ допустить многія предложенія, которыя поражаютъ съ перваго взгляда. Такъ, напр., въ VI главѣ я говорю, что расходящійся рядъ не имѣетъ суммы....“

Въ третьей тетради Абеля, которая, по всей вѣроятности, была куплена въ Парижѣ, находятся слова „Bolzano — искусный человѣкъ“. Весьма возможно, что во время пребыванія въ Прагѣ или Вѣнѣ Абель познакомился, по крайней мѣрѣ, съ нѣкоторыми изъ математическихъ сочиненій Bolzano. Изъ нихъ особенно замѣчательно сочиненіе: „Чисто-аналитическое доказательство итд.“, вышедшее въ 1817 году. Въ немъ установлено впервые важное математическое понятіе о верхней границѣ, т. е. о наименьшемъ числѣ, котораго не превосходятъ данныя числа. Дѣло въ томъ, что въ случаѣ системы чиселъ, состоящей изъ безконечнаго количества ихъ, не всегда существуетъ наибольшее. Такъ, въ ряду чиселъ

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

наибольшаго нѣтъ. Во всѣхъ подобныхъ случаяхъ существуетъ, однако, наименьшее число, котораго эти числа не превосходятъ. Это число въ данномъ случаѣ есть 1. Это число Weierstrass назвалъ верхней границей и ввелъ, въ качествѣ одного изъ основныхъ понятій, въ свою теорію аналитическихъ функцій.

Въ этой же работѣ Bolzano даетъ критерій существованія предѣла *), предложенный нѣсколько позже Cauchy, для рядовъ,

*) Зачатокъ этого критерія содержится въ мемуарѣ Эйлера о гармоническомъ рядѣ. (Comm. ac. petr. T. VII).

и состоящій въ томъ, что перемѣнное $f(n)$ имѣетъ предѣлъ при $n = \infty$, если разность $f(n+m) - f(n)$ можетъ быть, выборомъ достаточно большого n, *при всякомъ* m, сдѣлана по абсолютной величинѣ сколь-угодно малой.

Въ своихъ первыхъ работахъ Абель стоялъ, въ отношеніи строгости доказательства, на точкѣ зрѣнія Эйлера: онъ, напр., не стѣснялся употреблять ряды, сходимость которыхъ не установлена. Вслѣдствіе этого, нѣкоторые мемуары этого періода содержатъ формулы по виду общія, на самомъ же дѣлѣ справедливыя лишь для отдѣльныхъ частныхъ случаевъ. Во второй тетради онъ воспроизводитъ нелѣпыя равенства Эйлера:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots = \frac{1}{4}$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots = 0 \text{ и др.}$$

Но уже въ письмѣ отъ 16 января 1826 года къ Holmboe изъ Берлина, т. е. не болѣе, чѣмъ черезъ 4 мѣсяца послѣ отъѣзда изъ Кристіаніи, онъ пишетъ слѣдующее: „Расходящіеся ряды — всѣ — суть изобрѣтенія дьявола, и это позоръ, что осмѣливаются основывать на нихъ какія-либо доказательства. Пользуясь ими, можно вывести все, что угодно. Это они были причиной столь многихъ ошибокъ и породили столько парадоксовъ. Можно-ли придумать что-нибудь ужаснѣе, чѣмъ утверждать, что

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \ldots \text{ и т. д.,}$$

гдѣ n—цѣлое положительное число. Risum teneatis amici. Я сталъ чрезвычайно внимателенъ ко всему этому; потому что, если исключить самые простые случаи, напр., геометрическіе прогрессіи, не окажется во всей математикѣ почти ни одного безконечнаго ряда, котораго сумма опредѣлена точнымъ образомъ; иначе говоря, то, что наиболѣе важно въ математикѣ, оказывается лишеннымъ основанія. Правда, что большинство вещей вѣрно, но это чрезвычайно удивительно. Я стараюсь найти причину этого. Предметъ необыкновенно интересный“. Въ томъ же письмѣ, приведя образецъ неправильнаго заключенія изъ области рядовъ, онъ говоритъ: „То же самое можно сказать объ умноженіи, дѣленіи безконечныхъ рядовъ и т. д. Я началъ разсматривать съ этой точки зрѣнія важнѣйшія изъ правилъ, допускаемыхъ въ настоящее время, чтобы показать, въ какихъ случаяхъ они вѣрны, а въ какихъ нѣтъ. Это идетъ хорошо и чрезвычайно меня интересуетъ“.

Къ этимъ же вопросамъ Абель возвращается въ письмѣ къ Hansteen'у изъ Дрездена 29-го марта 1826 года. Онъ говоритъ: „Чистая математика въ самомъ тѣсномъ смыслѣ должна быть на будущее время предметомъ моихъ занятій. Я хочу приложить всѣ свои силы, чтобы внести нѣсколько больше свѣта въ ужасную темноту, которую, безспорно, находимъ въ настоящее время въ анализѣ. Въ немъ до такой степени нѣтъ плана и системы, что прямо удивительно, что его можетъ изучать столько людей; а хуже всего то, что въ немъ вовсе не соблюдается строгость. Лишь весьма ограниченное число предложеній въ высшемъ анализѣ доказано съ убѣдительною строгостью. Всегда встрѣчается несчастный пріемъ заключенія отъ частнаго къ общему, и очень странно то, что при употребленіи подобнаго метода все-таки получается лишь малое число такъ называемыхъ парадоксовъ. По моему мнѣнію, это происходитъ оттого, что функціи, которыми анализъ занимался до сихъ поръ, могутъ быть, въ большинствѣ случаевъ, выражены съ помощью степеней [Абель разумѣетъ подъ этимъ, вѣроятно, выраженіе функцій съ помощью рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ степенямъ перемѣнныхъ, такъ что, употребляя современную терминологію, мы сказали бы, что онъ говоритъ о функціяхъ аналитическихъ, въ смыслѣ Weierstrass'a]. Но какъ только появляются другія функціи, (что, правда, случается не часто), тогда это уже не такъ, и изъ ложныхъ заключеній вытекаетъ множество невѣрныхъ теоремъ, связанныхъ между собой. Я изслѣдовалъ многія изъ нихъ, и мнѣ посчастливилось достигнуть выясненія ихъ. Если только употреблять общій методъ, то это удается, но я долженъ былъ быть крайне осмотрительнымъ, потому что принятыя разъ безъ строгаго доказательства (слѣдовательно, безъ доказательства) теоремы такъ глубоко укоренились во мнѣ, что въ каждый моментъ мнѣ грозила опасность воспользоваться ими безъ болѣе точной повѣрки".

Что эти новые взгляды Абеля принесли большую пользу наукѣ, видно изъ тѣхъ изслѣдованій о безконечныхъ рядахъ, которыми онъ обогатилъ математику. Замѣтимъ при этомъ слѣдующее. Какъ ни труднымъ является строго научное изслѣдованіе и какъ ни способно оно тормозить полученіе новыхъ результатовъ, для Абеля оно не могло быть въ этомъ отношеніи ни въ какомъ случаѣ опаснымъ, потому что еще до отъѣзда за границу онъ во всѣхъ областяхъ своихъ будущихъ изслѣдованій сдѣлалъ открытія, положившія основы всей дальнѣйшей работѣ. Кромѣ того, мы читаемъ въ томъ же письмѣ къ Hansteen'у: „я надѣюсь, что все пойдетъ хорошо и предметовъ [изслѣдованія] хватитъ мнѣ на много лѣтъ; ихъ прибавится еще во время путешествія, потому что какъ разъ теперь много идей кружится въ моей головѣ". Въ письмѣ къ Holmboe изъ Берлина на обратномъ пути (4 марта 1827 г.) онъ пишетъ: „Въ общемъ, я сдѣлалъ ш[illegible]ирующее множество открытій. Лишь бы мнѣ привести ихъ въ порядокъ и редактировать, потому что большая часть ихъ у меня лишь въ головѣ".

Мы не имѣемъ, къ сожалѣнію, возможности, даже въ самомъ поверхностномъ видѣ, представить открытія Абеля, такъ какъ пониманіе ихъ требуетъ спеціальнаго знанія математики. Мы приведемъ лишь оцѣнку этихъ открытій, сдѣланную его знаменитыми современниками. Gauss, въ отвѣтъ на просьбу Bessel'я опубликовать свои въ высшей степени важныя открытія въ области эллиптическихъ функцій, пишетъ: „Здѣсь Абель, какъ я вижу теперь, опередилъ меня и избавилъ меня, по отношенію приблизительно къ третьей части этихъ вещей, отъ труда опубликованія. Тѣмъ болѣе, что онъ сдѣлалъ всѣ выводы съ большимъ изяществомъ и краткостью. Онъ пошелъ точно по тому же пути, который я проложилъ въ 1798 году, отсюда нечего удивляться большому сходству результатовъ. Къ моему удивленію, сходство распространяется даже на форму и отчасти на выборъ обозначеній, такъ что иныя его формулы какъ будто списаны съ моихъ". Почти то же самое Gauss повторилъ въ письмѣ къ Crelle. Одинъ изъ основныхъ мемуаровъ Абеля по теоріи эллиптическихъ функцій вызвалъ у соперника его въ этой области, Jacobi, слова: „онъ выше моихъ похвалъ, равнымъ образомъ какъ выше моихъ собственныхъ работъ". Тотъ же Jacobi восклицаетъ по поводу мемуара, содержащаго лишь частный случай изслѣдованія, представленнаго Парижской Академіи Наукъ (который въ теченіе 14 лѣтъ оставался безъ вниманія): „Но каково открытіе Абеля, это обобщеніе интеграла Эйлера! Бывало-ли нѣчто подобное? Но какъ могло случиться, чтобы это открытіе, быть можетъ, величайшее изъ всѣхъ открытій, которое дало наше столѣтіе, будучи сообщено вашей академіи два года тому назадъ, могло ускользнуть отъ вниманія вашего и вашихъ товарищей". (Оказалось, что рукопись Абеля затерялась въ бумагахъ Cauchy и лишь черезъ 14 лѣтъ была найдена).

Заканчивая обзоръ ученой дѣятельности Абеля, мы приведемъ прекрасныя слова его соотечественниковъ, профессоровъ Bjerknes'a и Sylow'a, глубоко изучившихъ жизнь и труды Абеля. О характерѣ работъ Абеля Bjerknes, его біографъ, говоритъ: „Но истинныхъ причинъ величія, котораго достигъ Абель, какъ изслѣдователь, не должно искать исключительно въ его высокомъ геніи, который былъ надѣленъ могущественнѣйшими средствами изслѣдованія. Обстоятельства жизни заставили его жить въ научномъ отношеніи уединенно, идти собственнымъ путемъ и облегчили ему исключительнымъ образомъ пользоваться преимуществомъ оставаться всегда въ полномъ согласіи съ собой. Преслѣдуя свои идеи, онъ работалъ въ тиши и съ неутомимымъ терпѣніемъ изслѣдователя, который хочетъ совершить работу законченную и полную. По причинѣ этихъ обстоятельствъ, а также вслѣдствіе одной очень ясно выраженной черты характера, онъ вовсе не подвергался искушенію уклониться отъ своего пути и ничто не раздѣляло его усилій. Въ первые годы, когда, по большей части, были уже положены широкія основанія его теорій, онъ былъ почти внѣ связи со своими современниками на материкѣ и ихъ изслѣдованіями. Позже онъ сблизился съ Crelle, но лишь какъ другъ и сотрудникъ его журнала. Къ концу жизни, въ продолженіе немного болѣе года, онъ былъ вынужденъ работами Jacobi измѣнить нѣсколько свои планы. Но въ то время все уже было готово для ихъ осуществленія. Такимъ образомъ, живя среди своихъ собственныхъ идей и исключительно для нихъ, онъ шелъ всегда прямо въ одномъ направленіи".

Проф. Sylow говоритъ: „Въ эпоху своей настоящей продуктивности—всего около трехъ лѣтъ—онъ основательно разсматриваетъ всѣ свои предметы вмѣстѣ. Онъ связываетъ ихъ между собою и занимается въ теченіе короткихъ періодовъ то однимъ, то другимъ; кажется, именно столь богатая теорія эллиптическихъ функцій требуетъ отъ него наиболѣе времени. Его работоспособность была необыкновенною: независимо отъ того, что въ эти три года онъ опубликовалъ всѣ свои великія открытія, онъ приготовлялъ также труды, которыхъ онъ не успѣлъ окончить и ничуть не достовѣрно, что мы знаемъ всѣ его проекты. Окончательное редактированіе его работъ часто слѣдовало лишь черезъ годы, послѣ открытія новыхъ результатовъ, заключающихся въ нихъ, и мемуаръ, уже законченный, часто долженъ былъ долго дожидаться очереди быть напечатаннымъ. Что особенно характерно для Абеля,—это, кромѣ богатства идей, стремленіе къ абсолютной строгости, большая общность, съ которой онъ ставилъ задачи, и его манера исчерпывать ихъ. Другая особенность—та, что въ своемъ изложеніи онъ пользуется лишь столь простыми средствами, что кажется, будто все легко вытекаетъ изъ хорошаго выбора постановки вопроса". Свой разборъ работъ Абеля проф. Sylow заканчиваетъ словами: „Въ послѣдній годъ жизни ему довелось узнать, что его имя пользуется славой. Слова Gauss'а и Jacobi, которыя Crelle сообщилъ ему, письма Legendre'а и самый фактъ, что возникъ вопросъ о приглашеніи его въ Берлинъ,—все это было болѣе, чѣмъ достаточно, чтобы убѣдить его въ этомъ. Къ несчастію, его отечество понимало тогда слишкомъ недостаточно его величіе. Послѣ его смерти блескъ его имени лишь возрастаетъ. Дѣйствительно, каждая изъ теорій, которой онъ занимался въ послѣдніе свои годы, носитъ на себѣ прочный слѣдъ его руки. Его имя стало популярнымъ среди математиковъ; нѣтъ другого имени, которымъ пользовались бы столь охотно, какъ именемъ Абеля, всякій разъ, когда приходится обозначить новыя теоріи или идеи. Это характерно, потому что прилагательное „абелевъ" употребляется лишь для идей и теорій, которыя создалъ самъ Абель, или тѣхъ, которыя основаны на его открытіяхъ. Онъ открылъ дальнѣйшимъ поколѣніямъ столь обширное поле для изслѣдованія, что долго еще будетъ главной задачей для наиболѣе великихъ геометровъ завершить то, что такъ блистательно началъ Абель".

Мнѣ остается сказать въ заключеніе лишь нѣсколько словъ о характерѣ Абеля. Онъ рисуется ясно въ перепискѣ его, столь разнообразной по содержанію. Всѣ письма его отличаются поразительной простотой и трезвостью, въ нихъ нѣтъ ни слѣда сантиментальности, столь свойственной той эпохѣ. Здѣсь, въ письмахъ къ друзьямъ, въ особенности, въ письмахъ къ Holmboe, онъ пересыпаетъ изложенiе своихъ глубокихъ математическихъ идей остроумными описанiями различныхъ обстоятельствъ своихъ путешествiй за границей. Если принять во вниманiе, что эти письма къ другу написаны безъ всякаго стѣсненiя, при томъ съ большой откровенностью, то нужно признать, что въ нихъ рисуется образъ человѣка удивительной чистоты души. Въ письмахъ къ Hansteen'у онъ почтительно серьезенъ, но, вмѣстѣ съ тѣмъ, въ высшей степени простъ и искрененъ. Сообщая о знакомствѣ съ Crelle, онъ говоритъ: „Въ сущности, мнѣ везетъ. Правда, что не много есть людей, интересующихся мною, но эти люди безконечно дороги для меня, потому что они проявили въ отношенiи меня такъ много доброты. Если бы только я оправдалъ хоть сколько-нибудь ихъ ожиданiя; потому что это должно быть очень тяжело видѣть потерянными заботы о комъ-нибудь“. Оправдываясь въ томъ, что, отступивъ отъ инструкцiи, данной университетомъ, онъ сдѣлалъ съ товарищами небольшое путешествiе по Европѣ, вмѣсто того, чтобы ѣхать прямо въ Парижъ, онъ говоритъ: „я такъ созданъ, что не переношу или, по крайней мѣрѣ, съ большимъ трудомъ переношу одиночество. Мнѣ становится грустно и я не нахожусь тогда въ лучшемъ расположенiи къ какой-либо работѣ.... Почему-же мнѣ не посмотрѣть кое-чего? Боже мой! Я вѣдь не вполнѣ лишенъ чувства красоты природы“. Въ письмахъ къ г-жѣ Hansteen, которая была для него второй матерью, онъ проявляетъ большую нѣжность и тонкость чувствъ на ряду съ наивно дѣтской шутливостью. Въ одномъ изъ писемъ, говоря о надеждѣ увидѣться съ нею, онъ пишетъ: „Боже мой, сколько разъ я имѣлъ желанiе пойти къ вамъ, но не рѣшался. Часто я былъ у самыхъ дверей и возвращался, боясь безпокоить васъ, такъ какъ было бы хуже всего, что можетъ случиться со мною, если бы я надоѣлъ вамъ“.

Въ тяжелыя минуты жизни, когда онъ теряетъ надежду устроиться при университетѣ въ Христiанiи, или когда узнаетъ изъ письма Hansteen'а, что ему прiйдется учительствовать, или терпитъ крайнюю нужду по возвращенiи на родину, или когда, введенный въ заблужденiе письмомъ Crelle о приглашенiи его въ Берлинъ, онъ преждевременно дѣлаетъ запросъ университету, можетъ-ли онъ разсчитывать на какое-либо прочное положенiе на родинѣ, и вынужденъ потомъ брать этотъ запросъ назадъ, между тѣмъ какъ онъ попалъ уже въ газеты, или, наконецъ, когда, предчувствуя смерть, онъ шутками о предстоящей жизни въ Берлинѣ хочетъ успокоить свою невѣсту,—вездѣ мы видимъ ясныя черты благородства его характера.

Заканчивая нашъ очеркъ, приведемъ еще разъ слова проф. Sylow'а.

„Съ генiальностью своей Абель соединялъ въ выдающейся мѣрѣ личную любезность. Скромность и отсутствiе претензiй составляли выдающуюся черту его характера. Crelle говоритъ въ своемъ некрологѣ, что подобная скромность не въ ходу въ этомъ свѣтѣ; она легко можетъ быть принята за слабость. Но, несмотря на то, что въ теченіе всей своей жизни онъ, съ одной стороны, долженъ былъ бороться съ плачевнымъ экономическимъ состояніемъ и что, съ другой стороны, онъ страдалъ, видя, что на родинѣ его научное значеніе не цѣнится въ достаточной мѣрѣ, онъ постоянно шелъ прямо по разъ намѣченному пути, и при томъ не смущаясь злополучіями. Мнѣ кажется, что здѣсь онъ обнаружилъ нравственную силу, заслуживающую полнаго нашего удивленія".

Свѣтлый образъ этого исключительнаго человѣка будетъ жить въ памяти людей столь же долго, какъ его глубокія научныя идеи!

Изъ методологіи физики.

Къ вопросу объ основныхъ принципахъ электростатики.

Эр. Шпачинскаго.

*(Продолженіе *).*

§ 7. Итакъ, то, что согласно учебникамъ, принимается, будто бы на основаніи опыта, за „основной принципъ" электростатики, т. е. принципъ взаимодѣйствій электрическихъ массъ на разстояніи,— въ сущности, является не „основнымъ", а лишь производнымъ положеніемъ, вытекающимъ путемъ обобщенія изъ фантастической гипотезы *самоотталкиванія электричества*, согласно которой одноименное электричество, находясь на одномъ и томъ же проводникѣ, само себя отталкиваетъ до возможныхъ предѣловъ, почему и скопляется лишь на его свободной внѣшней поверхности, а разноименныя взаимно притягиваются и — въ равныхъ количествахъ — взаимно уничтожаются.

Эта гипотеза является такимъ образомъ альфой и омегой всѣхъ нашихъ толкованій о взаимодѣйствіяхъ электрическихъ массъ, и безъ нея мы не умѣли бы объяснить, съ точки зрѣнія „actio in distans", ни одного явленія изъ области электричества.

Въ виду такой важности этой гипотезы, посмотримъ, къ чему приводитъ насъ обязательное ея внесеніе въ курсъ электрофизики и присвоеніе ей значенія главнаго „основного принципа".

*) См. № 344 „Вѣстника".

Замѣтимъ, прежде всего, что *примѣненіе къ воображаемымъ явленіямъ самоотталкиванія электричества эмпирически установленнаго закона Кулона — есть не болѣе, какъ научное злоупотребленіе.* Устанавливая (около 1785 года, когда явленія индукціи не были еще вовсе изучены), при помощи своихъ крутильныхъ вѣсовъ, законъ электрическихъ взаимодѣйствій, Кулонъ могъ только измѣрять *равнодѣйствующую всѣхъ электрическихъ силъ*, вызывающихъ видимое отталкиваніе двухъ одноименно наэлектризованныхъ, изолированныхъ и находящихся на нѣкоторомъ конечномъ разстояніи тѣлъ. Но въ числѣ всѣхъ этихъ силъ были также и силы самоотталкиванія, дѣйствующія (неизвѣстно, по какому закону) на каждомъ изъ шариковъ порознь и измѣняющія распредѣленіе электрическихъ массъ. А потому утверждать, что законъ, подмѣченный въ столь сложномъ явленіи для равнодѣйствующей, долженъ быть вѣренъ и для составляющихъ силъ самоотталкиванія, а тѣмъ болѣе, утверждать, что то, что наблюдается при взаимодѣйствіи *тѣлъ*, надѣленныхъ *конечными* зарядами и находящихся на *конечныхъ* разстояніяхъ, должно имѣть мѣсто и при воображаемомъ взаимодѣйствіи *безконечно-малыхъ* электрическихъ массъ, не связанныхъ нераздѣльно ни съ какими матеріальными тѣлами и находящихся на безконечно малыхъ разстояніяхъ,—на это научная логика никакого права не даетъ, и, слѣдовательно, подобныя утвержденія могутъ быть введены въ науку лишь въ качествѣ совершенно произвольныхъ гипотезъ, основанныхъ не на „фактахъ", а только на болѣе или менѣе смѣлыхъ „аналогіяхъ". *)

Итакъ, то основное положеніе о взаимодѣйствіи электрическихъ массъ, находящихся не на матеріальныхъ *тѣлахъ*, а въ нѣкоторыхъ геометрическихъ *точкахъ,* на коемъ строится вся математическая теорія электростатическихъ явленій, — есть только *наша* апріорная фикція, только гипотеза, которая никогда не была и не можетъ быть доказана никакими опытами.

§ 8. Взглянемъ теперь на ту же гипотезу самоотталкиванія съ другой еще точки зрѣнія.

Понятіе объ *отталкиваніи* неразрывно связано въ нашемъ умѣ съ представленіемъ объ увеличиваніи нѣкотораго разстоянія. Поэтому, признать *взаимоотталкиваніе* двухъ объектовъ A и B,

---

*) Здѣсь кстати будетъ напомнить, что подобныя же „научныя злоупотребленія" допускаются всякій разъ, когда какой-нибудь законъ, *установленный эмпирически*, примѣняется къ математической интерпретаціи явленій *гипотетическихъ*, воображаемыхъ. Это одинъ изъ обычныхъ пріемовъ „умозрительной" физики. Такую, напримѣръ, ошибку дѣлаютъ всѣ тѣ, кто надѣется постичь „механизмъ" различныхъ эѳирныхъ явленій путемъ примѣненія къ нимъ законовъ той же ньютоновской механики, которая была создана для формальнаго изученія движеній массъ, *исключительно* вещественныхъ (въ смыслѣ—тяготѣющихъ), и — вдобавокъ — была создана и разработана въ ту еще эпоху, когда физика могла обходиться безъ гипотезы универсальнаго эѳира и когда, стало быть, не явно принимаемый этой системой механики постулатъ „возможности движенія матеріальныхъ тѣлъ въ абсолютной пустотѣ" не могъ еще возбуждать никакихъ сомнѣній.

какъ *фактъ*, хотя бы и не поддающійся въ данное время объясненію, ничуть не труднѣе для насъ, чѣмъ признать фактъ *взаимопритяженія* двухъ, напримѣръ, матеріальныхъ тѣлъ; оба эти факта, хотя бы мы и не постигали ближайшей ихъ причины, одинаково доступны нашему воображенію, ибо мы могли наблюдать ихъ въ дѣйствительности и, примѣняя тотъ либо другой измѣрительный методъ, установить эмпирически законъ взаимодѣйствія, не зависящій ни отъ какихъ гипотезъ. Въ подобныхъ случаяхъ ньютоновскія опредѣленія „силы", „дѣйствія и противодѣйствія" тѣлъ *A* и *B* и пр. вполнѣ законны и достаточны для формулированія *количественныхъ* соотношеній. Но опредѣленія эти теряютъ и свою законность, и перестаютъ быть, вслѣдствіе этого, достаточными всякій разъ, когда пытаются ихъ перенести изъ реальнаго міра фактовъ въ фантастическую область гипотетическихъ явленій, никакой повѣркѣ не подлежащихъ. Такъ и въ данномъ случаѣ, понятіе о *самоотталкиваніи электричества* родилось въ физикѣ еще во франклиновскую эпоху, какъ незаконное дѣтище понятія о взаимоотталкиваніи одинаково наэлектризованныхъ тѣлъ.

Если не закрывать умышленно глазъ, то нельзя не видѣть, къ какому хаосу понятій это насъ привело. Такъ, никакой человѣческій умъ не сумѣетъ оправдать логически вѣры въ то, будто въ природѣ можетъ существовать нѣчто такое, что *само себя отталкиваетъ*, ибо нельзя вовсе вообразить такого процесса отталкиванія, при которомъ разстоянія между отталкивающимися элементами неизмѣнно оставались бы равными нулю. Слѣдовательно, если было найдено необходимымъ для уразумѣнія электрическихъ явленій ввести въ науку гипотезу самоотталкиванія, то, вмѣстѣ съ тѣмъ, надлежало отказаться разъ навсегда отъ идеи о *непрерывности электричества* на проводникахъ и приписать ему *зернистое строеніе*. Иными словами, выдумавъ самоотталкиваніе электричества, необходимо было выдумать также и особую *атомистическую гипотезу строенія электричества*, а слѣдовательно, и отказаться отъ его *нематеріальности*. Только при этихъ условіяхъ представленіе о самоотталкиваніи, сводясь къ взаимоотталкиванію *частицъ* (или атомовъ) электричества, сдѣлалось бы для нашего ума доступнымъ; внѣ же этихъ условій — оно есть лишь фикція, не имѣющая никакого конкретнаго смысла.

Но, какъ извѣстно, *никакой атомистической гипотезы электричества еще нѣтъ* въ учебникахъ, не только элементарныхъ, но и въ самыхъ пространныхъ. Въ нѣкоторыхъ изъ нихъ есть только вполнѣ безцеремонное употребленіе названія „частица" электричества и разсказы о томъ, какъ такія „частицы" притягиваются (и уничтожаются взаимно), отталкиваются, вообще, движутся, текутъ и пр. Но *нигдѣ* нѣтъ какого бы то ни было „опредѣленія" электрическихъ частицъ (или атомовъ), и учащимся предоставлено право думать о нихъ рѣшительно все, что имъ угодно. *)

*) Напр., авторъ „Введенія въ ученіе объ электр." Б. Ю. Кольбе, говоря (стр. 20) объ этихъ „частичкахъ", тутъ же прибавляетъ,—что „это лишь образное сравненіе". Во что же послѣ этого долженъ вѣрить учащійся — существуютъ-ли эти частички или нѣтъ?

Правда, въ самое послѣднее время идея зернистаго строенія электричества начинаетъ пріобрѣтать все болѣе и болѣе сторонниковъ между физиками; уже придумано даже (Дж. Стонеемъ) особое названіе *электронъ* для элементарной частицы электричества. Какъ будто теперь лишь, въ началѣ XX столѣтія, рѣшились дать франклиновской гипотезѣ самоотталкиванія то необходимое съ логической точки зрѣнія дополненіе, безъ котораго она приводила къ явнымъ противорѣчіямъ. Но слѣдуетъ-ли изъ этого, что для поддержанія въ нашихъ учебникахъ принципа „actio in distans", мы должны, не медля ни минуты, ввести въ таковые эту, еле народившуюся и совершенно еще неустановившуюся гипотезу электроновъ? Мнѣ кажется, что это могло бы быть лишь задачею будущаго, а что въ настоящее время, предоставивъ будущее будущему, вполнѣ было бы достаточнымъ исключить изъ нашихъ учебниковъ по возможности все то, что пріучаетъ учащихся дѣлать неправильные выводы изъ наблюдаемыхъ фактовъ и что навязываетъ имъ ложныя предвзятыя идеи.

§ 9. Прежде же всего, надо постараться въ элементарныхъ курсахъ перестать *извращать факты* и, ради предвзятыхъ идей, *не обманывать* умышленно учащихся. Къ сожалѣнію, еще повсемѣстно въ ученіи объ электричествѣ практикуется этотъ непедагогическій пріемъ, котораго безсовѣстность потому только не бросается рѣзко въ глаза, что всѣ черезчуръ къ нему привыкли и примѣняютъ его почти безсознательно. А извѣстно, что труднѣе всего исправляются тѣ ошибки, къ совершенію коихъ мы ужъ слишкомъ привыкли.

Такъ, напримѣръ, большинство преподавателей физики никогда, вѣроятно, и не вдумывалось въ то, что при изложеніи курса электростатики они показываютъ учащимся *не опыты, а фокусы*, требующіе подчасъ извѣстной доли ловкости, чтобы, скрывая передъ зрителями то, что существенно, заставить ихъ повѣрить въ существованіе того, чего въ дѣйствительности нѣтъ.

Вотъ примѣры. Показываютъ одинъ изолированный шарикъ A наэлектризованный и другой такой же шарикъ B ненаэлектризованный; прикасаются однимъ къ другому и говорятъ съ торжествомъ: „Видите! Электричество имѣется теперь на обоихъ шарикахъ поровну; это потому, что, по причинѣ самоотталкиванія, половина электричества *перешла* при прикосновеніи съ шарика A на шарикъ B". Экспериментаторъ самъ очень хорошо знаетъ, что *это неправда*, что та часть электричества, которая будто бы перешла на B, *была уже* на этомъ шарикѣ раньше момента прикосновенія, но онъ умышленно умалчиваетъ объ этомъ, чтобы, слѣдуя за учебникомъ, въ которомъ явленія распространенія электричества излагаются, согласно историческому методу, ранѣе явленій индукціи, закрѣпить въ умахъ учащихся совершенно ложное представленіе, *будто электричество есть нѣчто такое, что можетъ переноситься съ одного тѣла на другое* *).

Или опытъ съ изолированнымъ металлическимъ шаромъ и двумя накладываемыми на него полушаріями тоже показывается какъ ловкій фокусъ, при которомъ стараются замаскировать фактъ индуктивной электризаціи этихъ полушарій при ихъ приближеніи и фактъ разряда наводящаго и наведеннаго зарядовъ при прикосновеніи **), чтобы убѣдить учащихся, будто электричество съ поверхности шара, вслѣдствіе самоотталкиванія, *перешло сквозь металлъ* полушарій на ихъ внѣшнія поверхности.

Точно также и другіе сюда относящіеся опыты (выворачиваніе такъ называемаго „мѣшка Фарадея", выгибаніе въ ту либо другую сторону наэлектризованной металлической сѣтки или листа жести, и пр.) всѣ направлены къ тому, чтобы доказать воображаемую способность электричества *переноситься* съ одного мѣста на другое либо вдоль поверхности, либо проникая даже насквозь, и всегда объясняются пресловутымъ самоотталкиваніемъ электричества, или—взаимоотталкиваніемъ его „частицъ" ***).

Между тѣмъ, при всѣхъ этихъ опытахъ демонстрируются только слѣдствія индукціи или „самоиндукціи" (т. е. взаимодѣйствія наэлектризованныхъ частей одного и того же проводника), въ соединеніи съ явленіемъ разряда, и *ни одинъ изъ нихъ не доказываетъ способности электричества перемѣщаться, въ буквальномъ смыслѣ слова.* Изъ подобныхъ явленій индукціи можемъ придти лишь къ тому заключенію, что то, что мы называемъ „электричествомъ", можетъ *исчезать* (путемъ разряда) на однихъ тѣлахъ (или частяхъ поверхности проводника) и *возникать* на другихъ, но о *перемѣщеніи* электричества, о какомъ бы то ни было его *движеніи*, аналогичномъ съ движеніемъ тѣлъ матеріальныхъ, *эти* опыты не даютъ намъ права утверждать ничего положительнаго.

Итакъ, единственнымъ движеніемъ, которое могли наблюдать начинающіе изучать электростатику—это было *движеніе наэлектризованныхъ тѣлъ*, но не движеніе самого электричества (или его частицъ). Вѣра въ это послѣднее была имъ лишь *внушена*, путемъ маскированія передъ ними того „основного явленія" индукціи, которымъ обусловливаются рѣшительно всѣ извѣстные намъ случаи *кажущагося перенесенія электричества.*

Слѣдовательно, *способность электричества перемѣщаться есть не болѣе какъ гипотеза,* давно придуманная въ дополненіе ко всѣмъ прежнимъ фантазіямъ, внесеннымъ въ науку въ подмогу принципу „actio in distans".

§ 10. Неудивительно послѣ этого, что и сохранившіяся, въ силу историческихъ традицій, понятія о *проводникахъ* и *непроводни-*

*) Въ нѣкоторыхъ учебникахъ такъ именно и говорится категорически; см., напр., посмертныя изданія учебн. Краевича: А. Ефимова—въ § 188, А. Л Гершуна—въ § 186, и пр.

**) Изъ за этого, на полушаріяхъ *никогда* не придѣлываютъ маленькихъ электроскоповъ.

***) Какъ, напр., у Кольбе (см. „Введеніе въ ученіе объ электричествѣ" стр. 20).

кахъ такъ же фантастичны, какъ и лежащая въ ихъ основѣ гипотеза перемѣстимости электричества.

Во всѣхъ нашихъ учебникахъ за существенное, основное различіе проводниковъ отъ непроводниковъ принимается способность первыхъ распространять зарядъ по всей внѣшней поверхности въ неизмѣримо малый промежутокъ времени. Вслѣдствіе самоотталкиванія, конечно, электричество какъ будто *разливается* вдоль по всей поверхности, наподобіе какой-то волны, затѣмъ очень скоро успокаивается и приходитъ въ равновѣсіе.

Большинство такъ уже свыклось съ картиною этого воображаемаго явленія, что перестало сознавать всю ея физическую несообразность. Вѣдь для возможности *такого* распространенія электричества необходимо, чтобы молекулы (по крайней мѣрѣ, поверхностныя) твердыхъ проводниковъ всегда касались вплотную другъ друга или чтобы между ними были какіе-то мосты для перехода электричества, какія-то связи. Но никогда никакой физикъ не доказалъ еще ни того, чтобы молекулы тѣлъ неизмѣнно касались другъ друга, ни того, чтобы между ними существовали постоянныя матеріальныя связи. Не прибѣгаемъ же мы, напримѣръ, къ такимъ наивностямъ при объясненіи теплопроводности тѣлъ и, разъ отказавшись отъ отжившей свой вѣкъ гипотезы „теплородной жидкости", понимаемъ нынѣ перенесеніе теплоты отъ частицы къ частицѣ какъ *послѣдовательную передачу кинетической энергіи* (путемъ-ли конвекціи или излученія), а не какъ *переходъ* чего-то въ буквальномъ смыслѣ слова.

Упорное нежеланіе взглянуть съ такой же точки зрѣнія и на электропроводность тѣмъ менѣе понятно, что вѣдь мы—повторяю—не знаемъ ни одного факта, который доказывалъ-бы возможность *непосредственнаго* (т. е. помимо индукціи и разряда) перехода электричества съ одного проводника на другой при обычномъ прикосновеніи. Даже въ нѣкоторыхъ учебникахъ прямо говорится—совершенно справедливо, но, къ сожалѣнію, слишкомъ поздно—что „*электризація черезъ сообщеніе не существуетъ, есть только электризація черезъ вліяніе*" *). Но—увы—и въ такихъ учебникахъ рядомъ съ этимъ трактуется вполнѣ серьезно, какъ о неоспоримыхъ фактахъ, о *переходѣ* электричества съ однихъ частей поверхности на другія, о его *теченіи*, самоотталкиваніи и пр., и пр.

Итакъ, отрицая возможность непосредственнаго перехода электричества съ одного проводника на другой, наши руководства велятъ намъ, однако, *вѣрить* въ существованіе такого перехода между молекулами проводника.

Удивительная и, вдобавокъ, совершенно ненужная непослѣдовательность! Вѣдь несравненно логичнѣе и естественнѣе было бы распространить явленія индукціи, наблюдаемыя при кажущемся переходѣ электричества съ одного проводника на другой, на міръ молекулъ и, не выдумывая никакихъ новыхъ гипотезъ, принять только за основное различіе въ электропроводности тѣлъ ихъ *большую либо меньшую способность къ молекулярнымъ индук-*

*) См., напр., у Кольбе (в. ц.) стр. 55.

тивнымъ разрядамъ, какъ это давно предлагалъ Фарадей. То тѣло, которое по своему строенію допускаетъ возможность такихъ разрядовъ, въ коемъ они совершаются крайне быстро и съ ничтожною затратою энергіи на нагрѣваніе,—надо считать хорошимъ проводникомъ электричества, т. е.—*анэлектрикомъ* *); напротивъ, плохимъ проводникомъ, т. е. *діэлектрикомъ*, придется назвать такое тѣло, въ которомъ индуктивные разряды (молекулярныя искры) задерживаются на болѣе или менѣе продолжительное время, отчего въ немъ и возникаетъ *электрическая полярность* молекулъ въ направленіи индукціи, стремленіе къ сжатію, а слѣдовательно—въ случаѣ удобоподвижности его частицъ—и стремленіе къ своего рода *всасыванію* въ себя наэлектризованныхъ тѣлъ въ направленіи дѣйствующихъ силъ.

Съ такой точки зрѣнія, всякій кажущійся переходъ электричества должно понимать только какъ *послѣдовательное распространеніе явленія самоиндукціи* въ связи съ молекулярными разрядами, которое, будучи въ увеличенномъ видѣ аналогично съ такъ называемою „электрическою иллюминаціею", тѣмъ самымъ теряетъ всякую аналогію съ *теченіемъ* чего-либо вещественнаго на конечныхъ разстояніяхъ.

Во всемъ этомъ, очевидно, нѣтъ ничего новаго, ибо такого взгляда на проводимость электричества придерживался уже Фарадей (съ тѣхъ поръ, какъ онъ успѣлъ освободиться отъ гнета принципа „actio in distans", т. е., приблизительно, съ 1835 года), но въ современныхъ нашихъ учебникахъ взглядъ этотъ вовсе не пользуется популярностью **), и о „самоиндукціи" (электростатической), какъ извѣстно, нѣтъ въ нихъ и помину.

Но изъ этого не слѣдуетъ, конечно, что электростатическихъ явленій самоидукціи нѣтъ, ибо *если признаемъ взаимоиндукцію тѣлъ, то не можемъ не признавать такой же точно взаимоиндукціи отдѣльно разсматриваемыхъ частей* (или молекулъ) *одного и того же тѣла* ***). А если это до сихъ поръ игнорируется нашими элементарными руководствами, то лишь въ угоду „историческому методу" изложенія. Дѣйствительно, случилось, къ несчастію, такъ, что *Фарадей родился слишкомъ поздно* ****), и потому изученіе явле-

*) Этотъ вышедшій изъ употребленія терминъ кажется мнѣ удачнѣе общепринятаго нынѣ термина „проводникъ".

**) Опять приходится отмѣтить, что въ одномъ лишь учебникѣ К. Максуэлля (в ц.) я встрѣтилъ опредѣленіе „проводниковъ", основанное на дѣйствительномъ, а не на мнимомъ ихъ свойствѣ. А именно, описавъ опытъ разряда наэлектризованнаго тѣла сквозь металлическую палочку и человѣческое тѣло, авторъ говоритъ: „Вообще, всѣ тѣла можно раздѣлить на два „разряда: къ первому принадлежатъ *такъ называемые* „проводники", т. е. тѣла, „*сквозь которыя разрядъ возможенъ*, ко второму же—„непроводники", черезъ ко„торые разрядъ невозможенъ".

***) Интересно напомнить, что, когда Фарадей (около 1834) открылъ *вольтаическую самоиндукцію* и объяснилъ ее какъ частный случай индукціи токовъ, современные ему физики не хотѣли признать подобнаго объясненія, и, вообще, эта самоиндукція получила права гражданства въ физикѣ лишь съ 1850 года, благодаря опытамъ Карла Якоби (проф. въ Берлинѣ, брата Морица Якоби, изобрѣтателя гальванопластики) и, въ особенности, изслѣдованіямъ Гельмгольца.

****) Въ 1791 году, годъ спустя послѣ смерти Франклина.

ній индукціи очень запоздало и вошло въ науку, искаженное ради сохраненія укоренившагося уже принципа „actio in distans", лишь тогда, когда явленія самоиндукціи были уже хорошо, сравнительно, извѣстны. То, что ранѣе всего было открыто въ области электричества, какъ электропроводность анэлектриковъ, распредѣленіе электричества по ихъ поверхности, взаимоотталкиваніе листиковъ электроскопа, и пр. — все это были именно явленія самоиндукціи или ихъ слѣдствія. Вполнѣ понятно, что въ эпоху до-фарадеевскую эти явленія, какъ единственно извѣстныя, должны были-быть признаны наиболѣе элементарными, основными, что, въ свою очередь, вызвало естественное желаніе дать имъ какое-нибудь объясненіе. Такимъ путемъ проникли въ физику тѣ фантастическія представленія о свойствахъ электричества, о которыхъ говорилось выше. И если, въ силу историческихъ условій, нельзя удивляться возникновенію этихъ наивныхъ гипотезъ самоотталкиванія, теченія, взаимоуничтоженія электричества и пр., если надо согласиться съ тѣмъ, что, коль скоро онѣ возникли, значитъ, и были въ свое время нужны,—то, съ другой стороны, нельзя не признать упорнаго ихъ сохраненія при изложеніи началъ электрофизики и въ настоящее время *очевиднѣйшимъ анахронизмомъ.*

(Продолженіе слѣдуетъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новое изолирующее вещество. Одна изъ фабрикъ въ окрестностяхъ Риги начала недавно изготовлять искусственный рогъ, обратившій на себя вниманіе и за границей. Изготовляемая рогообразная масса названа фабрикантомъ *корнитомъ.* Спеціальность фабрики изготовленіе китоваго уса. Сырьемъ служитъ индійскій рогъ, который даетъ обыкновенно 25 проц. готоваго продукта и 75 проц. отбросовъ. Эти отбросы обыкновенно измельчаются въ порошокъ, содержащій азотъ, цѣнность котораго не превышаетъ десятой доли стоимости рога. Поэтому вопросъ о наиболѣе раціональномъ использованіи отбросовъ китоваго уса давно стоялъ на очереди и интересовалъ спеціалистовъ. Задача вполнѣ успѣшно разрѣшена рижскимъ заводомъ, такъ какъ корнитъ, подобно натуральному рогу, пригоденъ для изготовленія всевозможныхъ предметовъ и можетъ быть обработанъ токарнымъ станкомъ.

Въ отношеніи упругости, корнитъ нѣсколько уступаетъ настоящему рогу, но зато изъ него можно приготовять предметы какой угодно величины въ то время, какъ изъ рога приготовляются предметы только весьма ограниченныхъ размѣровъ. Корнитъ является очень дешевымъ изолирующимъ матеріаломъ для разнообразныхъ цѣлей электротехники. Въ то время, какъ матовый рогъ очень некрасивъ, корнитъ, наоборотъ, напоминаетъ дорогое эбеновое дерево, съ которымъ онъ имѣетъ одинаковый удѣльный вѣсъ. Въ гигіеническомъ отношеніи корнитъ представляетъ то преимущество, что онъ твердый и плотный матеріалъ, незагрязняющійся. И при всѣхъ его преимуществахъ, корнитъ матеріалъ очень дешевый.

(„Электро-Техн. В.").

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 334 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе:

$$x^{0,5y^{0,5}}+y^{0,5x^{0,5}}=17.$$

*Г. Оганов*ъ (Эривань).

№ 335 (4 сер.) Рѣшить систему уравненій:

$$\frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\frac{121}{13}$$

$$x+y=2.$$

*К. Пеніонжкевич*ъ (Екатеринбургъ).

№ 336 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$x+\sqrt{xy}=a$$

$$y+\sqrt{x+y}=b.$$

*І. Өедоров*ъ (Спб.).

№ 337 (4 сер.). Имѣется безконечный рядъ возрастающихъ цѣлыхъ чиселъ

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

Найти общій видъ этихъ чиселъ, если извѣстно, что они обладаютъ слѣдующими свойствами: 1) всякое цѣлое положительное число можетъ быть представлено въ видѣ

$$u_m+u_l+\ldots+u_k-(u_p+u_q+\ldots+u_n) \quad (1),$$

гдѣ указатели m, l, ..., k, p, q, ..., r—суть различныя цѣлыя числа; 2) пользуясь въ формулѣ (1) указателями не выше n, можно представить всѣ положительныя цѣлыя числа отъ 1 до $u_1+u_2+\ldots+u_n$; 3) всякое цѣлое положительное число можетъ быть изображено формулой вида (1) лишь однимъ способомъ.

Я. Гукайло (село Тальное).

№ 338 (4 сер.). Пусть α и β — корни уравненія

$$px^2+qx-p^2=0;$$

доказать, что

$$\frac{\alpha^2+p}{\alpha^3+3p\alpha+q}+\frac{\beta^2+p}{\beta^3+3p\beta+q}=0.$$

(Заимств.).

№ 339 (4 сер.). Внѣ батареи P токъ развѣтвляется между точками A и B на двѣ части, ACB съ сопротивленіемъ въ 1 омъ и ADB — въ 2 ома. Сопротивленія частей цѣпи PA и PB равны соотвѣтственно 1 и 2 омамъ. Электродвижущая сила батареи 2,5 вольта, а внутреннее ея сопротивленіе 10 омовъ. Опредѣлить силу тока въ разныхъ частяхъ цѣпи.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 268 (4 сер.). *Даны уголъ* B *и точка* A. *На сторонахъ угла* B *найти точки* x *и* y *такъ, чтобы отрѣзокъ* xy *былъ параллеленъ данной прямой* L *и чтобы отношеніе отрѣзка* xy *къ его разстоянію отъ точки* A *имѣло данное значеніе.*

Выполнимъ построеніе методомъ подобія, принимая за центръ подобія точку B. Пересѣчемъ стороны угла B нѣкоторой прямой, параллельной прямой L *); пусть x' и y' суть точки пересѣченія сторонъ угла съ этой прямой. Затѣмъ строимъ отрѣзокъ a, удовлетворяющій пропорціи

$$\frac{x'y'}{a}=\frac{m}{n} \qquad (1)$$

гдѣ m и n—два отрѣзка, отношеніе которыхъ выражаетъ данное отношеніе искомаго отрѣзка xy къ его разстоянію отъ точки A. Возставивъ перпендикуляръ изъ точки y' къ прямой $x'y'$, откладываемъ по обѣ стороны точки y' на этомъ перпендикулярѣ отрѣзки $y'z'=y'z''=a$ и изъ точекъ z' и z'' проводимъ прямыя, параллельныя прямой $x'y'$. Пусть эти прямыя пересѣкаютъ лучъ BA соотвѣтственно въ точкахъ A' и A''. Обозначимъ черезъ $A'C'$ высоту треугольника $x'A'y'$; тогда сторона $x'y'$ этого треугольника параллельна прямой L и отношеніе отрѣзка $x'y'$ къ разстоянію его $A'C'$ отъ точки A' равно (см. (1)) $\frac{x'y'}{A'C'}=\frac{x'y'}{y'z'}=\frac{x'y'}{a}=\frac{m}{n}$. Чтобы перейти отъ отрѣзка $x'y'$ къ искомому, проводимъ изъ точки A прямыя, параллельныя прямымъ $A'x'$ и $A''x'$ до встрѣчи со стороной Bx' угла B въ точкахъ x и x_1; затѣмъ изъ точекъ x и x_1 проводимъ прямыя параллельно L до встрѣчи съ другой стороной угла B соотвѣтственно въ точкахъ y и y_1. Отрѣзки xy и x_1y_1 суть искомые. Анализъ и доказательство построенія выводятся легко изъ принциповъ метода подобія.

X. Вовси (Шадовъ); *Н. С.* (Одесса); *Я. Дубновъ* (Одесса).

№ 272 (4 сер.). *Исключить* z *изъ уравненій:*

$$x=\frac{2(m+nz^2)}{1+z^2}$$

$$y=\frac{2(m-n)z}{1+z^2}.$$

Полагая $z=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, можно представить данныя уравненія въ слѣдующемъ видѣ:

$$x=m.\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+n\frac{2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=m.2\cos^2\frac{\alpha}{2}+n.2\sin^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=m(1+\cos\alpha)+n(1-\cos\alpha)=m+n+(m-n)\cos\alpha \quad (1).$$

$$y=(m-n).\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=(m-n).2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}=2(m-n).\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=(m-n).\sin\alpha \quad (2).$$

---

*) Если это невозможно, то ищемъ точки x и y на сторонахъ угла B или ихъ продолженіи; въ этомъ смыслѣ задача становится возможной всегда, кромѣ случая, когда прямая L параллельна одной изъ сторонъ угла B.

Изъ уравненій (1) и (2) имѣемъ:

$$x-(m+n)=(m-n)\cos\alpha,$$

$$[x-(m+n)]^2=(m-n)^2\cos^2\alpha \qquad (3),$$

$$y^2=(m-n)^2\sin^2\alpha \qquad (4).$$

Складывая равенства (3) и (4), находимъ:

$$[x-(m+n)]^2+y^2=x^2+y^2-2(m+n)x+(m+n)^2=(m-n)^2 \qquad (5),$$

или

$$x^2+y^2-2(m+n)x+4mn=0.$$

Такимъ образомъ, предложенныя уравненія даютъ въ прямоугольныхъ координатахъ параметрическое представленіе окружности, центръ которой лежитъ (см. (5)) на оси x на разстояніи $m+n$ отъ начала координатъ и радіусъ которой равенъ $m-n$.

Ав. Яковкинъ (Екатеринбургъ); *Х. Вовси* (Шадовъ); *Г. Огановъ* (Эривань); *Л. Гальперинъ* (Бердичевъ); *И. Плотникъ* (Одесса).

№ 275 (4 сер.). *Черезъ центръ* O *данной окружности и черезъ данную точку* A *провести другую окружность такъ, чтобы общая хорда обѣихъ окружностей была данной длины.*

Предположимъ, что задача рѣшена, и пусть BC—общая хорда данной длины обѣихъ окружностей. Искомая окружность, проходя черезъ точки O, B и C, оказывается описанной около треугольника OBC, стороны котораго OB и OC извѣстны, какъ радіусы данной окружности, а BC извѣстна, какъ хорда данной длины; зная треугольникъ BOC, можно описать около него окружность и узнать такимъ образомъ радіусъ искомой окружности. Отсюда вытекаетъ слѣдующее построеніе: откладываемъ въ данной окружности гдѣ-нибудь хорду MN данной длины и описываемъ около треугольника MON окружность; пусть P—центръ этой окружности; строимъ перпендикуляръ въ срединѣ отрѣзка OA и на этомъ перпендикулярѣ изъ точки O радіусомъ, равнымъ MP, опредѣляемъ засѣчки O' и O'', а затѣмъ описываемъ тѣмъ же радіусомъ изъ точекъ O' и O'' окружности, которыя и суть искомыя (для доказательства построенія, обозначая по прежнему общую хорду черезъ BC, замѣтимъ, что треугольники PMO и $OO'C$ (или $OO''C$) равны по тремъ сторонамъ, а потому и высоты ихъ MQ и CQ, т. е. полухорды MN и BC равны). Такимъ образомъ, задача имѣетъ вообще два рѣшенія и возможна тогда, когда MN менѣе діаметра даннаго круга и когда MP не менѣе половины OA.

Ав. Яковкинъ (Екатеринбургъ); *Н. Куницынъ* (Усть-Медвѣдица); *Г. Холодный* (Новочеркасскъ); *Я. Дубновъ* (Одесса).

№ 276 (4 сер.). *Привести къ логариѳмическому виду при помощи вспомогательнаго угла выраженія:*

$$a+2b\,tg\alpha-a\,tg^2\alpha, \quad b-2a\,tg\alpha-b\,tg^2\alpha,$$

$$\frac{a+2b\,tg\alpha-a\,tg^2\alpha}{b-2a\,tg\alpha-b\,tg^2\alpha}.$$

Полагая $\frac{a}{b}=tg\varphi$, находимъ:

$$a+2b\,tg\alpha-a\,tg^2\alpha=a(1+2ctg\varphi-tg^2\alpha)=$$

$$=\frac{a[\sin\varphi(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-\cos\varphi.2\sin\alpha\cos\alpha]}{\cos^2\alpha.\sin\varphi}=\frac{a(\sin\varphi\cos2\alpha+\cos\varphi\sin2\alpha)}{\cos^2\alpha.\sin\varphi}=$$

$$=\frac{a\sin(\varphi+2\alpha)}{\cos^2\alpha.\sin\varphi}.$$

$$b-2a\operatorname{tg}\alpha-b\operatorname{tg}^2\alpha=b(1-2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha)-$$

$$=\frac{b[\cos\varphi(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-\sin\varphi.2\sin\alpha\cos\alpha]}{\cos^2\alpha.\cos\varphi}=\frac{b\cos(\varphi+2\alpha)}{\cos^2\alpha.\cos\varphi}.$$

Дѣля почленно только что выведенныя равенства

$$a+2b\operatorname{tg}\alpha-a\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{a\sin(\varphi+2\alpha)}{\cos^2\alpha.\sin\varphi},$$

$$b-2a\operatorname{tg}\alpha-b\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{b\cos(\varphi+2\alpha)}{\cos^2\alpha\cos\varphi}$$

одно на другое, получимъ:

$$\frac{a+2b\operatorname{tg}\alpha-a\operatorname{tg}^2\alpha}{b-2a\operatorname{tg}\alpha-b\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin(\varphi+2\alpha)}{\cos(\varphi+2\alpha)}=\operatorname{tg}(\varphi+2\alpha).$$

В. Винокуровъ (Москва); *Г. Огановъ* (Эривань).

№ 277 (4 сер.). *Найти въ десятичной системѣ трехзначное цѣлое число, которое, будучи написано по системѣ съ основаніемъ 9, даетъ число, написанное тѣми же цифрами, какъ и искомое, но въ обратномъ порядкѣ.*

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Пусть x, y, z суть соотвѣтственно цифры сотенъ, десятковъ и единицъ искомаго числа. Будучи записано по системѣ съ основаніемъ 9, искомое число, по условію, имѣетъ видъ $z.9^2+y.9+x$. Такимъ образомъ, имѣемъ уравненіе:

$$100x+10y+z=81z+9y+x,$$

или же

$$100x+y-x=80z,$$

откуда

$$\frac{y-x}{10}=8z-10x \qquad (1).$$

Такъ какъ x, y и z числа цѣлыя, то (см. (1)) разность $y-x$ дѣлится на 10; но каждое изъ положительныхъ чиселъ y и x, обозначая цифру десятичной системы, менѣе 10. Поэтому и разность $y-x$ менѣе 10, а потому эта разность, дѣлясь на 10, равна 0, такъ что

$$x=y \qquad (2).$$

Поэтому (см. (1))

$$8z-10x=0, \quad 4z=5x,$$

откуда, замѣчая, что 4 и 5 числа взаимно простыя, находимъ:

$$z=5t, \quad x=4t \qquad (3).$$

Такъ какъ z цифра десятичнаго счисленія, то (см. (3))

$$0\leqslant z=5t<10,$$

откуда t равно 0 или 1; но x, какъ первая цифра трехзначнаго числа, не равно 0; поэтому $t=1$, $x=4$, $z=5$ (см. (3)). Слѣдовательно, (см. (2)) искомое число равно 445.

Я. Дубновъ (Одесса); *Г. Огановъ* (Эривань).

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 20-го Мая 1903 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

N. H. Abel

Обложка
ищется

Обложка
ищется