Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXVII Сем. № 4.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

28 Февраля № 316. 1902 г.

Содержаніе: Два случая дѣйствія электричества на фотографическую пластинку. *А. Фомиліанта.* (Окончаніе). — Къ статьямъ проф. Н. Шиллера и г. Д. Шора. *Проф. Д. Н. Зейлигера.*—Этюды по основаніямъ геометріи. Измѣреніе объемовъ многогранниковъ. *С. Шатуновскаго.* (Продолженіе).—Научная хроника: Объ опытѣ Klinkerfues'а. Направленіе тока въ молніи. Юбилей Otto von Guericke. — Разныя извѣстія: Johann Wilhelm Hittorf. † Johann Pernet. Преміи Парижской Академіи Наукъ. Памятникъ Joule'ю. Число профессоровъ и студентовъ въ Парижскомъ Университетѣ. — Опыты и приборы: Эпидіаскопъ Карла Цейсса. *И. Точидловскаго.* — Задачи. XXXVI—XXXVII. — Задачи для учащихся, №№ 160—165 (4 сер.). — Рѣшенія задачъ №№ 70, 80, 82, 84, 88.—Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.—Объявленія.

Два случая дѣйствія электричества на фотографическую пластинку.

А. Фомиліанта въ Одессѣ.

Окончаніе *).

II.

Второй изъ разбираемыхъ нами случаевъ дѣйствія электричества на фотографическую пластинку—это дѣйствіе электрической конвекціи. Явленіе это состоитъ въ томъ, что въ полѣ наэлектризованнаго острія образуется *какъ бы* теченіе электричества отъ острія въ окружающій діэлектрикъ (воздухъ). Я прибавилъ здѣсь слово *какъ бы*, такъ какъ, строго говоря, нѣтъ еще пока достаточно основаній утверждать, что мы имѣемъ въ данномъ случаѣ дѣло съ дѣйствительнымъ теченіемъ электричества: явленія, наблюдаемыя въ полѣ наэлектризованнаго острія, происходятъ такъ, какъ если бы происходило дѣйствительное теченіе электри-

*) См. № 315 „Вѣстника“.

чества. Характеръ явленія яснѣе всего иллюстрируется названіемъ „*электрическій вѣтеръ*“, тѣмъ болѣе, что можно отыскать и „*электрическую мельницу*“ (въ томъ же смыслѣ, какъ, напр., и водяная), которую этотъ вѣтеръ сталъ бы вращать. Въ самомъ дѣлѣ, опыты показали, что кружокъ какого-нибудь діэлектрика, помѣщенный на другомъ остріѣ (лучше всего, соединенномъ съ землею), будучи внесенъ въ поле острія, начинаетъ вращаться.

Интересъ изученія явленій, наблюдаемыхъ въ электрическомъ полѣ острія, особенно усиливается тѣмъ обстоятельствомъ, что эти явленія не стоятъ особнякомъ, въ качествѣ явленій, вызываемыхъ однимъ только полемъ острія. Оказывается, что явленіе вращенія діэлектрика вызываетъ также поле трубки Рентгена и поле всей цѣпи, по которой проходитъ перемѣнный токъ высокаго напряженія. Однако наблюденія только что указанныхъ явленій выяснили, что основнымъ условіемъ вращенія діэлектрика *въ воздухѣ* какъ бы является присутствіе острія и что трубка Рентгена играетъ роль лишь постольку, поскольку здѣсь имѣетъ мѣсто стеканіе электричества съ электродовъ трубки. Если помѣщать діэлектрическій кружокъ вблизи цѣпи перемѣннаго тока или въ полѣ Румкорфовой спирали, то вращеніе *въ воздухѣ* происходитъ лишь въ томъ случаѣ, если помѣстить вблизи остріе, соединенное съ землею или помѣстить діэлектрикъ на это остріе.

За одинъ изъ способовъ раскрытія „*механизма*“ явленія изслѣдователи брали изученіе дѣйствія разсматриваемаго электрическаго поля на свѣточувствительную пластинку. Я подчеркиваю здѣсь слово „механизмъ“, такъ какъ фотографическая пластинка ничего намъ не можетъ пока сказать о сущности явленія: она отвѣтитъ намъ только на вопросъ „какъ происходитъ явленіе?“ Вотъ какіе результаты далъ этотъ методъ изслѣдованія поля наэлектризованнаго острія.

Прежде всего оказалось, что отъ дѣйствія наэлектризованнаго острія бромистая соль серебра пластинки разлагается преимущественно въ *поверхностныхъ* слояхъ желатиновой пленки. Это обстоятельство сказывается въ томъ, что при проявленіи выступаетъ рисунокъ то на наружной сторонѣ чувствительнаго слоя, то на внутренней (со стороны стекла) его поверхности, причемъ часто другая поверхность и признаковъ разложенія не обнаруживаетъ. Понятно, что это обстоятельство представляетъ для экспериментаторовъ не малое затрудненіе, такъ какъ проявленія, въ обыкновенномъ смыслѣ этого слова, нельзя доводить до конца; попытки въ этомъ направленіи вели къ перепроявленію пластинки и къ полному исчезновенію фигуры.

Сила дѣйствія на чувствительную пластинку поля острія существеннымъ образомъ зависитъ отъ условій опыта. При дѣйствіи одного острія, заряжаемаго помощью машины, дѣйствіе получается слабое; бо́льшее дѣйствіе получается, когда пластинка помѣщается между 2-мя остріями, заряжаемыми разноименно; максимальное дѣйствіе получается при дѣйствіи 2-хъ острій, изъ которыхъ одно заряжается помощью машины, а другое соединяется съ землею. Остріе, заряжаемое положительно или соединяемое съ землею, въ опытахъ *) помѣщалось либо вертикально, либо горизонтально, иногда въ одной плоскости съ другимъ остріемъ, иногда въ различныхъ плоскостяхъ; второе остріе помѣщалось всегда горизонтально. Пластинка подвергалась дѣйствію поля 30—60 мин., при чемъ, для уничтоженія свѣтового дѣйствія, на концы острій одѣвались полые эбонитовые цилиндрики. Въ этомъ заключаются всѣ основныя особенности опытовъ.

Разнообразная *форма* фигуръ зависитъ, понятно, не только отъ того, въ какомъ мѣстѣ электрическаго поля находится пластинка, но и отъ расположенія послѣдней относительно линій силъ (линій потока, въ данномъ случаѣ) или, иначе, относительно отрицательнаго острія, такъ какъ его положеніе неизмѣнно. Если пластинка и ось острія находятся въ одной плоскости, то получается фигура въ формѣ лучей сѣвернаго сіянія, проходящихъ черезъ всю пластинку. Если пластинка была помѣщена нѣсколько ниже острія, то получались черныя полосы, которыя, при тщательномъ проявленіи и соотвѣтственной экспозиціи, распадаются на отдѣльные тонкіе штрихи.

Изъ фактовъ, которые удалось подмѣтить помощью чувствительной пластинки, особенно любопытенъ тотъ, что въ мѣстахъ встрѣчи разноименныхъ электричествъ не замѣтно никакихъ существенныхъ измѣненій въ способѣ распространенія электричествъ, и дальше электричества того и другого знака распространяются въ области дѣйствія другого электричества такъ же точно, какъ и до встрѣчи съ нимъ. Чисто механическія причины, наоборотъ, видоизмѣняли характеръ дальнѣйшаго распространенія электричества. Такое вліяніе оказывалъ край пластинки: онъ сообщалъ волнистое строеніе линіямъ тока, указывая на нѣкотораго рода быстро затухающія волненія, возбуждаемыя этимъ краемъ. Фигура имѣетъ въ этомъ случаѣ форму тонкихъ штриховъ, тянущихся отъ одного края пластинки до другого; пластинка помѣщалась горизонтально въ одной плоскости съ отрицательнымъ остріемъ, положеніе же положительнаго острія не оказывала существеннаго вліянія на характеръ фигуры.

Польза фотографической пластинки въ дѣлѣ изученія свойствъ поля наэлектризованнаго острія не ограничивается тѣмъ, что дѣлаетъ видимыми всѣ линіи силъ и фиксируетъ ихъ. Пластинка позволяетъ также прослѣдить вліяніе, которое оказываетъ на способъ распространенія электричества проводникъ или непроводникъ, а это для изслѣдованія весьма существенно, такъ какъ, если діэлектрикъ подвергается дѣйствію силъ поля, то здѣсь очевидно имѣютъ мѣсто деформаціи силовыхъ линій поля,

*) Эти опыты производились Leduc'омъ (Comptes Rendus, CXXVIII, № 24, p. 1448) и Н. П. Мышкинымъ („Потокъ электричества въ полѣ наэлектризованнаго острія и его дѣйствіе на діэлектрикъ". Варшава. 1900).

которыя и вызываютъ наблюдаемыя вращенія діэлектрика. Опытъ вполнѣ подтвердилъ это предположеніе: кусокъ діэлектрика, помѣщенный на пластинку, даетъ свой отпечатокъ и деформируетъ силовыя линіи (мы можемъ сказать: линіи тока электричества) вблизи своей поверхности.

Другія условія опыта дали слѣдующій результатъ.

Въ промежуткѣ между двумя остріями помѣщали пластинку слоемъ внизъ, а на нее помѣщали металлическую палочку. Снимокъ, полученный такимъ путемъ, обнаружилъ въ мѣстахъ соприкосновенія палочки съ пластинкой много черныхъ пятенъ, уничтожавшихъ изображеніе линій тока электричества. Для уничтоженія этихъ пятенъ достаточно было соединить палочку съ землею; при этомъ линіи тока выступали значительно рѣзче. Оказалось, что прутикъ, соединенный съ землею, дѣйствуетъ въ полѣ острія какъ направитель. На всемъ протяженіи прутика линіи тока обнаруживаютъ стремленіе сблизиться, сильно сгущаясь около его поверхности и образуя рядъ тонкихъ штриховъ, имѣющихъ направленіе, почти параллельное оси прутика.

Совсѣмъ другое вліяніе оказываетъ на токъ электричества при тѣхъ же условіяхъ стеклянная палочка. Около конца, ближайшаго къ наэлектризованному острію, палочка дѣйствуетъ какъ направитель: линіи тока приближаются къ ней и располагаются вдоль. Но далѣе токъ отбрасывается въ сторону, образуются рѣзко выраженныя вѣтви, отъ которыхъ отдѣляются кисти теченія, стремящагося двигаться вдоль прутика.

Вышеизложеннымъ исчерпаны всѣ существенныя особенности фигуръ, полученныхъ въ электрическомъ полѣ острія и проливающихъ нѣкоторый свѣтъ на загадочную природу электрической конвекціи.

Бросимъ, въ заключеніе, бѣглый взглядъ на отношеніе фотографической пластинки къ различнымъ физическимъ дѣятелямъ. Въ первой части статьи мы прослѣдили дѣйствіе разрядовъ на чувствительный слой бромистаго серебра, далѣе мы разсмотрѣли дѣйствіе электрической конвекціи на ту же пластинку; однако въ томъ и другомъ случаѣ мы ограничивались лишь *качественной* стороной дѣла, не вдаваясь въ *количественную* оцѣнку добытыхъ фактовъ. Мы нигдѣ не разбирали количественныхъ данныхъ опыта и не выражали *численно* результатовъ. Если обращать вниманіе на эту сторону дѣла, то оказывается, что нѣкоторые намеки на количественную зависимость причинъ и дѣйствій, т. е. на *законъ* явленій, можно найти. Такъ, напр., ширина (діаметръ) фигуры разряда зависитъ отъ свѣточувствительности пластинки: съ увеличеніемъ ея діаметръ изображенія увеличивается; съ увеличеніемъ времени экспозиціи діаметръ также растетъ; для дѣйствія электричества есть также свой предѣлъ (въ смыслѣ увеличенія діаметра), послѣ котораго наступаетъ передержка — вся фигура становится неотчетливой, а затѣмъ и вовсе исчезаетъ. Эти факты напоминаютъ аналогичную законность въ дѣйствіи свѣта на пластинку и ставятъ на очередь заманчивый вопросъ о единствѣ закона, управляющаго дѣйствіями электричества и свѣта на фотографическую пластинку. Однако это вопросъ нѣсколько преждевременный, такъ какъ для сравненія этихъ дѣйствій, для утвержденія единства управляющаго ими закона, для созданія теоріи фотохимическихъ процессовъ съ точки зрѣнія *электро-магнитной теоріи свѣта*, необходимо прежде всего установить фактъ дѣйствія (вообще) электромагнитныхъ *колебаній* на галоидныя соли серебра, найти приближенный законъ этихъ дѣйствій и тогда уже сравнивать его съ подобнымъ же закономъ, установленнымъ для дѣйствія свѣтового *). Это дѣло химической техники ближайшаго будущаго, такъ какъ вся суть въ приготовленіи пластинки, чувствительной къ большей длинѣ волны, составляющей единственное отличіе электромагнитной волны отъ свѣтовой.

Одесса.
23 февраля 1902 г.

Къ статьямъ проф. Н. Шиллера и г. Д. Шора.

Проф. Д. Н. Зейлигера въ Казани.

Въ №№ 307 и 309 настоящаго журнала г. М. Волковымъ и затѣмъ мною были даны новые выводы ускоренія центростремительной силы. Той же темѣ посвящены статьи проф. Н. Шиллера (№ 313, стр. 7—16) и г. Д. Шора (№ 314, стр. 31—35). По поводу этихъ статей я позволю себѣ высказать нѣсколько замѣчаній, имѣющихъ, кажется, общій интересъ.

Нельзя не признать вполнѣ законными сомнѣнія, вызванныя въ уважаемомъ профессорѣ выводомъ г. М. Волкова, но въ нихъ, по моему, главнымъ образомъ, повинна редакція вывода, существо же дѣла ими не затрогивалось. Сущность статьи г. М. Волкова, если не ошибаюсь, состоитъ прежде всего въ стремленіи устранить принципы исчисленія безконечно-малыхъ, которыми въ болѣе или менѣе удачно замаскированномъ видѣ пользуется элементарная физика. Это стремленіе настолько симпатично и правильно съ точки зрѣнія педагога, что я готовъ высказать слѣдующее общее положеніе:

Элементарная механика и физика должны опираться въ своихъ выводахъ лишь на элементарную математику.

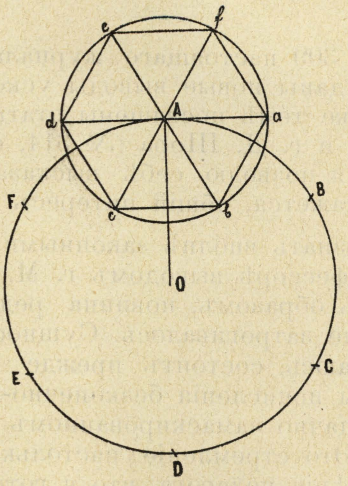
*) Литература по этому вопросу собрана въ книжкѣ Englisch'a: Das Schwärzungsgesetz für Bromsilbergelatine. 1901. Halle aS.

Только тогда выводы этихъ наукъ будутъ одинаково достовѣрны для учащихся. Слѣдовательно, пока принципы дифференціальнаго исчисленія не введены *явно* и *систематически* въ элементарную математику, нельзя ими пользоваться и въ элементарной механикѣ. Съ педагогической точки зрѣнія недопустимо употребленіе на урокахъ физики или механики такого математическаго инструмента, который отвергается или не допускается тутъ же рядомъ, на урокѣ математики.

На этомъ основаніи, какъ модификація вывода г. М. Волкова, такъ и новый выводъ ускоренія, предлагаемые проф. Н. Шиллеромъ на стр. 15 и 16 своей статьи, кажутся мнѣ неудачными. Исчисленію безконечно-малыхъ, которымъ широко пользуется въ томъ и другомъ случаѣ авторъ, нечего дѣлать въ такомъ элементарномъ вопросѣ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть точка A описываетъ окружность радіуса r и центра 0 равномѣрно со скоростью v. Вся окружность будетъ пройдена во время

$$1)\quad T=\frac{2\pi r}{v}.$$

Раздѣлимъ T на n равныхъ промежутковъ τ и обозначимъ чрезъ B, C, D, ... и т. д. положенія точки въ концѣ каждаго изъ этихъ промежутковъ. Далѣе изъ A, какъ центра, радіусомъ v опишемъ окружность и проведемъ ея радіусы Aa, Ab, Ac, . . . па-



Фиг. 1.

раллельные скоростямъ точки въ положеніяхъ A, B, C, . . . и направленные въ одну съ этими скоростями сторону. Многоугольники ABC . . . и abc . . . , очевидно, правильны и имѣютъ одинаковое число n сторонъ. Поэтому если p—периметръ второго изъ нихъ, то

$$p=n.ab,$$

Но

$$2)\ T = n.\tau,$$

откуда

$$3)\ \frac{p}{T} = \frac{ab}{\tau}.$$

Хорда ab, по построенію, представляетъ геометрическое приращеніе скорости движущейся точки за время τ. Слѣдовательно, предѣлъ дроби $\frac{ab}{\tau}$ при

$$\text{пред. } \tau = 0$$

даетъ величину искомаго ускоренія w, а предѣльное направленіе линіи $\overrightarrow{ab}$ будетъ направленіемъ вектора w. Отсюда прежде всего заключаемъ въ силу 3):

$$w = \frac{\text{пред. } p}{T}.$$

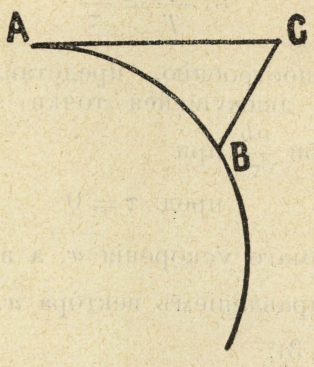
Но при τ безконечно-маломъ число n безконечно-велико, какъ видно изъ 2). Поэтому предѣломъ периметра p служитъ длина второй окружности, т. е., $2\pi v$. Вставляя это значеніе пред. и выраженіе 1) числа T въ послѣднюю формулу, найдемъ:

$$w = \frac{2\pi v}{2\pi r/v} = \frac{v^2}{r}.$$

Далѣе замѣтимъ, что предѣломъ для направленія ab служитъ направленіе касательной въ a ко второй окружности. Но радіусъ Aa послѣдней, по построенію, касается данной окружности въ A. Отсюда заключаемъ, что *ускореніе w имѣетъ направленіе радіуса* $\overrightarrow{AO}$.

Итакъ, возможно дать выводъ ускоренія, пользуясь лишь элементарной теоріей предѣловъ.

Далѣе я нахожу, что проф. Н. Шиллеромъ не оцѣнено по достоинству самое основаніе вывода г. М. Волкова. Выводъ этотъ, если я только правильно его понимаю, строится на сравненіи движенія по дугѣ AB окружности съ совокупностью равномѣрнаго движенія по касательной AC и равномѣрно-ускореннаго движенія по *девіаціи* CB. Ускореніе послѣдняго движенія имѣетъ своимъ предѣломъ искомое ускореніе. Отсутствіе этого опредѣленія и составляетъ, на мой взглядъ, единственный *теоретическій* недостатокъ статьи г. М. Волкова, подавшій поводъ къ замѣчаніямъ проф Н. Шиллера на стр. 11 и 15. Самый же пріемъ г. М. Волкова совершенно правиленъ и тѣснѣйшимъ образомъ связанъ съ исторіей механики. Въ XVII и XVIII столѣтіяхъ иного геометрическаго пріема и не могло быть у ученыхъ, такъ какъ общепринятое теперь опредѣленіе ускоренія вошло въ науку лишь въ XIX столѣтіи съ развитіемъ теоріи векторовъ, Обращаюсь теперь къ статьѣ г. Д. Шора. Авторъ упрекаетъ мой выводъ въ сложности и неточности. Оставляя въ сторонѣ вопросъ о сложности по понятнымъ причинамъ, я разсмотрю



Фиг. 2.

лишь упрекъ въ неточности. Ее г. Д. Шоръ устанавливаетъ очень просто. Приведя мое опредѣленіе ускоренія, онъ заявляетъ (стр. 32):

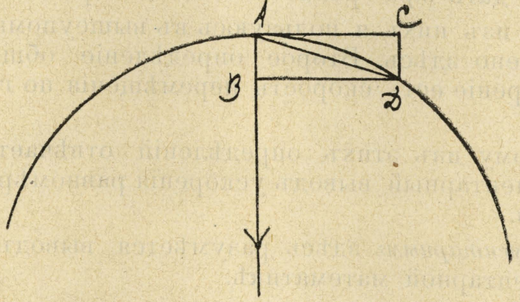
„Въ этомъ то опредѣленіи и кроется неточность вывода *Зейлигеръ—Волкова*. Можно принимать за опредѣленіе какого либо наименованія все, что угодно, но понятіе *ускореніе* имѣетъ опредѣленный общепринятый смыслъ—предѣлъ дроби, числителемъ которой служитъ геометрическое приращеніе скорости за промежутокъ времени τ, а знаменателемъ самое время τ, которое стремится при этомъ къ нулю. Если мы утверждаемъ, что ускореніе есть предѣлъ какого либо другого выраженія, то употребляемъ это слово въ иномъ смыслѣ, чѣмъ принято остальными людьми. Значитъ, мы говоримъ при этомъ о совершенно другомъ понятіи, чѣмъ то, которое вообще понимается подъ словомъ ускореніе".

Сказано очень сильно, но врядъ ли основательно. Авторъ, слѣдовательно, полагаетъ, что иного опредѣленія ускоренія, кромѣ общепринятаго, не можетъ быть? Такое преклоненіе предъ „общепринятымъ" менѣе всего умѣстно въ математикѣ; математику должны быть извѣстны *тысячи* фактовъ и *элементарныхъ*, допускающихъ болѣе одного опредѣленія. Въ своемъ увлеченіи „общепринятымъ" г. Д. Шоръ доходитъ даже до утвержденія, что различіе опредѣленій непремѣнно (*Значитъ* (*!?*) и т. д.), влечетъ за собой и различіе опредѣляемыхъ понятій (въ данномъ случаѣ, ускоренія). Здѣсь настолько очевидно смѣшеніе понятій опредѣленія и опредѣляемаго объекта, что я, не обинуясь, назову всю приведенную цитату сплошнымъ недоразумѣніемъ. Ошибочность утвержденій г. Д. Шора я покажу сейчасъ же на примѣрѣ ускоренія.

Пусть точка описываетъ линію $\overrightarrow{AB}$ за время τ, причемъ въ положеніи A она обладала скоростью v. За то же время τ точка, двигаясь по касательной въ A къ траекторіи равномѣрно со скоростью v, прошла бы отрѣзокъ

$$AC = v\tau.$$

На AC и CD построимъ параллелограммъ $ACDB$ и вычи-



Фиг. 3.

слимъ ускореніе w' такого равномѣрно ускореннаго движенія, при которомъ точка, выходя изъ покоя, прошла бы сторону AB за время τ. Какъ извѣстно,

$$AB = DC = \frac{1}{2} w'\tau^2.$$

Мы принимаемъ за опредѣленіе, что ускореніе w движенія по AB въ положеніи A есть предѣлъ w' при

$$\text{пред. } \tau = 0.$$

Не трудно усмотрѣть эквивалентность этого опредѣленія общепринятому. Въ самомъ дѣлѣ, при τ безконечно-маломъ CD представляетъ такъ наз. *девіацію*, обладающую слѣдующими свойствами, доказываемыми въ любомъ курсѣ математики:

1⁰ Направленіе девіаціи въ предѣлѣ параллельно ускоренію точки въ положеніи A.

2⁰ Величина ускоренія равна предѣлу дроби

$$\frac{CB}{{}^1/_2\tau^2},$$

т. е. предѣлу числа w', нами введеннаго. Итакъ несомнѣнно, что наше опредѣленіе ускоренія, на которое такъ обрушился г. Д. Шоръ, даетъ для ускоренія ту же величину и направленіе, какъ и общепринятое. Каждому непредубѣжденному читателю теперь, надѣюсь, ясно, насколько основательно вышеприведенное заявленіе г. Д. Шора, что слово ускореніе я употребляю „въ иномъ смыслѣ, чѣмъ принято остальными людьми".

Въ заключеніе настоящей замѣтки приведу основныя положенія доклада, прочитаннаго мною въ Декабрьскомъ засѣданіи мѣстнаго Физико-Математическаго Общества.

I. Можно дать *три* равнозначащихъ опредѣленія ускоренія.

Первымъ изъ нихъ я пользуюсь въ вышеупомянутой статьѣ, оно же повторено здѣсь. Второе опредѣленіе общепринятое. По третьему ускореніе есть скорость перемѣщенія по годографу даннаго движенія.

II. Каждому изъ этихъ опредѣленій отвѣчаетъ отдѣльный, точный и элементарный выводъ ускоренія равномѣрнаго движенія по окружности.

Подъ *элементарнымъ* здѣсь разумѣется выводъ, основанный лишь на элементарной математикѣ.

III. Самый простой изъ этихъ выводовъ соотвѣтствуетъ третьему опредѣленію. Сложнѣе выводъ, построенный на второмъ опредѣленіи. Еще болѣе сложенъ выводъ, соотвѣтствующій первому опредѣленію.

Казань. 19 февраля 1902 г

Этюды по основаніямъ геометріи.

II.

Измѣреніе объемовъ многогранниковъ.

С. Шатуновскаго въ Одессѣ [1]).

*(Продолженіе *).*

Въ предыдущемъ этюдѣ г. Каганъ изложилъ между прочимъ теорію площадей прямолинейныхъ фигуръ, которая была сообщена мною Математическому Отдѣленію Новороссійскаго

---

[1]) Первый этюдъ „Измѣреніе длинъ прямолинейныхъ отрѣзковъ и площадей прямолинейныхъ фигуръ" былъ помѣщенъ въ №№ 308, 311 и 312 „В.".

Послѣ того, какъ онъ былъ уже напечатанъ, нѣкоторые сотрудники любезно предложили редакціи свое содѣйствіе въ этомъ дѣлѣ. Мы рѣшили поэтому продолжать эти этюды совмѣстно. По существу каждый этюдъ будетъ представлять отдѣльный очеркъ; но всѣ они по возможности будутъ проникнуты одной общей руководящей идеей.

Новые подписчики могутъ получить оттискъ 1-го этюда безплатно.

Ред.

*) См. № 312 „Вѣстника".

Общества Естествоиспытателей нѣсколько лѣтъ тому назадъ. Точка зрѣнія, съ которой эта теорія была изложена г-номъ Каганомъ, заключается въ слѣдующемъ:

Установить систему измѣренія площадей прямолинейныхъ фигуръ значитъ отнести къ каждой прямолинейной фигурѣ ариѳметическое число, отличное отъ нуля, такъ, чтобы конгруэнтнымъ фигурамъ отвѣчали одинаковыя числа и чтобы фигурѣ, состоящей изъ нѣсколькихъ фигуръ, отвѣчало число, равное суммѣ тѣхъ чиселъ, которыя отнесены къ составляющимъ фигурамъ. Г. Каганъ показалъ, что обычное изложеніе теоріи площадей устанавливаетъ только, каково должно быть число, выражающее площадь прямолинейной фигуры, если для прямолинейныхъ фигуръ возможно установить систему измѣренія площадей. Но возможность установленія такой системы обычной теоріей не доказывается. Это принимается безъ доказательства, какъ *новое* допущеніе, какъ *новая* аксіома, на которой построена теорія площадей. Между тѣмъ аксіома такая не нужна. Этотъ деффектъ пополняется соображеніями, опубликованными мною и Hilbert'омъ. Въ настоящемъ очеркѣ, имѣя въ виду изложить аналогичную теорію объемовъ многогранниковъ, я намѣренъ однако стать на нѣсколько иную точку зрѣнія; именно я хочу связать этотъ вопросъ съ общимъ понятіемъ о величинѣ.

Въ сочиненіяхъ по элементарной геометріи объемъ тѣла трактуется, какъ величина. Къ этой величинѣ примѣняется идея измѣренія,—идея, примѣняемая ко всякой вообще величинѣ. Я утверждаю, что въ этомъ именно и заключается допущеніе, эквивалентное тому, которое формулировалъ г. Каганъ въ примѣненіи къ теоріи площадей. Я хочу сказать слѣдующее: если мы допустимъ, что съ геометрическими тѣлами связана нѣкоторая величина, которую мы называемъ объемомъ, то дальнѣйшее развитіе теоріи объемовъ въ обычномъ изложеніи можетъ считаться безупречнымъ. Но утвержденіе, что объемъ тѣла представляетъ собой величину, содержитъ въ себѣ допущеніе,— и это именно я и желаю выяснить.

Съ этой цѣлью остановимся подробнѣе на томъ, что въ настоящее время разумѣется подъ терминомъ *величина*.

Положимъ, что мы имѣемъ совокупность объектовъ, выдѣленныхъ нѣкоторымъ признакомъ въ обособленную группу. Такую совокупность объектовъ называютъ *многообразіемъ* или *комплексомъ*. Такъ напримѣръ, совокупность всѣхъ цѣлыхъ чиселъ представляетъ собой многообразіе; совокупность всѣхъ дѣйствительныхъ чиселъ, совокупность всѣхъ прямолинейныхъ угловъ, совокупность всѣхъ прямолинейныхъ фигуръ, всѣхъ многогранниковъ, совокупность всѣхъ алгебраическихъ уравненій съ раціональными коэффиціентами—все это суть многообразія.

Положимъ теперь, что мы имѣемъ нѣкоторое многообразіе и что мы установили для элементовъ этого многообразія критерій, при какихъ условіяхъ мы будемъ считать два элемента равными,—или неравными, и если два элемента не равны, то при какихъ условіяхъ мы будемъ считать одинъ больше или меньше другого. Если такой критерій установленъ, то говорятъ, что многообразіе образуетъ величину, а его элементы суть различныя значенія этой величины. Такъ совокупность всѣхъ дѣйствительныхъ чиселъ представляетъ собой величину, потому что для этого многообразія установленъ критерій сравненія ихъ элементовъ; каждое число есть одно значеніе этой величины. Совокупность всѣхъ угловъ образуетъ величину, потому что и для нихъ установленъ критерій сравненія, — а каждый уголъ въ отдѣльности представляетъ собой одно значеніе этой величины. Совокупность всѣхъ алгебраическихъ уравненій не образуетъ величины, потому что для элементовъ этого многообразія не установлено, при какихъ условіяхъ мы будемъ ихъ считать равными или неравными.

Однако здѣсь возникаетъ вопросъ: въ чемъ долженъ заключаться критерій, устанавливающій, при какихъ условіяхъ мы будемъ считать одинъ элементъ многообразія равнымъ, больше или меньше другого? Вполнѣ ли мы свободны при выборѣ этого критерія или онъ подлежитъ извѣстнымъ ограниченіямъ.

Конечно, если мы не будемъ считать вложеннымъ въ слова „равный", „больше", „меньше" никакого содержанія, то мы можемъ условиться разумѣть подъ ними все, что угодно. Но всюду, гдѣ эти понятія фигурируютъ въ математикѣ, ими выражаютъ соотношенія, обладающія опредѣленными формальными свойствами. Свойства эти многообразны, но всѣ они могутъ быть логически выведены изъ слѣдующихъ основныхъ положеній.

1) Каждые два элемента многообразія, для котораго установленъ критерій сравненія, должны быть либо равны, либо неравны; если два элемента не равны, то одинъ изъ нихъ долженъ быть больше другого.

2) Каждый элементъ равенъ самому себѣ.

3) Если элементъ a равенъ элементу b, то элементъ b равенъ элементу a.

4) Если элементъ a равенъ элементу b, а элементъ b равенъ элемента c, то элементъ a равенъ элементу c.

5) Если элементъ a больше элемента b, а элементъ b больше элемента c, то элементъ a больше элемента c *).

*) Мы будемъ еще имѣть случай возвратиться къ этому вопросу на страницахъ „Вѣстника". Мы покажемъ, что эти посылки не зависятъ одна отъ другой. Замѣтимъ, что *O. Stolz* въ своихъ „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" приводитъ два лишнихъ постулата.

Теперь мы можемъ точнѣе формулировать, что разумѣется подъ величиной.

Опредѣленіе I. *Если для элементовъ нѣкотораго многообразія установленъ критерій сравненія, т. е., установлены условія, при которыхъ мы будемъ считать одинъ элементъ равнымъ, больше или меньше другого, и если условія эти установлены такъ, что удовлетворяются соотношенія 1—5, то такое многообразіе называютъ величиной, а его элементы значеніями этой величины.*

Разсмотримъ примѣръ. Совокупность всѣхъ прямолинейныхъ угловъ образуетъ многообразіе. Для элементовъ этого многообразія установленъ критерій сравненія, который заключается, какъ извѣстно, въ слѣдующемъ.

Наложимъ уголъ ABC на уголъ $A'B'C'$ такъ, чтобы вершина перваго угла совпала съ вершиной второго угла; чтобы сторона BC перваго угла совпала со стороной $B'C'$ другого угла,—чтобы сторона AB перваго угла упала въ плоскости угла $A'B'C'$ по ту-же сторону отъ $B'C'$, по которую лежитъ сторона $A'B'$.

Если сторона AB при этомъ совпадетъ со стороной $A'B'$, то мы будемъ считать углы равными; если сторона AB упадетъ внутрь угла $A'B'C'$, то мы будемъ считать уголъ ABC меньше угла $A'B'C'$; если сторона AB упадетъ внѣ угла $A'B'C'$, то мы будемъ считать уголъ ABC больше угла $A'B'C'$.

Изъ геометрическихъ соображеній вытекаетъ, что устанавливаемыя этимъ критеріемъ условія, при которыхъ мы будемъ считать одинъ уголъ равнымъ, больше или меньше другого, удовлетворяютъ требованіямъ, выраженнымъ въ положеніяхъ 1—5.

Такъ изъ геометрическихъ соображеній вытекаетъ, что при производствѣ наложенія угла ABC на уголъ $A'B'C'$ въ указанномъ смыслѣ сторона AB должна занять опредѣленное положеніе: должна либо совпасть со стороной $A'B'$, либо упасть внутрь угла ABC, либо упасть внѣ его; одно исключаетъ другое. Это значитъ, что критерій устанавливаетъ полную дизъюнкцію: уголъ въ силу этого критерія всегда будетъ либо равенъ, либо больше, либо меньше другого. Иными словами, требованіе, выраженное въ 1-мъ постулатѣ, удовлетворено.

Далѣе, если при наложеніи угла ABC на уголъ $A'B'C'$ сторона AB совпадаетъ со стороной $A'B'$ угла $A'B'C'$, то при наложеніи угла $A'B'C'$ на уголъ ABC сторона $A'B'$ упадетъ на сторону угла ABC. Это значитъ, если въ силу нашего критерія уголъ ABC оказывается равнымъ углу $A'B'C'$, то уголъ $A'B'C'$ оказывается равнымъ углу ABC. Требованіе 2-ое также удовлетворено.

Такимъ же образомъ убѣдимся, что соотношенія, установленныя приведеннымъ выше критеріемъ сравненія угловъ, удовлеряютъ всѣмъ требованіямъ 1—5. Совокупность угловъ представляетъ собой величину, а каждый уголъ одно значеніе этой величины.

Предположимъ теперь, что мы установили бы иной критерій сравненія угловъ. Что мы согласились бы считать одинъ уголъ равнымъ другому, если они могутъ быть приведены въ совмѣщеніе; считать одинъ уголъ больше другого, если второй уголъ можетъ быть помѣщенъ внутри его (независимо отъ положенія вершины), и одинъ уголъ меньше другого, если онъ можетъ быть помѣщенъ внутри послѣдняго.

Легко видѣть, что соотношенія, устанавливаемыя этимъ критеріемъ, не удовлетворяютъ требованіямъ 1—5.

Въ самомъ дѣлѣ, если уголъ ABC можетъ быть совмѣщенъ съ угломъ $A'B'C'$, то онъ въ то-же время можетъ быть помѣщенъ и внутрь угла $A'B'C'$: для этого достаточно помѣстить вершину A внутри угла $A'B'C'$ и направить его стороны параллельно сторонамъ $B'A'$ и $B'C'$. При этомъ новомъ критеріи сравненія одинъ уголъ можетъ оказаться и равнымъ другому углу и больше его. Этотъ критерій не устанавливаетъ требуемой дизъюнкціи, требованіе 1-ое уже не удовлетворено. Устанавливая стало быть такой критерій сравненія, мы не создаемъ величины, въ смыслѣ опредѣленія I.

Изъ сказаннаго, надѣюсь, ясно, что всякій разъ, какъ мы утанавливаемъ критерій для сравненія элементовъ нѣкотораго многообразія съ цѣлью создать новую величину, мы *должны доказать*, что устанавливаемыя этимъ критеріемъ соотношенія удовлетворяютъ требованіямъ 1—5. Если мы этого не дѣлаемъ, то дѣлаемъ *допущеніе*, которое можетъ быть признано законнымъ только въ томъ случаѣ, если мы докажемъ, что это независимый постулатъ, что онъ не *можетъ быть* выведенъ изъ остальныхъ посылокъ.

Послѣ этого обратимся къ объемамъ многогранниковъ.

Для многообразія, состоящаго изъ всѣхъ многогранниковъ, мы устанавливаемъ критерій сравненія, заключающійся въ слѣдующемъ.

Если два многогранника конгруэнтны или могутъ быть составлены изъ соотвѣтственно конгруэнтныхъ многогранниковъ, то мы будемъ называть ихъ равновеликими, или будемъ говорить, что они имѣютъ равные объемы.

Если многогранникъ можетъ быть помѣщенъ внутри второго многогранника или можетъ быть составленъ изъ многогранниковъ, которые въ иномъ расположеніи могутъ быть помѣщены внутри второго многогранника, то онъ меньше послѣдняго.

Если второй многогранникъ можетъ быть помѣщенъ внутри перваго, или если онъ можетъ быть составленъ изъ частей, которыя могутъ быть помѣщены внутри перваго многогранника, то мы будемъ считать первый многогранникъ больше второго.

На этомъ критеріи сравненія построена вся теорія объемовъ; но удовлетворяютъ ли эти соотношенія требованіямъ 1—5. Возникаютъ слѣдующіе вопросы:

1) Устанавливаетъ ли этотъ критерій дизъюнкцію; это значитъ, если намъ даны два многогранника, то всегда ли можно одинъ изъ нихъ разрѣзать на такія части, чтобы изъ нихъ можно было составить многогранникъ, который либо конгруэнтенъ второму многограннику, либо помѣщается внутри его, либо покрываетъ его. Если это выполнить возможно, то исключаетъ ли одинъ изъ этихъ случаевъ — остальные; если напримѣръ многогранники конгруэнтны, то нельзя ли все же одинъ изъ нихъ помѣстить внутри другого, нельзя ли его разрѣзать на такія части, которыя помѣстились бы внутри другого многогранника.

2) Наконецъ, если дизъюнкція и устанавливается, то имѣютъ ли мѣсто остальныя соотношенія 2—5.

Этихъ вопросовъ геометрія въ обычномъ изложеніи не разрѣшаетъ. Она допускаетъ молчаливо, что положенія 1—5 удовлетворены, *допускаетъ*, что объемъ многогранника есть величина въ смыслѣ опредѣленія I.

Итакъ, трактуя объемъ многогранника какъ величину, мы дѣлаемъ двоякое допущеніе:

Во-первыхъ, мы принимаемъ, что для многогранниковъ *возможно* установить критерій сравненія въ согласіи съ принципами 1—5.

Во-вторыхъ, мы допускаемъ, что критерій сравненій, формулированный выше, удовлетворяетъ требованію.

Мы покажемъ, что первое изъ этихъ допущеній законно; вѣрнѣе, что эта теорія не нуждается въ допущеніи, потому что первое утвержденіе можетъ быть доказано. Съ этою цѣлью мы изложимъ теорію объемовъ, независимо отъ какихъ бы то ни было новыхъ допущеній; мы покажемъ, что эта теорія сама создаетъ критерій для сравненія многогранниковъ, удовлетворяющій всѣмъ требованіямъ 1—5. Таковъ предметъ настоящаго очерка.

Что касается второго допущенія, то оно оказывается несправедливымъ. Это доказано недавно г. M. Dehn'омъ въ статьѣ, помѣщенной въ 3-ьей тетради „Mathematische Annalen" за истекшій годъ. Работа Dehn'a *) будетъ изложена въ одномъ изъ ближайшихъ очерковъ.

---

*) *M. Dehn.* „Ueber den Rauminhalt".

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Объ опытѣ Klinkerfues'a.—Въ 1870 году *Klinkerfues* опубликовалъ въ журналѣ Геттингенскаго Ученаго Общества свои изслѣдованія „Движенія земли и солнца въ эѳирѣ“. Такъ какъ эѳиръ не вліяетъ замѣтнымъ образомъ на движеніе свѣтилъ, то возникаетъ предположеніе, что онъ не принимаетъ участія въ этихъ движеніяхъ; поэтому эѳиръ долженъ какъ бы находиться въ безпрерывномъ движеніи относительно земли. *Klinkerfues* сравниваетъ это явленіе съ движеніемъ судна по безбрежному океану: по относительному движенію воды можно судить о скорости движенія корабля. Такимъ образомъ можно было бы опредѣлить движеніе земли оптическимъ путемъ, сидя въ закрытой со всѣхъ сторонъ комнатѣ. Дѣйствительно, если направить лучи какого либо земного источника свѣта перпендикулярно къ земному движенію, то въ спектроскопѣ получается нормальный спектръ; если же направленіе луча не перпендикулярно къ направленію движенія данной точки земной поверхности (это движеніе надо считать происходящимъ не въ абсолютномъ пространствѣ, а въ эѳирѣ), то линіи спектра вообще передвинутся. *Klinkerfues* думалъ, что ему удалось дѣйствительно замѣтить это перемѣщеніе и притомъ такъ, что изъ перемѣщеній въ различное время сутокъ можно было заключить о движеніи земли въ соотвѣтствующемъ направленіи, а также о движеніи солнца.

На 73-емъ съѣздѣ нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей *H. Haga* сообщилъ о своей провѣркѣ опытовъ *Klinkerfues'a.* Аппараты *Haga*, конечно, значительно точнѣе, чѣмъ тѣ, которыми пользовался *Klinkerfues*; кромѣ того при расположеніи опытовъ *Haga* ввелъ нѣсколько поправокъ. Замѣчательно, что *Haga получилъ несомнѣнные отрицательные результаты.*

Направленіе тока въ молніи. *Max Toepler* (Дрезденъ) сообщаетъ въ журналѣ „Meteorologische Zeitschrift“ (Heft 11., November 1901, S. 481 ff.) о своихъ изслѣдованіяхъ направленія электрическаго тока молніи. Сильный электрическій токъ вызываетъ въ нѣкоторыхъ тѣлахъ—напримѣръ въ базальтѣ—остаточный магнитизмъ, если проходитъ достаточно близко отъ нихъ. Наблюдая расположеніе полюсовъ въ глыбахъ базальта, находящихся вблизи мѣста удара молніи, *Toepler* находитъ, что направленіе тока чаще бываетъ отъ земли къ облакамъ (59 разъ изъ 92), т. е. земля чаще служитъ анодомъ.

Юбилей Otto von Guericke.—20-го ноября текущаго (1902-го) года исполняется 300 лѣтъ со дня рожденія изобрѣтателя воздушнаго насоса, *O. v. Guericke.* Основатель аэростатики былъ, какъ извѣстно, бургомистромъ города Магдебурга, гдѣ въ настоящее время организованъ комитетъ для постановки ему памятника.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Johann Wilhelm Hittorf.—Проф. физической химіи Академіи въ Мюнстерѣ *Hittorf* праздновалъ 12-го января 50-ти-лѣтній юбилей профессорской дѣятельности.

† Johann Pernet.—15-го февраля скончался профессоръ физики Цюрихскаго Политехникума *Johann* (*Jean*) *Pernet* на 53 году жизни. Покойный былъ отъ 1869—1872 годъ помощникомъ директора Центральной Физической Обсерваторіи въ С.-Петербургѣ.

Преміи Парижской Академіи Наукъ.—Парижская Академія Наукъ присудила за работы, опубликованныя въ истекшемъ, 1901-омъ году: профессору химіи Берлинскаго Университета *Emil'ю Fischer'у* —медаль Лавуазье; *Lippmann'у* (Парижъ)—премію Jean Renyand'a (10000 франковъ);—*Pierr'y Curie* (Парижъ)—премію за физическія работы La-Gaze'a (10000 фр.); *Gabriel'ю Koenigs* — премію Petit d'Ormay (10000 фр.) за работы по математикѣ.

Памятникъ Joule'ю.—Вблизи Манчестера, въ мѣстѣ, гдѣ скончался *James Prescott Joule* проэктируютъ воздвигнуть въ честь его башню.

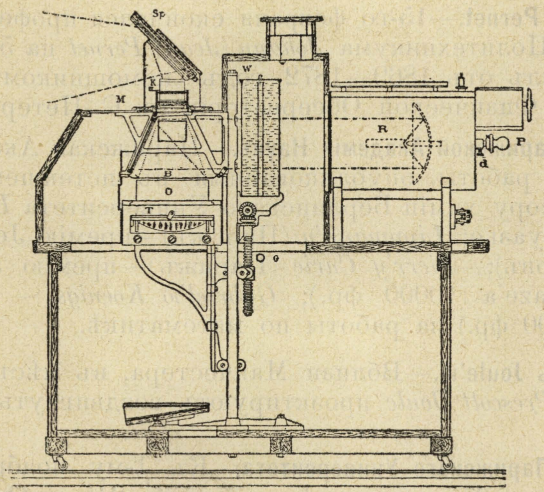
Составъ Парижскаго Университета. Къ 1-му ноября 1901 года въ Парижскомъ Университетѣ числилось 245 профессоровъ, изъ которыхъ 49 преподаютъ естественныя науки. Изъ 13469 студентовъ 1360 изучаютъ естественныя науки; изъ нихъ 146 — иностранцы (58 русскихъ).

ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Эпидіаскопъ Карла Цейсса.

Изъ числа приборовъ, демонстрированныхъ на выставкѣ въ Физическомъ Институтѣ Петербургскаго Университета во время XI съѣзда естествоиспытателей и врачей обращалъ на себя вниманіе проэкціонный приборъ, построенный фирмою C. Zeiss въ Jena'ѣ и названный „*Эпидіаскопъ*“.

Эпидіаскопъ Цейсса, насколько мнѣ удалось съ нимъ ознакомиться, служитъ исключительно для проэктированія туманныхъ картинъ, и съ трудомъ можетъ быть приспособленъ для другихъ опытовъ по оптикѣ. На прилагаемомъ чертежѣ изображенъ продольный разрѣзъ этого прибора. На рисункѣ представлено расположеніе частей прибора для діаскопической проэкціи, т. е. для проэктированія прозрачныхъ объектовъ. Какъ видно изъ чертежа, въ *R* находится источникъ свѣта — вольтова дуга, снабженная рефлекторомъ; свѣтъ отъ вольтовой дуги, пройдя чрезъ сосудъ съ плоско-параллельными стѣнками *W*, наполненный водою и предназначенный для поглощенія тепловыхъ лучей, попадаетъ на зеркало *II* и отразившись внизъ, встрѣчаетъ зеркало *III* и слегка дымчатую стеклянную пластинку *Rg*. Отъ зеркала *III* свѣтъ отражается вверхъ и линзою *S* собирается въ сходящійся пучокъ,



которымъ и освѣщаютъ предметъ (картину на стеклѣ), помѣщаемый на прозрачный столикъ *T*. При помощи системы *K* и зеркала *Sp* получаютъ изображеніе картины на экранѣ. Ходъ свѣтовыхъ лучей изображенъ пунктиромъ.

Для проэктированія непрозрачныхъ предметовъ служитъ расположеніе, нѣсколько иное. Свѣтъ, отразившись отъ зеркала *I*, попадаетъ на предметъ *O*, помѣщенный на столикъ *T*, и изображеніе непрозрачнаго предмета на экранѣ получается посредствомъ той же системы стеколъ *K*, что и выше.

Къ достоинствамъ этого прибора слѣдуетъ отнести: 1) значительные размѣры проэктируемаго предмета (до 22 cm. въ діаметрѣ), 2) отличная проэктирующая система стеколъ, ничуть не уступающая по своимъ достоинствамъ фотографическимъ объективамъ той же фирмы, 3) быстрота и удобство перехода отъ проэктированія непрозрачныхъ предметовъ къ проэктированію прозрачныхъ и наоборотъ, 4) присутствіе сосуда, задерживающаго тепловые лучи, почему предметы, не выносящіе большого нагрѣванія, можно держать на экранѣ довольно долго и 5) равномѣрность освѣщенія, достигаемая посредствомъ ряда отраженій.

Къ сожалѣнію, этотъ приборъ страдаетъ и недостатками, которые вредятъ отчасти его репутаціи. Къ числу недостатковъ можно отнести: 1) Громоздкость прибора ($1.5^m \times 0.75^m \times 1.5^m$). 2)

Отсутствіе системы стеколъ, при помощи которыхъ можно было бы измѣнять увеличеніе, не трогая прибора съ мѣста. Приборъ, напр., снабженъ объективомъ, имѣющимъ фокусное разстояніе 25^{cm} и свѣтосилу $^1/_4$, поэтому, чтобы получить изображеніе объекта увеличеннымъ, напр., въ 9 разъ, приходится ставить предметъ на разстояніи 2.5^m и, хотя получаемое на экранѣ изображеніе не оставляетъ желать ничего лучшаго, однако сплошь и рядомъ оно оказывается недостаточнымъ по величинѣ, а чтобы его увеличить, приходится отодвигать приборъ отъ экрана, что весьма неудобно. 3) Проэктированіе микроскопическихъ предметовъ, возможно лишь при небольшихъ увеличеніяхъ. 4) Чтобы получать хорошо освѣщенныя картины, необходимо имѣть очень сильный источникъ свѣта, напр., для вольтовой дуги необходимъ токъ въ 30—50 амп. при 60—70 вольтахъ. 5) Наконецъ, этотъ приборъ совершенно неприспособленъ для демонстраціи явленій оптическихъ.

Резюмируя сказанное, ясно, что эпидіаскопъ съ пользою можетъ функціонировать въ аудиторіяхъ, гдѣ не приходится прибѣгать къ очень большимъ увеличеніямъ. Наконецъ, по цѣнѣ приборъ мало доступенъ. Стоимость эпидіаскопа съ микроскопомъ около 2000 М.

Одесса. *И. Точидловскій.*

15 января 1902 г.

ЗАДАЧИ.

XXXVI. Выразить разстояніе d ортоцентра треугольника отъ центра описаннаго около него круга въ зависимости отъ радіуса R круга описаннаго и суммы квадратовъ сторонъ a, b, c треугольника.

На основаніи полученной формулы найти геометрическія мѣста 1) ортоцентровъ и 2) центровъ тяжести вписанныхъ въ данный кругъ треугольниковъ, сумма квадратовъ сторонъ которыхъ остается постоянной [искомыя геометрическія мѣста суть окружности, концентрическія съ описанной около треугольника окружностью].

Е. Григорьевъ (Казань).

XXXVII. Чрезъ вершину A треугольника ABC проведена прямая. Найти на ней точку x, обладающую слѣдующимъ свойствомъ: если A' B', C' суть точки пересѣченія прямыхъ Ax, Bx, Cx со сторонами BC, CA, AB треугольника, то перпендикуляры, возставленные изъ A', B', C' къ BC, CA, AB пересѣкаются въ одной точкѣ.

М. Зиминъ (Варшава).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 160 (4 сер.). На окружности даны точки A и B. Провести въ извѣстномъ направленіи хорду xy такъ, чтобы сумма (или разность) дугъ Ax и By данной величины.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 161 (4 сер.). На окружности даны точки A и B. Провести въ извѣстномъ направленіи хорду xy такъ, чтобы сумма (или разность) хордъ Ax и By была постоянной.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 162 (4 сер.). На данной гипотенузѣ построить такой прямоугольный треугольникъ, въ которомъ сумма высоты и катета наибольшая.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 163 (4 сер.). Даны два концентрическихъ круга и точка A. Отрѣзокъ данной длины помѣстить такъ, чтобы онъ однимъ концомъ упирался въ одну окружность, а другимъ въ другую и чтобы изъ точки A этотъ отрѣзокъ былъ видѣнъ подъ даннымъ угломъ.

В. Полонскій (Одесса).

№ 164 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^3+y^3+3(x+y)(x-b)(y-b)=a^3+b^3$$

$$x^3-y^3+3(x-y)(a-x)(a+y)=a^3-b^3.$$

Н. Готлибъ (Митава).

№ 165 (4 сер.). V литровъ воздуха, насыщеннаго парами воды подъ давленіемъ h сантиметровъ и при температурѣ t^0, охлаждены до t'^0 при томъ же давленіи. Требуется опредѣлить: 1) новый объемъ воздуха, 2) массу сгустившагося пара.

Атмосферное давленіе $H=76$ сантим.; $V=16$; $t=59$; $t'=0$; $h=75$ сант.; максимальныя упругости паровъ воды при 50^0 и 0^0 равны соотвѣтственно $F=9{,}2$ и $F'=0{,}4$.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 70 (4 сер.). *Доказать, что*

$$\frac{m_a n_a}{l_a^2}+\frac{m_b n_b}{l_b^2}+\frac{m_c n_c}{l_c^2}=\frac{R-r}{r},$$

гдѣ l_a, l_b, l_c *— биссекторы угловъ треугольника,* $m_a, n_a; m_b, n_b; m_c, n_c$ *— отрѣзки,* *опредѣляемые соотвѣтственно биссекторами на сторонахъ его* a, b *и* c, R *и* r — *радіусы круговъ описаннаго и вписаннаго.*

Пусть p—полупериметръ, S—площадь треугольника. Преобразуемъ предварительно выраженіе $a^2(p-b)(p-c)+b^2(p-c)(p-a)+c^2(p-a)(p-b)+4S^2$ Путемъ тожественныхъ преобразованій получимъ:

$$a^2(p-b)(p-c)+b^2(p-c)(p-a)+c^2(p-a)(p-b)+4S^2=$$

$$=a^2(p-b)(p-c)+b^2(p-c)(p-a)+c^2(p-a)(p-b)+4p(p-a)(p-b)(p-c)=$$

$$=p^2(a^2+b^2+c^2)-p[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)]+2pabc+4p^4-$$

$$-4p^3(a+b+c)+4p^2(ab+bc+ca)-4pabc=$$

$$=p^2(a^2+b^2+c^2)-p[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)]+4p^4-$$

$$-4p^3.2p+4p^2(ab+bc+ca)-2pabc=$$

$$=p^2(a^2+b^2+c^2)-p[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)]-4p^4+4p^2(ab+bc+ca)-2pabc=$$

$$=p^2[(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2+4(ab+bc+ca)]=$$

$$-p[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)]-2pabc=$$

$$=2p^2(ab+bc+ca)-p[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)]-2pabc=$$

$$=p[(a+b+c)(ab+bc+ca)-a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b)]-2pabc=pabc.$$

Итакъ

$$a^2(p-b)(p-c)+b^2(p-c)(p-a)+c^2(p-a)(p-b)+4S^2=pabc \quad (1).$$

Изъ извѣстныхъ формулъ

$$l_a^2=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2},\quad m_n=\frac{ab}{b+c},\quad n_a=\frac{ac}{b+c}$$ выводимъ:

$$\frac{m_a n_a}{l_a^2}=\frac{a^2}{4p(p-a)}.$$

Поэтому

$$\frac{m_a n_a}{l_a^2}+\frac{m_b n_b}{l_b^2}+\frac{m_c n_c}{l_c^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{a^2}{p(p-a)}+\frac{b^2}{p(p-b)}+\frac{c^2}{p(p-c)}\right]=$$

$$=\frac{a^2(p-b)(p-c)+b^2(p-c)(p-a)+c^2(p-a)(p-b)}{4p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

или же (см. (1)) —

$$\frac{m_a n_a}{l_a^2}+\frac{m_b n_b}{l_b^2}+\frac{m_c n_c}{l_c^2}=\frac{pabc-4S^2}{4S^2}=\frac{pabc}{4S^2}-1=\frac{\left(\frac{abc}{4S}\right)}{\left(\frac{S}{p}\right)}-1=\frac{R}{r}-1=\frac{R-r}{r},$$

что и требовалось доказать.

П. Полушкинъ (Знаменка); *N. N.*; *Б. Д.* (К.).

№ 80 (4 сер.). *Если*

$$2^m - 1 = ab,$$

гдѣ m, a и b—цѣлыя положительныя числа, причемъ $b>1$, то числа $a+1$ и $b-1$ дѣлятся на одну и ту же наивысшую степень 2-хъ.

Такъ какъ 2^m-1 есть число нечетное, то числа a и b также нечетныя, а числа $a+1$ и $b-1$ четны. Пусть высшія степени 2-хъ, на которыя дѣлятся $a+1$ и $b-1$, суть соотвѣтственно 2^x и 2^y. Тогда

$$a+1=2^x u,\quad b-1=2^y v,$$

гдѣ u и v—числа нечетныя. Поэтому

$$a=2^x u-1,\quad b=2^y v+1,\quad ab=(2^x u-1)(2^y u+1),$$

или

$$ab=2^{x+y}uv+2^x u-2^y v-1=2^m-1,$$

откуда

$$2^{x+y}uv+2^x u-2^y v=2^m \qquad (2).$$

Если $x<y$, то (см. (2))

$$2^x(2^y uv-2^{y-x}v+u)=2^m,$$

что невозможно, такъ какъ число $2^y uv-2^{y-x}v+u$ нечетно, въ виду нечетности u, и въ то же время число это болѣе 1, такъ какъ $2^y uv>2^{y-x}v$.

Если $x<y$, то (см. (2))

$$2^y(2^x uv+2^{x-y}u-v)=2^m,$$

что опять невозможно вслѣдствіе того, что число v нечетно и не равно 1. Итакъ $x=y$.

П. Полушкинъ (Знаменка); *Н. Готлибъ* (Митава).

№ 82 (4 сер.). *Показать, что при n цѣломъ и не меньшемъ нуля число $5^{5n^2-2n+1}+11^n$ дѣлится на 6.*

Представивъ предложенное выраженіе въ видѣ

$$5^{5n^2-2n+1}+5^n+11^n-5^n=5^n(5^{5n^2-3n+1}+1)+(11^n-5^n),$$

замѣчаемъ, что 11^n-5^n кратно разности $11-5=6$; такъ какъ число $5n^2-3n+1$ можно представись въ $3n(n-1)+2n^2+1$, гдѣ $n(n-1)$ четно, какъ произведеніе двухъ послѣдовательнмхъ цѣлыхъ чиселъ, то $5n^2-3n+1$ есть число нечетное и притомъ всегда положительное при n не меньшемъ нуля. Значитъ сумма нечетныхъ одинаковыхъ степеней $5^{5n^2-3n+1}+1=5^{5n^2-3n+1}+1^{5n^2-3n+1}$ кратна суммы $5+1=6$. Слѣдовательно и все предложенное выраженіе кратно 6.

П. Полушкинъ (Знаменка); *Н. Готлибъ* (Москва); *N. N.*; *Г. Огановъ* (Эривань); *С. Кудинъ* (Москва); *М. Семеновскій* (Перновъ); *М. Поповъ* (Асхабадъ); *Б. Д.* (К.); *В. Гудковъ* (Свеаборгъ).

№ 84 (4 сер.). *Построить треугольникъ по углу его B и по разстояніямъ α и β центра круга описаннаго отъ сторонъ его AB и AC.*

Предполагая задачу рѣшенной, обозначимъ черезъ O центръ круга описанннаго, черезъ $OM=\beta$ и $ON=\alpha$ — данныя разстоянія. Прямоугольный треугольникъ COM можно построить по катету $OM=\beta$ и острому углу $COM=\angle B$ (или $180^0-\angle B$, если уголъ B тупой). Отсюда вытекаетъ построеніе: построивъ отдѣльно треугольникъ COM, опишемъ изъ произвольной точка O, какъ изъ центра, равнымъ гипотенузѣ этого треугольника радіусомъ окружность, и проведемъ въ произвольномъ направленіи отрѣзокъ $OM=\beta$; черезъ конецъ M этого отрѣзка проводимъ хорду AC круга O, перпендикулярную къ OM; на OA, какъ на діаметрѣ, строимъ окружность и изъ тоски O радіусомъ α дѣлаемъ на этой окружности засѣчку N такъ, чтобы точки M и N лежали по разныя или по одну сторону прямой OA, смотря по тому, будетъ ли уголъ B острый или тупой (случай, когда $\angle B=90^0$ облегчаетъ построеніе, дѣлая безразличнымъ выборъ угла COM и засѣчки N). Назовемъ черезъ B вторую точку встрѣчи прямой AN съ окружностью O; треугольникъ ABC есть искомый.

П. Полушкинъ (Знаменка); *В. Толстовъ* (Тамбовъ); *А. Поповъ* (Асхабадъ); *Семеновскій* (Перновъ, Лифл. губ.); *А. Сорокинъ* (Москва); *Е. Огородниковъ* (Ровно); *В. Гудковъ* (Свеаборгъ).

№ 88 (4 сер.). *Сумма цыфръ трехзначнаго числа, записаннаго по десятичной системѣ равна 7. Доказать, что необходимое и достаточное условіе дѣлимости этого числа на 7 заключается въ томъ, чтобы цыфра единицъ была равна цыфрѣ десятковъ.*

Обозначая цыфры десятковъ и единицъ черезъ x и y, находимъ, что цыфра сотенъ равна $7-x-y$, причемъ $7-x-y>0$, или $x+y<7$ (1). Слѣдовательно разсматриваемое число равно

$$100[7-(x+y)]+10x+y=700-90x-99y \qquad (2).$$

Если $x=y$, то это число приводится къ виду $700-189x$; такъ какъ 700 и 189 кратны 7, то число это дѣлится на 7. Наоборотъ, пусть число $700-90x-99y$ кратно 7, т. е. равно $7t$, гдѣ t число цѣлое. Тогда

$$700-90x-99y=7t;\ 700-91x+x-98y-y=7t$$

$$x-y=-700+91x+98y+7t.$$

Каждый членъ второй части послѣдняго равенства кратенъ 7. Слѣдовательно разность $x-y$ кратна 7; но абсолютная величина этой разности менѣе 7, такъ какъ даже сумма $x+y$ (см. (1)) менѣе 7. Значитъ $x=y$.

Д. Дьяковъ (Новочеркасскъ); *Ю. Рабиновичъ* (Одесса); *М. Поповъ* (Асхабадъ); *Б. Мерцаловъ* (Москва); *Г. Огановъ* (Эривань); *П. Полушкинъ* (Знаменка); *Семеновскій* (Перновъ); *Н. Готлибъ* (Митава); *В. Микшъ* (Новочеркасскъ); *Б. Д.* (К.); *В. Гудковъ* (Свеаборгъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

В. А. Анисимовъ. *Къ теоріи геодезическихъ кривыхъ.* Статья первая. (43 стр.)

К. Ф. Петерсъ; проф. Грацскаго университета. *Популярная минералогія.* Изъ популярно-научной библіотеки А. Ю. Маноцковой № 7. Москва 1191 цѣна 80 коп.

Проф. **В. Я. Данилевскій.** *Изслѣдованія надъ физіологическимъ дѣйствіемъ электричества на растояніи. II Дальнѣйшіе опыты по нейро-электрикинезу.* Приложеніе къ запискамъ Императорскаго Харьк. Унив. за 1901 г. Харьковъ. 1901 г. 158 стр.

Содержанiе за десятилѣтiе 1822—1901 г. журнала „Мiръ Божiй".

Д-ръ **Шуманъ**. Переводъ съ нѣмецкаго Н. Державина.

Современное ученiе объ электричествѣ въ элементарно-математической обработкѣ. Изданiе Журнала „Электричество" С.-Петербургъ 1902 XIII+224 стран.

В. А. Циммерманъ. Десятичныя приближенiя чиселъ и способы приближеннаго вычисленiя суммы, разности произведенiя и частнаго. Одесса 1901. 38 стр. цѣна 25 к.

А. Романовъ. Инженеръ Путей сообщенiя кандидатъ Физико-Математическихъ наукъ. Ординарный Профессоръ Института Путей Сообщенiя Императора Александра I.

Таблицы обыкновенныхъ четырехзначныхъ логариѳмовъ и антилогариѳмовъ чиселъ отъ 1 до 1000, а также таблицы тригонометрическихъ величинъ съ объясненiями. С.-Петербуръ 1901. 32 стр. цѣна 25 коп.

А. Д. Романовъ. Орд. Проф. И. П. С.

Прiемы практическаго элементарнаго исчисленiя по сокращенiю и упрощенiю выкладокъ при производствѣ умноженiя и дѣленiя большихъ чиселъ. С.-Петербургъ 1901. 24 стр. Цѣна 20 коп.

Сборникъ Техническихъ знанiй. Изданiе экспедицiи заготовленiя государственныхъ бумагъ. С.-Петербургъ 1901. № 1. 13 стр.

Проф. **В. Ермакова**. *Разысканiе критическихъ точекъ въ интегралахъ дифференцiальныхъ уравненiй* Кiевъ 1901. 26 стран. Цѣна 40 коп.

И. Александрова. Преподавателя Тамбовской Гимназiи. *Методы рѣшенiй ариѳметическихъ задачъ съ приложенiемъ 100 типичныхъ задачъ.* Для старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведенiй. Пятое, передѣланное изданiе. Москва 1902. Цѣна 30 к. 40 стран.

Prof. Dr. **Ernst Lecher**. *Uber die Entdeckung der elektrischen Wellen durch H. Hertz und die weitere Entwickelung dieses Gebietes* Vortrag, Gehalten in der Hauptsitzung der Hamburger Versammung deutscher Naturforscher und Aerzte am 23 september 1901.

Leipzig 1901. Verlag von Johann Ambrosius Barth 32 станицы.

Dr. **W. Nernst** o. ö. Prof. a. d. Unir. Göttingen. *Uber die Bedeutung elektrischer Methoden u. Theorieen für die chemie.* Vortrag, dehalten am 27 september 1901. auf der 73 Naturforscher versammlung zu Hamburg. Göttingen van denhoeck & Kuprecht. 1901. 26 страницъ.

Д. В. Агановъ. *Отвѣты на всѣ вопросы по ариѳметикѣ и изъ приложенiя алгебры къ геометрiи, помѣщенные въ экзаменацiонныхъ программахъ конкурсныхъ испытанiй въ высшiя спецiальныя учебныя заведенiя.* Цѣна 85 коп. Оренбургъ 1901 г. 61 стр.

Проф. **В. Натансона**. переводъ съ польскаго А. Р-аго. **Популярная Физика** съ 140 рис. Изданiе А. Ю. Маноцковой цѣна 85 к. Москва 1901. 166 стр.

Литеротурный Сборникъ „Волжскаго Вѣстника" Премiя за 1900 г. Казань 1900. 212 стр.

Годичный Актъ къ Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ 5 ноября 1901 года. Прил. къ Зап. Казан. Унив. за 1901 г. Ноябрь. Казань 1901. 254+23 стр.

Отчетъ 1-го совѣщанiя Уральскихъ Химиковъ въ г. Екатеринбургѣ съ 22 по 25-ое марта 1901. Екатеринбургъ 1901. 88 стр.

Publications de l'Observatoire astronomique et physique de Tachkent № 3. Etudes sur la structure de l'nnivers. *Par W. Stratonoff.* Astrophisicien de l'Observatoire, de Tachkent. Deuxieme partie. Texte et atlas. 1901. 172 стр. и 10 таблицъ.

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 2-го Марта 1902 г.

Типографiя Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

Обложка
ищется

Обложка
ищется