Обложка
ищется

Обложка
пщется

XXV Сем. № 11.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

15 Іюня № 299. 1901 г.

О причинѣ полярныхъ сіяній.

Svante Arrhenius'a.

Переводъ съ нѣмецкаго *Д. Шора.*

*(Продолженіе *).*

Прежде отталкиваніе кометныхъ хвостовъ отъ солнца объясняли тѣмъ, что оба тѣла заряжены одноименнымъ (отрицательнымъ) электричествомъ. При этомъ хвосты, по *Бредихину*, должны были состоять изъ газовъ, а именно, изъ водорода, углеводорода (метана), натрія и желѣза. Въ послѣднее время предполагаютъ въ хвостахъ кометъ существованіе еще болѣе легкаго газа, а именно, въ наименѣе искривленныхъ хвостахъ предполагаютъ „короній", газъ, соотвѣтствующій линіи спектра короны. Съ физической и химической стороны эта гипотеза для объясненія отталкиванія хвостовъ кометъ содержитъ въ себѣ много произвольнаго. Уже основное, по существу не ложное предположеніе, что солнце обладаетъ электрическимъ зарядомъ, кажется многимъ трудно понятнымъ, если этотъ зарядъ долженъ производить столь громадныя отталкиванія, какія наблюдаются въ хвостахъ кометъ [12]).

*) См. № 298 „Вѣстника".

[12]) Сравн. *Newcomb*, Populäre Astronomie. Leipzig. 1881 г. 446.

Дальнѣйшимъ подтвержденіемъ воззрѣнія, по которому солнечное лучеиспусканіе производитъ хвосты кометъ, можетъ быть принято слѣдующее обстоятельство: по изслѣдованіямъ *Berberich'a* кометы даютъ, между прочимъ, наибольшую интенсивность свѣта въ годы, когда на солнцѣ замѣчается наибольшее число пятенъ. Солнечныя пятна происходятъ отъ вращательныхъ движеній на солнцѣ, такъ что въ годы большого числа солнечныхъ пятенъ солнце испускаетъ нѣсколько больше тепла, чѣмъ въ другое время. Такъ, *Савельевъ* нашелъ, что солнце испускало въ 1890, 1891 и 1892 годахъ (лѣтомъ) соотвѣтственно 29,8, 34,2 и 36 калорій въ часъ на квадратный центиметръ, въ то время какъ числа солнечныхъ пятенъ относились какъ 7: 47: 86 [13]). Въ особенности можетъ, при такихъ перемѣнахъ въ количествѣ солнечныхъ пятенъ, увеличиться испусканіе ультрафіолетовыхъ лучей. Кромѣ того, какъ будетъ показано ниже, увеличится число изверженій изъ солнца, а потому и количество „космической пыли", вылетающей изъ солнца. Оба эти обстоятельства благопріятствуютъ конденсаціи, т. е. образованію хвостовъ (и облаковъ) вокругъ ядра кометы, отчего послѣдняя получаетъ бо́льшую яркость, чѣмъ въ годы меньшаго числа солнечныхъ пятенъ. Что образованіе хвостовъ кометъ имѣетъ связь съ лучеиспусканіемъ солнца, принимаетъ и *Tyndall* во своей извѣстной теоріи. Хвосты состоятъ по этой теоріи изъ актиническихъ облаковъ, которыя отъ освѣщенія возникаютъ изъ образующихся на кометахъ газовъ, содержащихъ углеродъ [14]).

Понятно, что приведенное выше разсужденіе примѣнимо не только къ веществу кометъ, но и ко всей вообще пыли мірового пространства. Безъ сомнѣнія, большая часть ея образуется на самомъ солнцѣ. При громадныхъ изверженіяхъ, производящихъ протуберансы, большое количество матеріи естественно, выбрасывается изъ солнца; эта матерія конденсируется въ мельчайшія капельки и пылинки на большомъ разстояніи отъ солнца. Солнечные лучи своимъ давленіемъ гонятъ эти частички еще дальше и онѣ образуютъ своеобразные волокнистые отростки короны надъ мѣстами изверженій; эти отростки иногда во много разъ превосходятъ длину солнечнаго радіуса. Соотвѣтственно этому эти отростки начинаются какъ разъ въ тѣхъ точкахъ солнца, гдѣ сила его изверженія наибольшая, т. е. въ области солнечныхъ пятенъ (собственно, въ области солнечныхъ факеловъ). Тотъ фактъ, что эти отростки почти совершенно не искривлены, объясняется тѣмъ, что частичка, обладающая діаметромъ вдвое меньшимъ, чѣмъ критическій, подъ давленіемъ лучей солнца на разстояніи около ра-

---

[13]) *Savélieff*, Comptes rendus **1894**, **118**, **62**.

[14]) *Tyndall*, Heat as a mode of motion, 4 th. ed. *)

*) Тиндаль. Теплота какъ родъ движенія.

Прим. Ред.

діуса солнца отъ его поверхности, достигаетъ скорости приблизительно въ 430 km. въ секунду. Меньше, чѣмъ въ теченіе часа такая частичка пробѣгаетъ путь равный діаметру солнца. Если же, какъ въ хвостахъ кометъ, встрѣчаются частички въ восьмую долю критическаго значенія, то онѣ будутъ пробѣгать путь, равный солнечному діаметру приблизительно въ четыре минуты. Страннымъ является то обстоятельство, что кучи короны часто представляются исходящими изъ солнца не по продолженію радіуса, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто на прекрасной фотографіи солнечной короны, изготовленной въ январѣ 1898 года *Maunder'омъ*. На этой фотографіи два восточныхъ отростка короны представляются исходящими изъ точекъ вблизи полюсовъ солнца, а не изъ его центра. Очень возможно, что это объясняется дѣйствіемъ перспективы. Именно, если изъ передней и задней части солнца исходятъ подобные отростки короны, которые видны съ земли сильно укороченными и потому представляются относительно бо́лѣе яркими, то явленіе при нѣкоторыхъ условіяхъ можетъ дать такой свѣтовой эффектъ, точно отростокъ исходитъ изъ солнечныхъ полюсовъ почти по касательной. При самомъ изверженіи сила не должна быть непремѣнно направлена по радіусу солнца; не трудно представить себѣ также, что изъ мѣста изверженія исходитъ затѣмъ много лучей, вслѣдствіе болѣе высокой температуры внутреннихъ частей; основываясь на этомъ, можно было бы объяснить отклоненіе лучей короны отъ радіальнаго направленія. Болѣе опредѣленное рѣшеніе этого вопроса будетъ возможно, когда будетъ собрано большое число фотографій внѣшней короны.

Бо́льшая часть частичекъ, находящихся въ коронѣ, падаетъ, конечно, сейчасъ же обратно на солнце и описываетъ при этомъ иногда довольно искривленные пути, какъ это, напримѣръ, наблюдалось при затменіи солнца въ 1857 году (снимокъ *Liais*). Кромѣ того, въ нижнихъ частяхъ отростковъ находятся столь большія частички, что вѣсъ ихъ не парализуется цѣликомъ давленіемъ свѣтовыхъ лучей, такъ что онѣ послѣ изверженія, падаютъ обратно на солнце. Наконецъ, нѣкоторая часть меньшихъ частичекъ, обладая неравными скоростями, будутъ сталкиваться, и послѣ этого не будутъ разлагаться снова, а сольются; вслѣдствіе этого, тяжесть пересилитъ отталкиваніе, производимое на нихъ дугами.

Но нѣкоторыя частички будутъ продолжать свой путь далѣе въ пространствѣ. Конечно, ихъ концентрація будетъ постепенно уменьшаться по мѣрѣ удаленія отъ солнца. Если бы частички не падали обратно на солнце, то концентрація была бы приблизительно обратно пропорціональна квадрату разстоянія отъ солнца. Ибо на разстояніи отъ солнца, которое въ 10 разъ превышаетъ его радіусъ (что равно восьмой части орбиты Меркурія), скорость этихъ частичекъ можетъ быть принята постоянной—какъ это не трудно вычислить, съ точностью до 5 процентовъ. Вслѣдствіе же столкновенія и обратнаго паденія на солнце, концентрація частичекъ будетъ значительно быстрѣе уменьшаться. Слѣдовательно, количество частичекъ въ единицѣ объема на разстояніи отъ солнца равномъ r будетъ пропорціонально дроби $\frac{1}{r^{2+\alpha}}$, гдѣ α означаетъ нѣкоторое (малое) положительное число.

Итакъ, эти частички движутся во всѣ стороны отъ солнца. Когда возникшія отъ столкновенія нѣсколькихъ частичекъ большія частички падаютъ обратно на солнце, то движеніе это происходитъ также вдоль радіуса солнца. Слѣдовательно, наблюдатель, находящійся на ночной сторонѣ земли, если онъ только видитъ отраженный этими частичками свѣтъ солнца, получаетъ, вслѣдствіе перспективы, впечатлѣніе, что maximum этого свѣта находится въ точкѣ, прямо противоположной солнцу. Этимъ свойствомъ обладаетъ отраженный свѣтъ, ясно наблюдающійся въ южныхъ широтахъ. Уже прежде, какъ извѣстно, объясняли существованіе этого сіянія отраженіемъ отъ кучъ метеоровъ, исходящихъ отъ солнца или падающихъ на него. Но трудно представить себѣ, чтобы кучи метеоровъ такъ прямолинейно направлены были къ центру солнца; наоборотъ, онѣ должны были бы двигаться по путямъ, подобнымъ кометнымъ. Эти послѣднія орбиты еще вблизи земли направлены столь различно, что не могла бы образоваться столь ясно выраженная точка радіаціи, какъ это имѣетъ мѣсто при отраженномъ свѣтѣ.

Опытъ объясненія особенностей зодіакальнаго свѣта такимъ же образомъ напрашивается самъ собой. Ниже мы вернемся къ этому вопросу.

Изъ того обстоятельства, что концентрація частичекъ убываетъ быстрѣе, чѣмъ обратная величина квадрата ихъ разстоянія отъ солнца, вытекаетъ, что поглощеніе ими свѣта сосредоточивается почти исключительно въ мѣстахъ, ближайшихъ къ солнцу *).

До сихъ поръ мы ничего не говорили объ электрическихъ свойствахъ частичекъ, происходящихъ отъ солнца. Что электрическія силы играютъ здѣсь роль, можно заключить изъ наблюденій *Wilson'a* [15]); именно, онъ показалъ, что въ іонизированныхъ газахъ зернами конденсаціи служатъ преимущественно отрицательные іоны. Что при въ высшей степени рѣзкихъ движеніяхъ на солнцѣ должно происходить раздѣленіе положительнаго и отрицательнаго электричествъ, допускается уже давно; и трудно допустить, чтобы этого не было. Поэтому на солнцѣ должны происходить разряды, по сравненію съ которыми электрическіе разряды, наблюдающіеся на землѣ при вулканическихъ изверженіяхъ, являются совершенно ничтожными. При этихъ разрядахъ, которые

---

*) Мы сочли цѣлесообразнымъ выпустить въ переводѣ нѣсколько строкъ оригинала, гдѣ при помощи интегральнаго исчисленія доказывается высказанное въ послѣднихъ строкахъ предложеніе. *Прим. пер.*

[15]) *C. T. R. Wilson*, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ler. A. Vol. 193, 289—308, 1899. Сравн. *J. J. Thomson*, Phil. Mag. (5) 46, 533 (1898).

совершаются въ солнечной атмосферѣ на такой же высотѣ, на какую только доносятся изверженныя массы, возникаютъ въ тонкихъ верхнихъ слояхъ атмосферы солнца катодные лучи; эти послѣдніе, въ свою очередь, вызываютъ Рентгеновскіе лучи. Возможно даже, что Рентгеновскіе лучи испускаются солнцемъ непосредственно (т. е. независимо отъ катодныхъ лучей), но объ этомъ намъ ничего неизвѣстно. Во всякомъ случаѣ, при наличныхъ условіяхъ имѣется полное основаніе для предположенія, по аналогіи съ явленіями на землѣ, что въ болѣе тонкихъ слояхъ солнечной атмосферы часто встрѣчаются катодные и Рентгеновскіе лучи. Этого рода лучи обладаютъ способностью іонизировать пронизываемые ими газы, вслѣдствіе чего іоны, и преимущественно отрицательные, служатъ зернами для конденсаціи.

При конденсаціи вылетающихъ изъ солнца частичекъ, послѣднія будутъ заряжаться отрицательно и будутъ увлекать отрицательное электричество во внѣшнее пространство. Вслѣдствіе этого солнце и другія сильно свѣтящіяся небесныя тѣла окружены атмосферой (короной), которая заряжена положительно, въ то время какъ отрицательно заряженныя тѣльца вылетаютъ въ міровое пространство. Эти отрицательныя частички должны на своемъ пути встрѣчать другія небесныя тѣла—планеты, луны и т. п.; нѣкоторыя изъ этихъ частичекъ опустятся на эти небесныя тѣла, отчего послѣднія зарядятся отрицательно. Послѣ этого, заряженныя одноименно съ ними, (отрицательно) частички будутъ отталкиваться отъ этихъ свѣтилъ, такимъ образомъ онѣ отклоняются отъ своего пути и движутся по гиперболическимъ линіямъ. Тѣ, которыя обладаютъ наибольшею скоростью, все таки будутъ падать на заряженное небесное тѣло.

Но безпредѣльно отрицательный зарядъ увеличиваться не можетъ; когда отрицательный потенціалъ превыситъ извѣстный предѣлъ, произойдетъ разрядъ; кромѣ того, разряженіе будетъ поддерживаться дѣйствіемъ ультрафіолетовыхъ лучей солнца. Такимъ образомъ имѣетъ мѣсто слѣдующее подвижное равновѣсіе: въ достаточно продолжительный промежутокъ времени на небесное тѣло падаетъ столько отрицательно заряженныхъ частичекъ, что вполнѣ восполняется потеря заряда отъ дѣйствія ультрафіолетовыхъ лучей. Вѣроятно, потеря отрицательнаго электричества происходитъ оттого, что маленькія отрицательно заряженныя частички выбрасываются изъ атмосферы; такъ что можно, пожалуй, сказать, что весь эффектъ состоитъ въ слѣдующемъ: небесныя тѣла, находящіяся на пути движенія солнечныхъ частичекъ, отбрасываютъ позади себя родъ тѣни, которая, вслѣдствіе отклоненія частичекъ, шире оптической тѣни; кромѣ того, они нѣкоторое время сохраняютъ отрицательно заряженныя частички, а вслѣдствіе этого заряжены отрицательно.

Заряженныя частички, исходящія отъ освѣщеннаго небеснаго тѣла и частички, идущія отъ солнца и отклоненныя небеснымъ тѣломъ, образуютъ позади его родъ хвоста, центральная часть котораго свободна отъ заряженныхъ частичекъ, подобно тому какъ ось хвоста кометы не содержитъ вещества. Такимъ образомъ кометы и ихъ спутники играютъ роль экрана по отношенію къ тѣльцамъ, непосредственно исходящимъ отъ солнца; но то же справедливо и въ примѣненіи къ радіальнымъ токамъ заряженныхъ отрицательно и возвращающихся обратно на солнце частичекъ.

Постараемся представить себѣ теперь, что произойдетъ, соотвѣтственно этому воззрѣнію, на землѣ. На обращенную къ солнцу (дневную) сторону земли будетъ падать дождь отрицательно заряженныхъ частичекъ. Послѣднія остаются въ высочайшихъ слояхъ воздуха, даже выше чѣмъ самыя высокія падающія звѣзды, которыя, испуская достаточно свѣта, чтобы быть видными на разстояніи, большемъ 100 километровъ, должны обладать не малою массой. Поэтому мы можемъ принять, что слои атмосферы, въ которыхъ задерживаются частички, меньше чѣмъ въ 1 μ величиною, лежатъ приблизительно на высотѣ 200 километровъ, такъ какъ самыя высокія падающія звѣзды появляются приблизительно на высотѣ 160-ти километровъ. Эти слои воздуха, заряженные сильнѣе всего вокругъ точки, лежащей на прямой, соединяющей центры земли и солнца, разряжаются снова и производятъ катодные лучи. Наибольшая часть разряда будетъ происходить днемъ, подъ вліяніемъ ультрафіолетовыхъ лучей солнца, и не далеко отъ того мѣста, куда упали заряженныя частички (а слѣдовательно, больше того въ области экватора). Но и въ другое время, и въ странахъ, получающихъ мало свѣта или совсѣмъ не освѣщенныхъ, могутъ происходить вслѣдствіе воздушныхъ теченій настолько значительныя накопленія отрицательнаго электричества, что возникнутъ разряды, которые дадутъ катодные лучи.

Какъ извѣстно, выдающійся знатокъ сѣверныхъ сіяній *Dr. Adam Paulsen* [16]) нашелъ такое поразительное сходство между сѣверными сіяніями и катодными лучами, что онъ считалъ первое явленіе частнымъ случаемъ второго. Этотъ взглядъ былъ связанъ только съ одною трудностью; именно, трудно было представить себѣ, какъ возникаютъ эти катодные лучи. Очевидно, что вышеприведенный взглядъ разрѣшаетъ это затрудненіе. Такъ какъ скопленіе отрицательныхъ электрическихъ массъ происходитъ на высотѣ приблизительно въ 209 километровъ, гдѣ давленіе 10^{-8}—10^{-9} миллиметровъ ртути, то вначалѣ катодные лучи не вызываютъ никакого замѣтнаго свѣтового эффекта, такъ какъ среда черезъ-чуръ разряжена. Тѣмъ дальше проникаютъ они безъ замѣтнаго поглощенія. Изъ природы катодныхъ лучей слѣдуетъ, что они распространяются въ магнитномъ полѣ только въ томъ случаѣ прямолинейно, когда ихъ направленіе совпадаетъ съ направленіемъ магнитныхъ силовыхъ линій. Въ противномъ случаѣ, они описываютъ винтовыя линіи вокругъ этого направленія, какъ

---

[16]) *Ad. Paulsen:* Sur la natur et l'origine de l'aurore boréale. Bull. de l'Ac. Roy. de Sc. de Copenhague, 1894.

вокругъ оси; винтовыя линіи имѣютъ тѣмъ большую кривизну, чѣмъ больше уголъ между ними и магнитными силовыми линіями. Послѣднія же лежатъ у экватора почти параллельно поверхности земли; изъ этого вытекаетъ, что катодные лучи вблизи экватора не въ состояніи проникнуть въ глубже лежащіе слои атмосферы, а потому не вызываютъ сильнаго свѣтового эффекта. Разряды вызовутъ вблизи экватора только разсѣянное, слабое и широко расходящееся сіяніе. Линію сѣвернаго сіянія нашли также и въ разсѣянномъ небесномъ свѣтѣ ночи (въ такъ называемомъ земномъ сіяніи).—Чѣмъ дальше удаляться отъ экватора, тѣмъ больше наклонены магнитныя силовыя линіи къ поверхности земли. Соотвѣтственно этому, катодные лучи проникаютъ глубже въ атмосферу. Когда они вступаютъ въ слои большей плотности (около 0,01 mm давленія), то они производятъ болѣе сильныя свѣтовыя явленія, которыя мы называемъ полярнымъ сіяніемъ. Такимъ образомъ полярныя сіянія должны быть чаще по мѣрѣ удаленія отъ экватора и происходить въ болѣе глубокихъ слояхъ атмосферы. Это согласуется съ наблюденіемъ. Конечно, этому увеличенію числа полярныхъ сіяній поставленъ предѣлъ тѣмъ, что вблизи полюсовъ въ верхніе слои атмосферы не падаетъ сколько-нибудь значительнаго количества отрицательнозаряженныхъ частицъ. Поэтому вокругъ полюсовъ и магнитныхъ полюсовъ (гдѣ магнитныя линіи вертикальны) будутъ лежать два кольца, на которыхъ полярныя сіянія будутъ происходить чаще всего, какъ это дѣйствительно и имѣетъ мѣсто.

Понятно, что число полярныхъ сіяній будетъ измѣняться, кромѣ того, соотвѣтственно измѣненію количества пригоняемыхъ отъ поверхности солнца отрицательныхъ частичекъ. Это же количество надо принять пропорціональнымъ главнымъ образомъ числу пятенъ той части солнца, которая обращена къ землѣ, и косинусу угла между солнечными лучами и нормалью къ землѣ въ данномъ мѣстѣ, и наконецъ времени освѣщенія. Менѣе замѣтное вліяніе будетъ оказывать различіе въ разстояніи земли отъ солнца въ различныя времена года.

Самая замѣчательная особенность полярныхъ сіяній — это рѣзко выраженная періодичность ихъ числа. Самымъ интереснымъ является періодъ, совпадающій съ періодомъ солнечныхъ пятенъ и равняющійся 11,1 лѣтъ. Очень возможно, что существуютъ и болѣе длинные вѣковые періоды, во время которыхъ явленія полярныхъ сіяній происходятъ чаще и рѣже, какъ утверждаетъ *de Marian* въ своихъ классическихъ изслѣдованіяхъ [17]). Такъ напримѣръ, въ серединѣ восемнадцатаго столѣтія и въ концѣ девятнадцатаго происходило необыкновенно сильное развитіе minim'a. Вѣроятно, эти болѣе продолжительныя вѣковыя колебанія, періодъ которыхъ еще не могъ быть установленъ точно, также зависятъ отъ колебаній въ дѣятельности солнца. По крайней мѣрѣ,

---

17) l. c., 179.

въ началѣ двухъ истекшихъ столѣтій, когда сѣверныя сіянія происходили сравнительно очень рѣдко, и количество солнечныхъ пятенъ было необыкновенно мало въ то время года, когда ихъ должно быть больше всего. Судя по этому, этотъ вѣковой періодъ былъ бы равенъ 10-ти періодамъ въ 11,1 лѣтъ; нѣкоторые изслѣдователи считаютъ его вдвое короче.

Кромѣ этихъ продолжительныхъ періодовъ, полярныя сіянія обладаютъ еще годичнымъ періодомъ, 2 наибольшихъ значенія котораго совпадаютъ со временемъ равноденствій, а два наименьшихъ—со временемъ солнцестояній. Изъ наибольшихъ значеній болѣе сильнымъ является осеннее, чѣмъ весеннее. Это особенно ясно вытекаетъ изъ наблюденій въ Сѣверной Америкѣ, гдѣ правильность явленія меньше всего нарушается годичною измѣнчивостью длины и яркости дня. На далекомъ сѣверѣ, какъ напримѣръ, въ Исландіи и Гренландіи, вслѣдствіе вышеупомянутыхъ возмущеній, эти maxima передвигаются такъ значительно, что въ въ наиболѣе темные годы они сливаются въ одинъ maximum въ декабрѣ; въ іюнѣ и іюлѣ же, вслѣдствіе сильнаго свѣта неба, сѣверныхъ сіяній вовсе не видно. По наблюденіямъ въ Сѣверной Америкѣ, тамъ лѣтомъ, несмотря на бо́льшую яркость неба, число сѣверныхъ сіяній больше, чѣмъ зимой (іюньскій minimum даетъ 1061 сѣверное сіяніе, въ то время какъ декабрьскій—только 912). Если ввести еще поправку на разницу въ яркости неба, то это сравненіе измѣнится еще болѣе въ пользу лѣта. То же справедливо и относительно южнаго полушарія, гдѣ полярныя сіянія въ лѣтній minimum (январь) приблизительно вдвое чаще, чѣмъ въ зимній (іюнь и іюль). Итакъ, если въ странахъ близкихъ къ полюсамъ, какъ Скандинавія и, еще болѣе, Исландія и Гренландія, лѣтній minimum значительно болѣе рѣзко выраженъ, чѣмъ зимній, то происходитъ это отъ второстепенныхъ условій (напр. отъ яркости лѣтнихъ ночей), такъ какъ лѣтнія ночи настолько свѣтлы, что почти совершенно исключаютъ возможность наблюденія [18]).

Мѣсячные періоды сѣверныхъ сіяній найдены только въ послѣднее время. *Ekholm* и *Arrhenius* доказали существованіе періода, который совпадаетъ съ временемъ тропическаго обращенія луны. Maximum сѣверныхъ сіяній наступаетъ во время южнаго стоянія луны, minimum, напротивъ того, во время ея сѣвернаго стоянія. Для южнаго полушарія maximum и minimum имѣютъ противоположное расположеніе. Колебаніе простирается приблизительно на $\pm 20\%$ [19]).—Другой почти мѣсячный періодъ, maximum котораго наступаетъ одновременно въ обоихъ полушаріяхъ, это своеобразный приблизительно 26-ти-дневный періодъ; прежде его

---

[18]) Статистическій матеріалъ, изъ котораго выведено выше изложенное, находится въ статьѣ *Ekholm'a* и *Arrhenius'a*, Köngl. Svenska Vet.—Akademiens Handlingar, 31, 15. 1898.

[19]) *Ekholm* и *Arrhenius*, l. c. 51.

нашли для магнитныхъ и другихъ (напримѣръ, для барометрическихъ) явленій. Онъ даетъ амплитуду приблизительно въ $\pm 10^0/_0$, и продолжительность его, какъ установлено *Ekholm'омъ* и *Arrhenius'омъ* [20]), равна 2,593 дня.

Самый короткій изъ періодовъ полярныхъ сіяній это дневной. Наибольшее число полярныхъ сіяній происходитъ предъ полночью. По Fritz'у [21]) ежедневный maximum въ Средней Европѣ (50^0 сѣверной широты) наступаетъ около 9 часовъ вечера, въ мѣстахъ, лежащихъ сѣвернѣе, какъ Упсала и Христіанія (60^0 сѣверной широты)—около 9 ч. 30 м., а при Bossekop (70^0 сѣверной широты)—около 10 ч. 30 м. Въ Америкѣ maximum наступаетъ, вѣроятно нѣсколько позже: въ среднихъ широтахъ (40—50^0 сѣверной широты)—около 10 часовъ, въ полярныхъ странахъ Америки (60—70^0 сѣверной широты)—около полуночи.

Эта ежедневная варіація замѣтно нарушается отношеніемъ яркости неба. Полярное сіяніе абсолютно не видимо при дневномъ свѣтѣ и можетъ быть замѣчено только въ концѣ сумерекъ. Такимъ образомъ, если бы посторонній свѣтъ не дѣйствовалъ нарушающимъ образомъ, то дѣйствительный maximum долженъ былъ бы наступить раньше, чѣмъ наблюдаемый; и можно допустить, что онъ наступаетъ послѣ полудня, приблизительно одновременно съ наибольшимъ значеніемъ магнитнаго склоненія. Опытъ поправки на неодинаковую яркость неба произвелъ *Carlheim-Gyllenskiöld*. Его наблюденія были произведены зимою 1882—1883 годовъ на Cap-Thordsen на Шпицбергенѣ; безъ поправки они даютъ maximum приблизительно въ 8 часовъ вечера, а съ поправкой онъ наступаетъ въ 2 ч. 40 м. по полудни [22]).

Въ вѣковомъ періодѣ замѣчается одна рѣзко выраженная особенность, именно, что онъ тѣмъ яснѣе выраженъ, чѣмъ ближе лежитъ мѣсто наблюденія къ экватору. Въ Исландіи и Гренландіи его почти нельзя обнаружить. То-же самое справедливо и относительно 25, 93-дневнаго [23]) и ежедневнаго періодовъ. Такъ напримѣръ по *Carlheim-Gyllenskiöld'у* [24]) дѣйствительный дневной періодъ на Шпицбергенѣ очень слабо выраженъ. Это не трудно понять.

Мы займемся объясненіемъ этихъ періодовъ.

---

[20]) *Ekholm* и *Arrhenius*, Kongl. Svenska Vet—Akademiens Handlingar, 31, 18, (1868).

[21]) *Fritz*, Das Polarlicht, Leipzig, 188, 102.

[22]) *Carlheim-Gyllenskiöld*, Observations faites au Cap-Thordson, II, I, 187, 1886.

[23]) *Ekholm* и *Arrhenius*, K. L. Vet.-Ak. Haadl., 31, 19, 1898.

[24]) *Carlheim-Gyllenskiöld*, l. c.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О числѣ рѣшенiй

неопредѣленныхъ уравненiй первой степени.

Преподавателя Кѣлецкой гимназiи А. Веребрюсова.

(Окончанiе).

5. Будемъ разсматривать трехчленное уравненiе, въ которомъ возьмемъ свободный членъ въ формѣ

$$m=\omega+nc.$$

Тогда, согласно выведенной въ предыдущемъ параграфѣ формулѣ,

$$\left(\frac{\omega+nc}{abc}\right)-\left(\frac{\omega}{abc}\right)=\left(\frac{\omega}{ab}\right)+\left(\frac{\omega+c}{ab}\right)+\left(\frac{\omega+2c}{ab}\right)+\ldots+\left(\frac{\omega+(n-1)c}{ab}\right).$$

Съ другой стороны, если мы обозначимъ черезъ α_i, β_i тѣ значенiя, которыя имѣютъ фигурировавшiя въ предыдущемъ параграфѣ: величины α и β при $m=\omega+ic$, то мы будемъ имѣть:

$$\left(\frac{\omega}{ab}\right)=\frac{\omega-b\beta+a\alpha}{ab}$$

$$\left(\frac{\omega+c}{ab}\right)=\frac{\omega+c-b\beta_1+a\alpha_1}{ab}$$

$$\left(\frac{\omega+2c}{ab}\right)=\frac{\omega+2c-b\beta_2+a\alpha_2}{ab}$$

. . . .

$$\frac{\omega+(n-1)c}{ab}=\frac{\omega+(n-1)c-b\beta_{n-1}+a\alpha_{n-1}}{ab}.$$

Сложивъ этотъ рядъ равенствъ, получимъ:

$$\left(\frac{\omega+nc}{abc}\right)-\left(\frac{\omega}{abc}\right)=\frac{\Sigma(\omega+ic)-b\Sigma\beta_i+a\Sigma\alpha_i}{ab.}\qquad(4)$$

Первый членъ въ числителѣ правой части вычисляется крайне просто:

$$\Sigma(\omega+ic)=n\omega+c\Sigma i=n\omega+\frac{n(n-1)}{2}c\qquad(5).$$

Но вычисленiе $\Sigma\beta_i$ и $\Sigma\alpha_i$ сопряжено съ значительными затрудненiями и можетъ быть доведено до конца только въ частныхъ случаяхъ. Мы разсмотримъ важный для насъ случай, когда n кратно a или кратно b.

6. Замѣтимъ, что числа a, b и c мы можемъ считать попарно взаимно простыми. Въ самомъ дѣлѣ, если они имѣютъ общаго множителя, то таковой долженъ принадлежать и свободному члену и можетъ быть удаленъ. Если a и b послѣ этого будутъ имѣть множителя, не принадлежащаго c, то—какъ мы видѣли въ § 1—можно замѣнить это уравненіе другимъ съ тѣмъ же числомъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, въ которомъ коэффиціентъ c остается, а два другихъ коэффиціента освобождены отъ общаго множителя. Послѣ этого мы можемъ устранить общаго множителя a и c, b и c, еслибы таковой оказался.

Въ предположеніи, что числа a, b и c попарно первые между собой, мы поставимъ вопросъ, въ какомъ случаѣ β_i можетъ быть равно β_j. Числа β_i и β_j опредѣляютъ тѣмъ условіемъ, что оба они не превышаютъ a и частныя $\frac{\omega+ic-b\beta i}{a}$ и $\frac{\omega+jc-b\beta j}{a}$ суть цѣлыя числа. Слѣдовательно и разность этихъ частныхъ

$$\frac{(j-i)c-(\beta_j-\beta_i)l}{a}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если $\beta_j=\beta_i$, то $(j-i)c$ дѣлится на a; а такъ какъ c есть число простое относительно a, то $(j-i)$ есть число кратное a; обратно, если $j-i$ есть число кратное a, то и $(\beta_j-\beta_i)b$ дѣлится на a; а такъ какъ b есть число простое относительно a, то $\beta_j-\beta_i$ дѣлится на a; но β_j и β_i оба меньше а; ихъ разность можетъ поэтому дѣлиться на a только въ томъ случаѣ, если $\beta_j=\beta_i$. Итакъ $\beta_i=\beta_j$ въ томъ и только въ томъ случаѣ, если $i-j$ есть число кратное a. Поэтому въ ряду

$$\beta,\ \beta_1,\ \beta_2\ .\ .\ .\ \beta_{n-1} \qquad (6)$$

первыя a чиселъ всѣ различны, затѣмъ слѣдующія a чиселъ представляютъ собой повтореніе предыдущихъ въ томъ же порядкѣ и т. д.

Мы предположимъ теперь, что n есть число кратное a, т. е. $n=n'a$. Тогда предыдущій рядъ раздѣляется на n' группъ, изъ которыхъ каждая совпадаетъ съ группой

$$\beta, \beta_1\ .\ .\ .\ \beta_{a-1}. \qquad (7)$$

Эти послѣднія числа всѣ различны между собой и заключаются въ ряду

$$1,\ 2,\ 3\ .\ .\ .\ a. \qquad (8)$$

Поэтому, числа ряда (7) отличаются отъ чиселъ ряда (8) только порядкомъ. Отсюда вытекаетъ, что

$$\sum_{i=0}^{i=a-1} \beta_i=1+2+\ldots+a=\frac{a(a+1)}{2}.$$

Такъ какъ, съ другой стороны, рядъ (6) состоитъ изъ n' группъ, совпадающихъ каждая съ группой (7), то вся сумма

$$\Sigma \beta_i = \frac{n'a(a+1)}{2} = \frac{n(a+1)}{2}. \tag{9}$$

Соотношеніе (9) предполагаетъ что n кратно a. Въ томъ случаѣ, когда n кратно b, мы такимъ же образомъ вычислимъ $\Sigma\alpha_i$. Если примемъ во вниманіе, что α_i не превышаетъ $b-1$, что $\dfrac{\omega+ic+\alpha i}{b}$ есть цѣлое число, то мы обнаружимъ, повторяя предыдущее разсужденіе, что $\alpha_j = \alpha_i$ въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда разность $j-i$ кратна b. Отсюда вытекаетъ, что при $n = n'b$

$$\alpha, \alpha_1\ \alpha_2\ .\ .\ .\ \alpha_{n-1}$$

распадается на n' группъ, изъ которыхъ каждая совпадаетъ съ первой группой $\alpha, \alpha_1\ .\ .\ .\ \alpha_{b-1}$. Эта послѣдняя, въ свою очередь отличается только порядкомъ отъ чиселъ $0, 1, 2\ .\ .\ .\ b-1$, а потому ея сумма равна $\dfrac{b(b-1)}{2}$. Вся же сумма

$$\Sigma\alpha_i = \frac{n'b(b-1)}{2} = \frac{n(b-1)}{2}. \tag{10}$$

Предположимъ теперь что n кратно a и b; въ такомъ случаѣ имѣетъ мѣсто, какъ соотношеніе (9), такъ и соотношеніе (10). Подставляя поэтому въ равенство (4) вмѣсто трехъ членовъ числителя правой части выраженія (5), (9) и (10) и полагая $n = n'ab$ мы найдемъ

$$\left(\frac{\omega-nc}{abc}\right) - \left(\frac{\omega}{abc}\right) = n'\left\{\omega + \frac{(n-1)c - b(a+1) + a(b-1)}{2}\right\} = n'\left(\omega + \frac{nc-a-b-c}{2}\right).$$

Или еще иначе

$$\left(\frac{\omega+n'abc}{abc}\right) - \left(\frac{\omega}{abc}\right) = n'\left(\omega + \frac{n'abc-a-b-c}{2}\right). \tag{11}$$

Знакъ $'$, служившій для отличія числа n' отъ n, можно теперь опустить, и мы получимъ окончательно:

$$\left(\frac{\omega+nabc}{abc}\right) - \left(\frac{\omega}{abc}\right) = n\left(\omega + \frac{nabc-a-b-c}{2}\right). \tag{12}$$

8. Значеніе предыдущей формулы заключается въ томъ, что она сводитъ вычисленіе числа рѣшеній при $m > abc$ къ вычисленію числа рѣшеній для m меньшаго, нежели abc. Напримѣръ, чтобы вычислить символъ $\left(\dfrac{190}{3.4.5}\right)$, замѣтимъ, что здѣсь $a = 3$, $b = 4$,

$c=5$, $n=3$, $\omega=10$, а потому согласно последней формулѣ

$$\left(\frac{190}{3.4.5}\right)=\left(\frac{10}{3.4.5}\right)+3\left(10+\frac{3.60-3-4-5}{2}\right)=\left(\frac{10}{3.4.5}\right)+282.$$

Бываютъ однако случаи, когда формула (12) непосредственно опредѣляетъ число рѣшеній. Такъ какъ мы нулевыхъ рѣшеній въ счетъ не принимаемъ, то цѣлыя положительныя рѣшенія возможны только въ томъ случаѣ, когда $\omega \geqq a+b+c$. Если же $\omega < a+$ $+b+c$, то $\left(\frac{\omega}{a.b.c}\right)=0$, а потому при $\omega<a+b+c$

$$\left(\frac{\omega+nabc}{abc}\right)=\frac{n}{2}(nabc-a-b-c).$$

Такъ, въ предыдущемъ случаѣ число рѣшеній равно 282. Если положимъ $\omega=0$, то формула (12) даетъ возможность опредѣлить число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній при m, кратномъ abc. Именно:

$$\left(\frac{nabc}{a.b.c}\right)=\left(\frac{0}{a.b.c}\right)+\frac{n}{2}(nabc-a-b-c)=\frac{n}{2}(nabc-a-b-c).$$

9. Займемся еще опредѣленіемъ числа нулевыхъ рѣшеній уравненій разсматриваемаго вида. Число этихъ рѣшеній мы будемъ обозначать символомъ

$$\left(\frac{m}{a.b.c.\ldots l}\right).$$

Нетрудно найти значеніе этого символа. Нулевыя рѣшенія

$$ax+by=m$$

состоятъ изъ трехъ группъ: 1) группа, въ которой одно неизвѣстное x или y равно нулю; число рѣшеній, въ которыхъ $y=0$, совпадаетъ съ числомъ рѣшеній уравненія $ax=m$ и выражается символомъ $\left(\frac{m}{a}\right)$, значеніе котораго было указано въ § 2. Точно также число нулевыхъ рѣшеній, въ которыхъ $x=0$, выражается символомъ $\left(\frac{m}{b}\right)$. Поэтому число нулевыхъ рѣшеній, въ которыхъ только одно неизвѣстное обращается въ нуль, равно

$$\left(\frac{m}{a}\right)+\left(\frac{m}{b}\right).$$

Тоже уравненіе удовлетворяется значеніями $x=0$, $y=0$ въ томъ и только въ томъ случаѣ, если $m=0$. Обозначая поэтому черезъ $\varepsilon(m)$ единицу или нуль, смотря по тому, равно ли m нулю, или отлично отъ нуля, мы будемъ имѣть:

$$\left(\frac{m}{a.b}\right)_0 = \left(\frac{m}{a}\right) + \left(\frac{m}{b}\right) + \varepsilon(m).$$

Читатели безъ труда найдутъ, что

$$\left(\frac{m}{a.b.c}\right)_0 = \left(\frac{m}{a.b}\right) + \left(\frac{m}{a.c}\right) + \left(\frac{m}{b.c}\right) + \left(\frac{m}{a}\right) + \left(\frac{m}{b}\right) + \left(\frac{m}{c}\right) + \mathrm{E}(m).$$

10. Если въ уравненіи вида

$$ax + by + cz \ldots lv = m$$

m есть число отрицательное, а всѣ коэффиціенты положительные, то уравненіе имѣетъ только отрицательныя рѣшенія. Чтобы опредѣлить число ихъ, достаточно положить

$$x = -x',\ y = -y' \ldots\ldots v = -v'$$

и опредѣлить число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній преобразованнаго уравненія. Впрочемъ, при счетѣ отрицательныхъ рѣшеній иногда бываетъ удобно включить въ число ихъ и нулевыя рѣшенія, для чего къ найденному числу достаточно придать количество

$$\left(\frac{m}{a.b.c\ldots l}\right)_0.$$

Сокращенный способъ извлеченія корня квадратнаго.

Б. Невэнгловскаго. *)

Пусть N будетъ цѣлое число, состоящее изъ $2(p+n)$, или изъ $2(p+n)-1$ цыфръ, такъ, что корень квадратный изъ него съ приближеніемъ до единицы, взятый съ недостаткомъ, состоитъ изъ $p+n$ цыфръ.

Положимъ, что мы имѣемъ p первыхъ цыфръ этого числа и пусть a будетъ число, состоящее изъ этихъ цыфръ; искомый корень будетъ:

$$a \cdot 10^n + x,$$

гдѣ x есть число, состоящее не болѣе, какъ изъ n цыфръ.

*) Настоящая статья заимствована изъ „Wiodomosci Matematycne“ за текущій годъ, гдѣ она помѣщена на польскомъ языкѣ. Она содержитъ обобщеніе пріема, излагаемаго въ большинствѣ руководствъ; но этотъ пріемъ предполагаетъ, что найдена большая половина числа цыфръ корня. Г. Невэнгловскій обнаруживаетъ, что это требованіе не всегда необходимо.
Прим. ред.

Поступая обыкновеннымъ путемъ, которымъ опредѣляются послѣдовательно цыфры корня, и нашедши p первыхъ цыфръ, вычисляемъ остатокъ R:

$$R = N - a^2 . 10^{2n}.$$

Раздѣлимъ R на $2a.10^n$, и пусть q будетъ частное, r—остатокъ дѣленія, тогда

$$R = 2a.10^n . q + r;\quad r < 2a.10^n;$$

отсюда

$$N = a^2 . 10^{2n} + 2a.10^n . q + r. \qquad (1)$$

Мы утверждаемъ, что

$$(a.10^n + q + 1)^2 > N.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если подставимъ сюда вмѣсто N его значеніе изъ уравненія (1) и сдѣлаемъ упрощенія, то неравенство обращается въ слѣдующее:

$$2a.10^n + (q+1)^2 > r,$$

это и справедливо, такъ какъ остатокъ r меньше дѣлителя $2a.10^n$.

Отыщемъ теперь условіе, при которомъ будетъ:

$$(a.10^n + q)^2 < N.$$

Поступая такимъ же способомъ, что и выше, найдемъ:

$$q^2 < r. \qquad (2)$$

А потому, если это условіе выполняется, число $a.10^n + q$ представляетъ корень квадратный изъ числа N съ приближеніемъ до единицы, взятый съ недостаткомъ.

Если же

$$q^2 = r, \qquad (3)$$

тогда будемъ имѣть точно:

$$(a.10^n + q)^2 = N.$$

Соединяя все сказанное, заключаемъ, что, *каково бы ни было число уже найденныхъ цыфръ корня*, если, при вышеизложенномъ способѣ вычисленія, имѣетъ мѣсто неравенство (2), или имѣетъ мѣсто равенство (3), то $a.10^n + q$ есть корень квадратный числа N съ приближеніемъ до единицы съ недостаткомъ, или есть точный корень. Остается изслѣдовать случай, въ которомъ:

$$q^2 > r. \qquad (4)$$

Именно только въ этомъ случаѣ слѣдуетъ сдѣлать предположеніе о числѣ p цыфръ, уже извѣстныхъ. Положимъ, что $p = n + 1$. Если уже найдены p первыхъ цыфръ корня, остатокъ R не превышаетъ

$$2a.10^{2n} + b,$$

гдѣ b есть число, состоящее изъ $2n$ послѣднихъ цыфръ числа N. *)

Откуда,

$$\frac{R}{2a\,.\,10^n} \leqslant 10^n + \frac{b}{2a\,.\,10^n};$$

но

$$b < 10^{2n},\quad a > 10^n,$$

а потому:

$$\frac{b}{2a\,.\,10^n} < \frac{1}{2},$$

слѣдовательно, цѣлое число, заключающееся въ $\frac{R}{2a.10^n}$

$$q \leqslant 10^n,$$

откуда слѣдуетъ, что число $q-1$ имѣетъ только n цыфръ.

Имѣя это въ виду, мы утверждаемъ, что если выполняется неравенство (4), то

$$(a.10^n + q)^2 > N.$$

Въ самомъ дѣлѣ, обращая вниманіе на уравненіе (1), и упрощая это послѣднее неравенство, найдемъ какъ-разъ неравенство (4).

Наконецъ, утверждаемъ, что

$$(a.10^n + q - 1)^2 < N,$$

или послѣ выполненія дѣйствій и упрощенія:

$$2a.10^n(q-1) + (q-1)^2 < 2a.10^n + q + r.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $q-1$ имѣетъ n цыфръ, то $(q-1)^2 < 10^{2n}$, но $2a$ имѣетъ по крайней мѣрѣ $n+1$ цыфръ, слѣдовательно $2a.10^n > 10^{2n}$, откуда

$$(q-1)^2 < 2a.10^n.$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ этого неравенства по $2a.10^n(q-1)$, получимъ:

$$2a.10^n(q-1) + (q-1)^2 < 2a.10^n.q < 2a.10^n.q + r,$$

что и требовалось доказать.

Примѣчаніе: Вышеприведенное доказательство требуетъ только, чтобы $2a$ имѣли $n+1$ цыфръ; достаточно, поэтому, принять, что $a \geqslant 5.10^{n-1}$.

---

*) Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ

$$a.10^n \leqslant \sqrt{N} < (a+1)10^n$$

откуда

$$0 \leqslant N - a^2 10^{2n} < 2a.10^{2n} + 10^{2n}.$$

Иными словами, если положимъ $R = 2a.10^{2n} + b$, то $b < 10^{2n}$ т. е. содержитъ не больше $2n$ цыфръ. Можетъ, конечно, случиться, что $R < 2a.10^{2n}$; но если $R = 2a.10^{2n} + b$, гдѣ b больше нуля, то $b = N - (a^2 + 2a)10^{2n}$.

А такъ какъ число $(a^2+2a)10^{2n}$ оканчивается $2n$ нулями, то b изображается тѣми $2n$ цыфрами, которыми оканчивается число N.

Прим. Ред.

Результаты, къ которымъ мы пришли, суть:
во 1-хъ $q^2 < r$; $a.10^n+q$ есть корень квадратный числа N съ приближенiемъ до 1 съ недостаткомъ;

во 2-хъ $q^2 = r$; $N = (a.10^n+q)^2$;

въ 3-хъ $q^2 > r$; $a \geqslant 5.10^{n-1}$;

$a.10^n+q-1$ есть корень квадратный числа N съ приближенiемъ до 1 съ недостаткомъ.

Вычисленiе остатка. Въ первомъ случаѣ остатокъ равенъ $N-(a.10^n+q+r)^2$, или $r-q^2$; во второмъ равенъ 0; въ третьемъ равенъ $N-(a.10^n+q-1)^2$ или $2a.10^n+r-(q-1)^2$.

Перевелъ Ц. Р.

МАТЕМАТИЧЕСКIЯ МЕЛОЧИ.

Доказательство теоремы Птоломея.

Въ полученной на дняхъ LXXIV книжкѣ „Mathematical Questions and Solutions (from the „Educational Times")" имѣется слѣдующее оригинальное доказательство теоремы Птоломея.

Положимъ, что на окружности круга, описаннаго около треугольника ABC возьмемъ точку P, расположенную между точками A и C. Соединивъ ее съ точками A и C, получимъ четырехугольникъ ABCP, вписанный въ кругъ. Сторону PC мы продолжимъ на такое разстоянiе CQ, чтобы уголъ PBQ былъ равенъ углу ABC. Такъ какъ, сверхъ того, углы BAC и BPQ равны, такъ какъ они опираются на одну и ту-же дугу, то треугольники ABC и BPQ подобны. Поэтому, если обозначимъ черезъ a, b, c стороны треугольника ABC, то

$$\overline{PQ} = \overline{PB}.\frac{b}{c}\cdot \qquad (1)$$

Съ другой стороны, отнимая отъ равныхъ угловъ ABC и PBQ по углу PBC, мы получимъ равные углы ABP и CBQ. Такъ какъ, сверхъ того, равны углы BAP и BCQ, дополняющiе до $2d$ одинъ и тотъ же уголъ BCP, то $\Delta\, ABP \infty \Delta\, CBQ$. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\overline{QC} = \overline{PA}.\frac{a}{c}\cdot \qquad (2)$$

Но съ другой стороны,

$$\overline{PQ} = \overline{QC} + \overline{PC}.$$

Подставляя сюда вмѣсто $\overline{PQ}$ и $\overline{QC}$ выраженiя (1) и (2), получимъ равенство

$$b.\overline{PB} = a.\overline{PA} + c.\overline{PC},$$

выражающее теорему Птоломея.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новый способъ цвѣтной фотографіи. Фотографъ-любитель г. *Gurtner* въ Бернѣ открылъ новый способъ фотографированія въ естественныхъ цвѣтахъ. Пока онъ держитъ свое изобрѣтеніе въ секретѣ; извѣстно только, что способъ его не основанъ на интерференціи, какъ способъ Липпмана.

† Петръ Гельмлингъ. Въ Ревелѣ скончался бывшій профессоръ математики Дерптскаго Университета Петръ Гельмлингъ, на 85-омъ году жизни.

Юбилей M. Cantor'а. *Moritz Cantor*, извѣстный историкъ математики, праздновалъ 6-го мая (н. ст.) пятидесятилѣтній юбилей со дня полученія титула доктора. Послѣдній былъ данъ ему по защитѣ диссертаціи на тему: объ одной менѣе употребительной системѣ квадратовъ.

84-ый съѣздъ Швейцарскихъ Естествоиспытателей будетъ происходить 4-го, 5-го и 6-го августа (н. ст.) 1901 г. въ Цофингенѣ.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Новыя назначенія и избранія.

Reale Jnstituto Veneto избралъ въ члены корреспонденты: *P. Sabatier* (Тулуза), *Moritz'a Cantor'a* (Гейдельбергъ), *William'a Ramsay'a* (Лондонъ), *J. H. van't Hoff'a* (Берлинъ), *Georges'a Darwin'a* (Лондонъ).

Національная Академія Наукъ въ Вашингтонѣ избрала въ члены *J. Jenssen'a*, директора обсерваторіи въ Медонѣ (Франція), *Loewy*, директора обсерваторіи въ Парижѣ, *A. Cornu*, профессора физики въ Парижѣ, *F. Kohlrausch'a*, профессора физики въ Берлинѣ, *J. H. van't Hoff'a*, профессора химіи въ Берлинѣ.—*Медаль Henry Draper'a* Академія присудила *сэру William'у Huggins'у* въ Лондонѣ.

Извѣстный физикъ и философъ, профессоръ Вѣнскаго Университета *Ernst Mach* назначенъ въ пожизненные члены Австрійской палаты господъ.

Одинъ высшій англійскій чиновникъ судебнаго вѣдомства предоставилъ въ распоряженіе Парижской Академіи Наукъ 1.000.000 франковъ. Проценты — 3000 франковъ ежегодно — съ этого капитала будутъ выдаваться въ видѣ преміи за самостоятельное изобрѣтеніе въ области физики, а именно въ области электричества и магнитизма. (Physikalische Zeitschrift).

РЕЦЕНЗІИ.

П. Цвѣтковъ. Методическій сборникъ ариѳметическихъ примѣровъ и задачъ, расположенныхъ по новой системѣ. Спб. 1899 г. I годъ обученія. Ц 10 коп. II годъ обученія. Ц. 20 к. III годъ обученія. Ц. 20 коп.

П. Цвѣтковъ. Рѣшеніе ариѳметическихъ задачъ, составляющихъ курсъ начальной ариѳметики и новая систематизація ихъ. Спб. 1899. Ц. 35 коп.

Послѣдняя изъ разсматриваемыхъ книжекъ носитъ методическій характеръ. Въ ней указывается такъ называемый аналитическій методъ рѣшенія задачъ и тотъ пріемъ, котораго слѣдуетъ держаться въ школѣ для того, чтобы пріучить учениковъ къ рѣшенію задачъ по этому методу.

Сущность предлагаемаго авторомъ пріема заключается въ слѣдующемъ.

Авторъ относитъ всякую задачу къ одному изъ четырехъ дѣйствій. Критеріемъ для этого служитъ послѣднее дѣйствіе, которое должно быть произведено при ея рѣшеніи. Если, напримѣръ, это дѣйствіе умноженіе, то независимо отъ того, какія другія дѣйствія были произведены при рѣшеніи задачи, она относится къ задачамъ на умноженіе.

Если множимое и множитель послѣдняго дѣйствія непосредственно даны въ задачѣ, она называется простою, если же эти числа должны быть предварительно вычислены по другимъ даннымъ задачи, то она называется сложною. Въ этомъ случаѣ авторъ говоритъ, что множимое и множитель были „закрыты" въ условіяхъ задачи. Чтобы пріучить дѣтей къ рѣшенію задачъ, исходя отъ вопроса ея, авторъ рѣшаетъ первоначально простую задачу, положимъ, на умноженіе. Потомъ въ этой задачѣ „закрываетъ" одно множимое, множитель же остается даннымъ непосредственно. Исходя изъ вопроса задачи, по аналогіи съ предыдущею, ученики увидятъ, что она рѣшается помощью умноженія и что для рѣшенія ея недостаетъ множимаго. Они будутъ стараться отыскать его по остальнымъ даннымъ задачи. Такъ же поступятъ они, когда будетъ „закрытъ" множитель или оба производителя.

Усложняя такимъ образомъ задачи на каждое дѣйствіе, авторъ пріучаетъ учениковъ къ тому, чтобы они отыскивали способъ рѣшенія ихъ, исходя изъ вопроса ея, который по своему содержанію и формѣ долженъ навести ихъ на мысль о томъ послѣднемъ дѣйствіи, которое необходимо произвести для рѣшенія задачи.

Въ своей книжкѣ „Рѣш. ариѳметич. задачъ" авторъ касается и другихъ методическихъ вопросовъ, которые представятъ интересъ для преподавателей начальной ариѳметики, почему мы и рекомендуемъ имъ познакомиться съ этой книжкою.

Авторъ не встрѣчалъ ни въ одномъ изъ нашихъ методическихъ руководствъ указаній на выработанную имъ систему усложненія задачъ, почему эту систему онъ называетъ новою. Система эта облегчаетъ ученикамъ усвоенія аналитическаго способа рѣшенія задачъ, въ этой системѣ расположены всѣ задачи въ сборникахъ автора, почему они и названы методическими.

Дѣйствительно, система эта строго выдержана въ „Сборникахъ“ автора. Она повторяется въ задачахъ на каждое дѣйствіе самымъ педантическимъ образомъ, при чемъ въ угоду этому педантизму автору пришлось пожертвовать логической стороной въ сокрытіи данныхъ послѣдняго дѣйствія задачи и прибѣгнуть къ чисто формальному „закрытію“ ихъ. Такъ въ задачѣ № 408 „сборника“ для второго года обученія, авторъ закрываетъ множимое и множитель такъ:

„Ржи высѣваютъ на десятину столько мѣръ, сколько получится, если изъ $\frac{1}{3}$ 84 вычесть $\frac{1}{5}$ 100, а овса высѣваютъ на десятину во столько разъ болѣе, сколько двугривенныхъ содержится въ 60 копейкахъ. Сколько четвериковъ овса высѣваютъ на десятину?“

Разумѣется, не большинство такихъ чисто формальныхъ задачъ, но ихъ не мало въ „Сборникахъ“ и это объясняется тѣмъ, что авторъ съ чисто внѣшней стороны желаетъ выдержать свою систему. Этимъ онъ сильно вредитъ своему „Сборнику“, въ угоду этой чисто внѣшней стройности ему пришлось отказаться отъ многихъ задачъ, которымъ было бы мѣсто въ „Сборникѣ“, если бы авторъ не ограничился исключительно однимъ своимъ принципомъ систематизаціи задачъ.

Этотъ принципъ и та идея, которую онъ кладетъ въ основу для обученія дѣтей рѣшенію задачъ, очень хороша для начала, и мы рекомендовали бы учителямъ познакомиться съ ней по книжкѣ „Рѣш. задачъ“ автора; но строить всю систему задачника, обративъ эту общую идею въ какой-то шаблонъ и не видѣть другихъ сторонъ дѣла, которыя могутъ дать и другую нить для систематизаціи задачъ намъ кажется ошибкою автора.

Разсматривая задачникъ съ другой стороны, мы должны указать, что въ немъ удѣлено слишкомъ мало мѣста числовымъ примѣрамъ, особенно въ предѣлѣ чиселъ до 100. Страннымъ представляется, что авторъ знакомитъ раньше съ разностнымъ и кратнымъ сравненіемъ чиселъ, т. е. съ вопросомъ объ опредѣленіи, на сколько единицъ или во сколько разъ одно число больше другого,—знакомитъ съ этимъ раньше, чѣмъ съ фактомъ увеличенія и уменьшенія числа на нѣсколько единицъ или въ нѣсколько разъ. Первый вопросъ является вопросомъ обратнымъ по отношенію къ увеличенію и уменьшенію числа, и потому его естественнѣе было бы поставить вторымъ.

Но не смотря на эти, на нашъ взглядъ, промахи автора, трудъ его заслуживаетъ вниманія учителей начальныхъ школъ съ той именно стороны, которая болѣе всего интересуетъ самаго автора, т. е. со стороны вопроса о томъ, какъ пріучить учениковъ отыскивать рѣшеніе задачи, исходя отъ вопроса ея.

С. Житковъ (Одесса).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 58 (4 сер.). Какому условію должны удовлетворять коэффиціенты уравненія

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

для того, чтобы корни его образовали ариѳметическую прогрессію?

Н. С. (Одесса).

№ 59 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$2(x^3+y^3)+(x+y)=3(x^2+y^2)$$

$$x+y=a.$$

(Journal de Mathématiques élémentaires).

№ 60 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$2\sin 3x=3\cos x+\cos 3x.$$

(Journal de Mathématiques élémentaires).

№ 61 (4 сер.). Доказать, что если n цѣлое положительное число, не дѣлящееся на 5, то численная величина выраженія

$$(11^{2n}-2^{6n})(n^4-1)$$

дѣлится на 285.

(Заимств.) *Н. С.*

№ 62 (4 сер.). Выбрать для y цѣлое численное значеніе такимъ образомъ, чтобы численное значеніе многочлена

$$(y^2+1)x^3+(y^3-1)x$$

дѣлилось на 6 при всякомъ цѣломъ значеніи x.

Е. Буницкій (Одесса).

№ 63 (4 сер.). Подъемная сила аэростата въ началѣ подъема равна 10 килограммамъ. Онъ наполненъ водородомъ при внѣшнемъ давленіи въ 76 см.; оболочка его не расширяема; принадлежности шара и оболочка вѣсятъ 100 килограммовъ. Предполагается, что температура не измѣняется при измѣненіи высоты, и что атмосферное давленіе на каждые 10 метровъ высоты уменьшается на 1 миллиметръ. Опредѣлить высоту x, которой можетъ достигнуть шаръ.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 388 (3 сер.). *Построить треугольникъ, зная его основаніе, разность угловъ, прилежащихъ основанію, и разность квадратовъ двухъ прочихъ сторонъ.*

Пусть ABC—искомый треугольникъ, a, b, c — его стороны, $A-C=\alpha$ — данная разность угловъ, $a^2-c^2=k^2$—разность квадратовъ двухъ прочихъ сторонъ, $AC=b$—данное основаніе, а BD—высота треугольника.

Отложимъ на прямой AC отрѣзокъ $DK=DA$. Тогда уголъ BKD (или,— если уголъ A тупой,—смежный съ нимъ уголъ) равенъ углу A, а потому

$$\angle KBC=\angle BKD-\angle BCK=A-C=\alpha.$$

Отсюда вытекаетъ построеніе. На произвольной прямой откладываемъ отрѣзокъ $AC=b$, затѣмъ строимъ перпендикуляръ DX къ этой прямой, какъ геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ разность квадратовъ разстояній отъ точекъ A и C равна k^2 (для этого, какъ извѣстно, достаточно отъ вершины меньшаго угла C отложить на основаніи треугольника въ направленіи CA отрѣзокъ CD, равный $\frac{b}{2}+\frac{k^2}{2b}$, и затѣмъ возставить перпендикуляръ DX къ прямой AC); наконецъ, на прямой KC строимъ сегментъ, вмѣщающій уголъ $A-C=\alpha$. Пусть B есть одна изъ точекъ встрѣчи дуги этого сегмента съ прямой DX; треугольникъ ABC есть искомый.

Лежебокъ и *Г.* (Иваново-Вознесенскъ); *И. Величко* (Могилевъ); *М. Зиминъ* (Орелъ).

№ 571 (3 сер.). *Показать, что*

a) *8-ая степень цѣлаго числа можетъ быть представлена въ видѣ $17n$ или $17n\pm 1$;*

b) *9-ая степень цѣлаго числа—въ видѣ $19n$ или $19n\pm 1$;*

c) *11-ая „ „ „ — „ „ $23n$ или $23n\pm 1$;*

d) *20-ая „ „ „ — „ „ $25n$ или $25n+1$;*

e) *42-ая „ „ „ — „ „ $49n$ или $49n+1$.*

a) Если число кратно 17, оно имѣетъ видъ $17n$; пусть теперь a есть число, некратное 17 и слѣдовательно взаимно простое съ 17. Тогда по теоремѣ Фермата $a^{16}-1$ дѣлится на 17. Но

$$a^{16}-1=(a^8-1)(a^8+1).$$

Слѣдовательно либо множитель a^8-1, либо множитель a^8+1 имѣетъ видъ $17n$, гдѣ n число цѣлое. Поэтому

$$a^8=17n\pm 1.$$

b, c) Пользуясь равенствами

$$a^{18}-1=(a^9-1)(a^9+1),\quad a^{22}-1=(a^{11}-1)(a^{11}+1)$$

и пользуясь теоремой Фермата по отношенію къ числамъ 19 и 23, доказываемъ требуемое, какъ и въ случаѣ a).

d) Если число кратно 5, то 20-я степень его кратна $5^2=25$. Если же число a не кратно 5, то оно будетъ взаимно простымъ съ 25. Обозначая черезъ $\varphi(M)$ число положительныхъ чиселъ, меньшихъ M и взаимно простыхъ съ M, имѣемъ по теоремѣ Эйлера:

$$a^{\varphi(5^2)}-1=a^{5.4}-1=a^{20}-1=25n,$$

гдѣ n число цѣлое. Слѣдовательно

$$a^{20}=25n+1.$$

e) Если число кратно 7, то 42-ая степень его кратна $7^2=49$. Если же число a не кратно 7, то

$$a^{\varphi(7^2)}=a^{7.6}-1=a^{42}-1=49n,$$

и

$$a^{42}=49n+1.$$

П. Полушкинъ (Знаменка); *Н. С.* (Одесса).

№ 589 (3 сер.). *Рѣшить систему уравненій:*

$$x+y=a,$$

$$\sqrt[4]{m+x}+\sqrt[4]{n+y}=d.$$

Введемъ обозначенія

$$\sqrt[4]{m+x}=u, \quad \sqrt[4]{n+y}=v \qquad (1),$$

откуда

$$x=u^4-m, \quad y=v^4-n \qquad (2).$$

Тогда предложенная система приводится къ виду:

$$u^4+v^4=a+m+n \qquad (3)$$

$$u+v=d \qquad (4).$$

Возведя обѣ части уравненія (4) въ квадратъ, находимъ:

$$u^2+2uv+v^2=d^2,$$

$$u^2+v^2=d^2-2uv.$$

Возвышая въ квадратъ обѣ части послѣдняго уравненія, имѣемъ:

$$u^4+v^4+u^2v^2=d^4+4u^2v^2-4d^2uv,$$

или (см. (3))

$$2(uv)^2-4d^2uv+d^4-(a+m+n)=0.$$

Опредѣляя изъ этого уравненія произведеніе uv, находимъ, пользуясь уравненіемъ (4), u и v, откуда затѣмъ находимъ x или y изъ уравненій (2).

Соотвѣтственныя значенія неизвѣстныхъ, образующія отдѣльныя рѣшенія, опредѣляются при помощи равенства

$$x+y=a.$$

В. Раздарскій (Владикавказъ).

№ 608 (3 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^x+139x^{-x}-108x^{-2x}=32.$$

Умноживъ обѣ части уравненія на x^{2x}, приводимъ его къ виду:

$$x^{3x}+139x^x-108=32x^{2x},$$

или, — полагая

$$x^x=y \qquad (1),$$

$$y^3-32y^2+139y-108=0 \qquad (2).$$

Такъ какъ сумма коэффиціентовъ первой части этого уравненія равна нулю, то она дѣлится на $y-1$. Разлагая на основаніи этого соображенія первую часть уравненія на множителей, имѣемъ:

$$(y-1)(y^2-31y+108)=0,$$

откуда находимъ три значенія y:

$$y_1=1,\quad y_2=27,\quad y_3=4,$$

которымъ (см. (1)) соотвѣтствуютъ три дѣйствительныя значенія x

$$x_1=1,\quad x_2=3,\quad x_3=2.$$

В. Толстовъ (Тамбовъ); *Д. Дьяковъ* (Новочеркасскъ); *Б. Мерцаловъ* (Орелъ); *И. Кудинъ* (Москва); *П. Давидсонъ* (Житоміръ).

№ 644 (3 сер.). *Пусть m, n, p суть соотвѣтственно длины биссекторовъ угловъ A, B, C треугольника ABC. Доказать, что*

$$a\left(mn\cos\frac{C}{2}+pm\cos\frac{B}{2}-np\cos\frac{A}{2}\right)=b\left(pn\cos\frac{A}{2}+mn\cos\frac{C}{2}-pm\cos\frac{B}{2}\right)=$$

$$=c\left(pm\cos\frac{B}{2}+np\cos\frac{A}{2}-mn\cos\frac{C}{2}\right)=mnp.$$

Пусть $AD=m$—биссекторъ угла A. Тогда

$$2\square ABC=2\square ABD+2\square ACD,$$

или

$$bc\sin A=mb\sin\frac{A}{2}+mc\sin\frac{A}{2},$$

откуда

$$2bc\cos\frac{A}{2}=m(b+c).$$

Поэтому

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{m(b+c)}{2bc}. \qquad (1)$$

Также найдемъ

$$\cos\frac{B}{2}=\frac{n(c+a)}{2ac},\quad \cos\frac{C}{2}=\frac{p(a+b)}{2ab}. \qquad (2)$$

Слѣдовательно (см. (1), (2))

$$a\left(mn\cos\frac{C}{2}+pm\cos\frac{B}{2}-np\cos\frac{A}{2}\right)=amnp\left[\frac{a+b}{2ab}+\frac{c+a}{2ac}-\frac{b+c}{2bc}\right].$$

Выраженіе, заключенное въ квадратныя скобки, равно $\frac{1}{a}$. Поэтому

$$a\left(mn\cos\frac{C}{2}+pm\cos\frac{B}{2}-np\cos\frac{A}{2}\right)=mnp.$$

Подобнымъ же образомъ выводятся и остальныя соотношенія.

Б. Мерцаловъ (Орелъ); *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ **В. А. Циммерманъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса, 8-го іюня 1901 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

Обложка
пщется

Обложка
пщется