Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXIV Сем. № 6.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 282.

Къ вопросу о прерывности твердаго и жидкаго состояній.

(*Сообщеніе, сдѣланное 17 марта 1900 г. въ Математическомъ Отдѣленіи Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей*).

(*Продолженіе* *).

Для окончательнаго выясненія вопроса о ходѣ кривой упругости плавленія Tammann произвелъ обширныя изслѣдованія надъ рядомъ тѣлъ въ весьма широкихъ предѣлахъ давленія — отъ 1 до 3500 кгр. на 1 кв. см. Приборъ его состоялъ изъ металлическаго цилиндра, соединеннаго съ нагнетательнымъ насосомъ и манометромъ, весьма точнымъ и провѣреннымъ. Въ этотъ цилиндръ вкладывалась стеклянная трубочка, заполненная изслѣдуемой жидкостью и опущенная открытымъ суженнымъ концомъ въ маленькій сосудецъ съ ртутью. Все остальное пространство заполнялось масломъ, а цилиндръ закрывался завинчивающеюся крышкою. Необходимо замѣтить, что весь приборъ держалъ безупречно до давленій въ 4000 кгр. на кв. см. Цилиндръ этотъ опускался въ ванну, температура которой поддерживалась постоянною въ предѣлахъ нѣсколькихъ десятыхъ градуса.

Выяснимъ теперь способъ, какимъ Tammann опредѣлялъ упругость плавленія, соотвѣтствующую какой нибудь температурѣ. Положимъ, первоначальное давленіе было таково, что все изслѣдуемое вещество было закристаллизовано. Тогда Tammann сразу уменьшалъ давленіе атмосферъ на 100 на 200.

При такомъ уменьшеніи давленія, температура ванны оказывалась слишкомъ большою для того, чтобы вещество оставалось въ твердомъ состояніи, и оно начинало съ извѣстною быстротою пла-

*) См. „Вѣстникъ“ № 281.

виться, но такъ какъ объемъ вещества при этомъ возрасталъ, а емкость сосуда оставалась тою же, то это вызывало увеличеніе давленія. Въ свою очередь, это увеличеніе давленія вызывало задержку въ плавленіи, а слѣдовательно и задержку въ повышеніи давленія; такимъ образомъ давленіе должно было мало по малу асимптотически приблизиться къ упругости плавленія. Когда затѣмъ быстро увеличивали давленіе, то обратившаяся въ жидкость часть изслѣдуемаго вещества начинала закристаллизовываться, объемъ уменьшался и давленіе уменьшалось, опять такимъ образомъ стремясь приблизиться къ упругости плавленія. Вслѣдствіе плохой теплопроводности вещества и стѣнокъ, а также вслѣдствіе небольшой скорости кристаллизаціи, оба эти процесса протекали весьма медленно, и Tammann предпочелъ, не ожидая того, чтобы упругость послѣ внезапнаго повышенія давленія и послѣ внезапнаго пониженія давленія устанавливалась одинаковою, повторять опытъ второй разъ съ болѣе узкими предѣлами давленія и брать среднюю изъ тѣхъ упругостей, которыя устанавливались въ цилиндрѣ черезъ нѣкоторое время послѣ большого увеличенія или уменьшенія давленія. Сказанное станетъ еще болѣе яснымъ, если привести одинъ изъ протоколовъ опытовъ Tammann'a.

Бензолъ

время		давленіе	время		давленіе
11^h	10^m	3360	11^h	32^m	3410
+	11	3380		34	3420
	12	3390		37	3420
	13	3400		41	3420
	15	3404		43	3490
	17	3404		45	3479
	20	3404		47	3470
	21	3500		49	3462
	22	3490		51	3460
	25	3480		53	3460
	27	3478			
	29	3476			
	31	3476			

Температура съ $11^h\ 13^m$ до конца опыта измѣнялась въ предѣлахъ отъ 79 . 69 до 89 . 72. Среднія изъ чиселъ 3404 и 3476 и изъ чиселъ 3420 и 3460 въ этомъ случаѣ совпадаютъ и равны 3440,—величинѣ, которую съ большимъ приближеніемъ и принимаютъ за упругость плавленія при этой температурѣ. Въ другихъ случаяхъ между этими средними получалась разница въ предѣлахъ 10—20 атм., причемъ только для диметилэтилкорбинала при температурѣ выше 20^0 получалась разница въ 80 атм., а разница между упругостями, которыя устанавливались при повышеніи давленія и при пониженіи давленія равнялась 100—300 атм. Послѣднее обстоятельство Tammann совершенно правильно объясняетъ незначительной разницей между объемами его въ кристаллическомъ состояніи и въ жидкомъ при этихъ условіяхъ, такъ какъ тогда его состояніе очень близко къ maximum'у кривой упругости плавленія. Дѣйствительно, этотъ maximum какъ можно вывести изъ формулы $t = -10.3 + 0.01911p - 0.00000214p^2$, выражающей весьма близко результаты опытовъ надъ этимъ веществомъ, менѣе при 4465 кг. давленія и температурѣ въ 34 . 9.

Совокупность опытовъ Tammann'a, при которыхъ точки плавленія повышались на 50—70^0, обнаружила во всѣхъ случаяхъ болѣе или менѣе замѣтная вогнутость всѣхъ кривыхъ упругостей плавленія къ оси давленія, но ни для одного тѣла ему не удалось подойти даже близко къ maximum'у за исключеніемъ диметилъ-этилъ-карбинола, гдѣ до maximum'а не доставало какой нибудь 1000 атм. Для другихъ же тѣлъ, если экстраполировать формулы, выражающія весьма хорошо его наблюденія, получаются для упругости, соотвѣтствующей высшей точки подъема кривой упругостей плавленія давленія отъ 5000 (триметилкарбинолъ) до 14000 атм. (фосфоръ). Для нѣкоторыхъ тѣлъ (четыреххлористый углеродъ, триметилкарбинолъ) обнаружилось вѣроятное существованіе нѣсколькихъ полиморфныхъ измѣненій, каждому изъ которыхъ соотвѣтствуетъ своя кривая упругостей плавленія. Въ тѣхъ точкахъ, гдѣ такія вѣтви пересѣкаются между собою, могутъ сосуществовать не только эти два видоизмѣненія, но и тѣло въ жидкомъ состояніи, и такимъ образомъ получаются особаго рода тройныя точки.

Итакъ, какъ теоретическими соображеніями, такъ и на основаніи опытныхъ подтвержденій предположеніе Tammann'а о вогнутости кривой упругостей плавленія можно считать доказаннымъ, а разъ это такъ, то приходится считать правильными всѣ его выводы относительно ограниченности области твердаго состоянія и признавать, что у любого тѣла при нормальномъ давленіи можетъ кромѣ обычной точки плавленія быть еще одна точка плавленія, лежащая значительно ниже первой. Эта точка плавленія отличается отъ первой главнымъ образомъ тѣмъ, что при ней теплота плавленія отрицательная, т. е. твердое тѣло, превращаясь при достаточномъ охлажденіи въ жидкое состояніе, не поглощаетъ, а выдѣляетъ извѣстное количество теплоты.

Тутъ кстати будетъ сказать, что это жидкое состояніе можетъ значительно отличаться отъ того, которое мы привыкли называть жидкимъ, если имѣть въ виду весьма своеобразный и очень глубокій взглядъ Tammann'а на признаки отличія твердаго и жидкаго состояній, высказанный имъ во второй его работѣ. Tammann указываетъ, что обыкновенно за характеристическій признакъ твердаго состоянія принимали нѣкоторую конечную величину коэффиціента внутренняго тренія, которую не опредѣляли точно, а лишь указывали, что она должна быть настолько велика, чтбы время, втеченіе котораго въ тѣлѣ подъ вліяніемъ его собственнаго вѣса происходятъ измѣненія формы, было весьма велико, но что этотъ признакъ оказался совершенно непригоднымъ послѣ опытовъ Spring'а надъ теченіемъ и сростаніемъ твердыхъ тѣлъ и открытія жидкихъ кристалловъ Lehmann'омъ. Поэтому, по мнѣнію Tammann'а, рѣшить, находятся ли тѣла въ твердомъ или жидкомъ состояніи, можно только, тогда, когда извѣстенъ путь, по которому оно пришло въ опредѣляемое состояніе. Если на этомъ пути произошелъ разрывъ непрерывности въ свойствахъ тѣла, то произошло измѣненіе состоянія, т. е. твердое тѣло расплавилось или жидкое затвердѣло. Если надъ точками плоскости Tp откладывать по оси z-овъ величины, характеризующія какое нибудь свойство вещества, то получается поверхность, выражающая измѣненіе этихъ свойствъ съ измѣненіемъ температуры и давленія, подобно тому, какъ термодинамическая поверхность изображаетъ измѣненіе объема съ измѣненіемъ температуры и давленія. Каждая такая поверхность будетъ состоять собственно изъ двухъ полостей,—одной, соотвѣтствующей твердому состоянію вещества, а другой, соотвѣтствующей жидкому его состоянію, — причемъ эти двѣ полости будутъ пересѣкаться вдоль нѣкоторой линіи. Такъ двѣ части термодинамической поверхности, соотвѣтствующія измѣненію объема тѣла въ жидкомъ состояніи и измѣненію объема тѣла въ твердомъ состояніи, пересѣкаются вдоль нѣкоторой линіи, проекціей которой на плоскость Tp будетъ линія CE. Если проведемъ на той же плоскости линію DZ, для всѣхъ точекъ которой теплота плавленія $r=0$, то во всѣхъ точкахъ, лежащихъ на рисункѣ надъ нею и соотвѣтствующихъ болѣе высокимъ температурамъ, жидкое состояніе будетъ состояніе переохлажденія, ибо при застываніи жидкости выдѣляется теплота и температура повышается. Во всѣхъ же точкахъ, лежащихъ надъ кривою DZ и соотвѣтствующихъ болѣе низкимъ температурамъ, жидкое состояніе будетъ состояніе перегрѣтости (если сравнить съ точками, лежащими на уступѣ средней террасы, огибающей террасу твердаго состоянія со стороны низкихъ температуръ), ибо тамъ при застываніи жидкостей поглощается теплота, и температура понижается.

Линію DZ Tammann называетъ критическою. Линію пересѣченія двухъ частей термодинамической поверхности, т. е. линію равныхъ объемовъ твердаго тѣла и жидкости, Tammann называетъ нейтральною.

Если точку пересѣченія критической линіи DZ съ нейтральною линіею CE обозначимъ черезъ O, то во всѣхъ точкахъ линіи CO переохлажденная жидкость будетъ переходить въ твердое состояніе безъ измѣненія объема, но съ выдѣленіемъ тепла, а во всѣхъ точкахъ линіи OE перегрѣтая жидкость будетъ переходить въ твердое состояніе безъ измѣненія объема, но съ поглощеніемъ тепла, а въ точкѣ O не будетъ происходить ни такого измѣненія объема ни теплового эффекта. Подобныя этой нейтральныя линіи можно представить себѣ для всякихъ другихъ свойствъ,—скажемъ для опредѣленности, для показателя преломленія, для электропроводности, для теплопроводности, для теплоемкости и т. п. Эти нейтральныя кривыя могутъ пересѣкаться другъ съ другомъ, но совершенно невѣроятно, чтобы онѣ всѣ пересѣкались въ одной и той же точкѣ и при томъ именно въ точкѣ O. Только въ этомъ исключительномъ случаѣ, если бы путь измѣненія прошелъ черезъ эту замѣчательную точку, у насъ не было бы никакого признака для сужденія, произошелъ ли переходъ изъ одного состоянія въ другое, или не произошелъ.

Если же въ основу различія между твердыми и жидкими состояніями положить разрывъ непрерывности въ свойствахъ, то приходимъ, выражаясь словами Tammann'a, «къ заключенію, что только кристаллическія вещества находятся въ твердомъ состояніи, ибо, насколько показываетъ опытъ, только при образованіи кристалловъ наступаетъ разрывъ непрерывности въ измѣненіи свойствъ; аморфныя же вещества нужно разсматривать какъ переохлажденную жидкость, ибо ихъ свойства, насколько извѣстно, измѣняются непрерывнымъ образомъ, если исходить изъ области обычной вязкости жидкости и дойти до столь высокой ихъ густоты (sprödigkeit). Твердое состояніе характеризуется тѣмъ, что въ немъ, если не всѣ, то часть свойствъ зависитъ отъ направленія, жидкія же—тѣмъ, что всѣ свойства одинаковы во всѣхъ направленіяхъ. Твердое состояніе есть состояніе упорядоченнаго движенія, а жидкое и газообразное—состоянія высшаго безпорядка».

Если правиленъ взглядъ Tammann'а на аморфныя тѣла, какъ на жидкости съ громаднымъ внутреннимъ треніемъ, то эти тѣла не должны обладать теплотою плавленія, не должны давать поэтому опредѣленныхъ точекъ плавленія, обусловливаемыхъ выдѣленіемъ этой теплоты, и вообще не должны давать никакихъ внезапныхъ измѣненій въ свойствахъ при затвердѣваніи или плавленіи, при обращеніи въ аморфное состояніе.

Всѣ эти заключенія оправдываются опытами. Такъ, Hittorf показалъ, что кривая охлажденія селена, который при 50° становится крѣпкимъ, - hart; слово «твердый» (fest) могло бы повести здѣсь къ недоразумѣнію,—совершенно непрерывна.

Вязкость переохлажденной жидкости измѣняется непрерывнымъ образомъ вплоть до перехода ея въ такъ называемое аморфное состояніе: такъ бетолъ, плавящійся изъ кристаллическаго состоянія при 95°, при не особенно медленномъ переохлажденіи превращается при —-20°— —10° въ крѣпкое аморфное состояніе и подобнымъ же образомъ литофеллиновая кислота, съ точкою плавленія 205°, застекловывается при 105°—110°, амигдалинъ (съ точкою плавленія 200°)—при 125—130°, тростниковый сахаръ (съ точкою плавленія 160°)—при 90°—100°. Объемъ и теплоемкость вещества въ аморфномъ состояніи больше, чѣмъ въ состояніи кристаллическомъ, — то же имѣетъ мѣсто и для жидкаго состоянія.

Насколько опытъ показываетъ, вообще при застекловываніи переохлажденной жидкости не происходитъ внезапнаго измѣненія ни въ одномъ свойствѣ, если только вещество не принадлежитъ къ смѣсямъ. Въ послѣднемъ случаѣ нѣкоторыя изъ составныхъ частей могутъ закристаллизоваться, и тогда при застываніи онѣ представляютъ собою жидкую массу съ примѣшанными къ ней твердыми кристаллами. И въ этомъ случаѣ свойства будутъ мѣняться непрерывно, но при температурѣ, при которой появляются первые кристаллы или исчезаютъ послѣдніе слѣды ихъ, въ ходѣ измѣненія нѣкоторыхъ свойствъ—напримѣръ, объема, — могутъ быть не разрывы, но переломы и соотвѣтствующая кривая дастъ угловую точку. Такимъ образомъ у такихъ веществъ (напримѣръ, у воска) разрывъ непрерывности будетъ только у кривой первыхъ производныхъ; у аморфныхъ же его нѣтъ и тамъ.

Весьма интересною частью работы Tammann'а является изслѣдованіе тѣхъ условій, отъ которыхъ должна зависѣть возможность сильнаго переохлажденія жидкости. Такихъ условій два: 1. способность произвольной кристаллизаціи и 2. быстрота кристаллизаціи. За мѣру способности произвольной кристаллизаціи Tammann принимаетъ число образующихся въ единицѣ объема переохлажденной жидкости кристаллическихъ ядеръ — зародышей кристалловъ, которые далѣе растутъ во всѣ стороны съ извѣстною скоростью. Путемъ весьма остроумныхъ опытовъ Tammann доказываетъ, что эта способность не увеличивается постоянно съ пониженіемъ температуры, какъ обыкновенно думали, а, наоборотъ, только при извѣстной температурѣ имѣетъ maximum, при дальнѣйшемъ же пониженіи температуры снова уменьшается. Опыты производились имъ слѣдующимъ образомъ: тонкостѣнная W-образная стекляная трубка наполнялась, напримѣръ, бетоломъ (салициловый эфиръ β нафтола), температура плавленія котораго 95^0, и запаивалась. Содержимое этой трубки расплавлялось въ 100^0-ной банѣ и затѣмъ трубка опускалась на 2 минуты въ баню съ нѣкоторою болѣе низкою температурой. Изъ этой бани трубка переносилась въ баню съ температурой 75^0—температурою, при которой бетолъ обладаетъ наибольшей быстротою кристаллизаціи. Погруженіе въ баню низкой температуры вызвало образованіе въ переохлажденномъ бетолѣ нѣсколькихъ ядеръ кристаллизаціи, которыя затѣмъ при погруженіи въ 75^0-ную баню быстро росли тамъ и превращались въ шарообразные аггрегаты кристалловъ, которые легко было сосчитать.

Необходимо замѣтить, что ни въ одномъ случаѣ *число* этихъ шарообразныхъ аггрегатовъ не увеличивалось въ 75^0-ной банѣ съ теченіемъ времени, а только *они сами* увеличивались и заполняли собою черезъ нѣкоторое время всю трубку. Въ виду этого въ 75^0-ной банѣ трубка выдерживалась всего одну минуту, и затѣмъ производился подсчетъ числу образовавшихся отъ погруженія на двѣ минуты въ болѣе холодную баню — этихъ очаговъ кристаллизаціи. Слѣдующая таблица даетъ результаты опытовъ съ двумя трубками (I и II)

t	—40;	—25;	—20;	—10;	—5;	0;	+5;	+10;	+15;	+20;	+30;	+40;	+50;
n I	2;	0,5;	0,0;	0,0;	0,0;	2;	9;	27;	10,2;	0,0;	0,0;	0,0;	0,0;
n II				0,0;	0,0;	3;		26;	2;	0,0.			

Тамъ, гдѣ приведено два числа, второе показываетъ число зеренъ, образовавшихся послѣ 20-минутнаго погруженія въ баню съ температурой t. Числа эти обнаруживаютъ весьма ясно maximum кристаллизаціонной способности около 10^0, убывающей при дальнѣйшемъ пониженіи температуры. То, что послѣ погруженія въ эфирный растворъ твердой углекислоты ($—25^0—40^0$) образовались все-таки кристаллы, объясняется, по мнѣнію Tammann'a, тѣмъ, что послѣ такого сильнаго охлажденія нельзя было достаточно быстро перевести бетолъ черезъ область maximum'a кристаллизаціонной способности.

Tammann указываетъ, что отысканіе такихъ областей для различныхъ модификацій одного и того же вещества можетъ помочь получать по желанію то или другое видоизмѣненіе его, такъ какъ можно въ область maximum'а кристаллизаціонной способности одной разновидности приводить вещество, пройдя быстро черезъ область maximum'а кристаллизаціонной способности для другой.

Что касается до быстроты кристаллизаціи, то за мѣру ея Tammann принимаетъ то разстояніе, на которое перемѣщается въ трубкѣ за единицу времени граница между кристалломъ и переохлажденной жидкостью. Онъ указываетъ, что при достаточномъ переохлажденіи, когда между наростающими на пограничномъ слоѣ кристаллами не остается жидкости, такая мѣра совпадаетъ съ опредѣленіемъ другихъ скоростей реакцій, а именно съ количествомъ вещества, образующагося въ единицу времени на единицѣ поверхности пограничнаго слоя, такъ какъ вторая мѣра быстроты кристаллизаціи очевидно равна первой, умноженной на плотность. Если же охлажденіе меньше частнаго отъ дѣленія теплоты плавленія на теплоемкость тѣла въ жидкомъ состояніи, то не вся жидкость закристаллизовывается, — между кристаллами остается жидкость, и первая мѣра даетъ числа, соотвѣтственно большія, чѣмъ вторыя.

Опытъ производился слѣдующимъ образомъ: v-образная трубка наполнялась, напримѣръ, бетоломъ, — бетолъ расплавлялся и затѣмъ погружался въ баню нѣкоторой температуры T. Черезъ 10 минутъ, когда можно было считать, что бетолъ принялъ температуру бани, ему дѣлали, какъ выражается Tammann, «прививку посредствомъ зараженной твердымъ бетоломъ платиновой проволоки» (wurde das unterkühlte Betol mittels eines mit festen Betol inficirten Platindrahtes geimpft). Отъ этого привитаго мѣста по бетолу распространялась кристаллизація, быстроту которой можно было измѣрять съ ошибкою не болѣе 4%.

$v \dfrac{mm}{min}$

T	d=5 mm e=0 . 4	2 1	0 . 2 1 . 5
85		0 . 143	0 . 108
80	0 . 138	0 . 763	0 . 456
75	0 . 253	1 . 14	1 . 30
71		1 . 17	1 . 20
62	1 . 08	0 , 83	
53	0 . 81	0 . 67	0 . 65
42	0 . 39	0 . 32	0 . 31

Я не буду входить въ подробности этихъ опытовъ, которыя въ сущности даютъ лишь мѣру быстроты распространенія кристаллизаціи даннаго вещества въ данной трубкѣ, такъ какъ количество затвердѣвающей въ этихъ условіяхъ жидкости должно зависѣть отъ быстроты, съ какою уводится изъ пограничнаго слоя теплота, выдѣляющаяся при образованіи въ этомъ слоѣ кристалловъ, а эта быстрота уноса теплоты должна зависѣть и отъ количества вещества, т. е. отъ діаметра отверстія d въ трубкѣ, и отъ толщины ея стѣнокъ e, и отъ теплопроводности самаго вещества.

Всѣ эти обстоятельства играютъ однако тѣмъ меньшую роль, чѣмъ меньше быстрота кристаллизаціи и чѣмъ медленнѣе выдѣляется теплота. Поэтому для того, чтобы установить болѣе точную зависимость быстроты кристаллизаціи отъ температуры, Tammann произвелъ измѣреніе этой быстроты при низкихъ температурахъ въ тонкомъ слоѣ бетола, находившагося между предметнымъ и покровнымъ стеклышками подъ микроскопомъ, который для этого былъ окруженъ пространствомъ низкой температуры.

Результаты опытовъ показали, что быстрота кристаллизаціи быстро падаетъ съ температурою, причемъ зависимость давленія хорошо выражается формулой

$$\varrho = \varrho_1 e^{A \frac{T - T_1}{T_1}},$$

причемъ знакъ величины A мѣняется съ измѣненіемъ знака теплоты плавленія r.

Установленіе факта существованія maximum'а кристаллизаціонной способности и maximum'а быстроты кристаллизаціи показало Tammann'у, какія должны быть условія для возможности сильнаго переохлажденія жидкости: или ничтожная кристаллизаціонная способность, хотя бы при большой быстротѣ кристаллизаціи, или ничтожная быстрота кристаллизаціи, хотя бы была велика способность кристаллизаціи. И въ томъ, и въ другомъ случаѣ возможно переохлажденіе жидкости до превращенія ея въ стекловидное состояніе. Однако эти два maximum'а, вѣроятно, чаще лежатъ недалеко другъ отъ друга, потому что число веществъ, которыя извѣстны, какъ въ кристаллическомъ, такъ и въ аморфномъ, стекловидномъ состояніи, весьма ограничено.

Перейду теперь къ послѣднему и наиболѣе интересному изъ выводовъ Tammann'а, именно къ вопросу о существованіи второй точки плавленія. Напомню, что эта точка лежитъ за «критическою кривою» DL приблизительно на столько же ниже ея, на сколько первая точка плавленія лежитъ выше ея. А такъ какъ для большинства веществъ уменьшеніе теплоты плавленія при пониженіи температуры на 1^0, равно $0.5 - 1\%$, то, вѣроятно, что вторая точка плавленія лежитъ градусовъ на 200—400 ниже первой, а при такихъ температурахъ ниже первой точки плавленія всякая жидкость должна быть настолько вязка, что ее можно будетъ въ этомъ состояніи считать стеклообразною. Такимъ образомъ, верхняя часть кривой упругостей плавленія даетъ давленіе и температуры, при которыхъ вещество въ состояніи жидкости съ ничтожнымъ внутреннимъ треніемъ находится въ равновѣсіи съ кристаллическимъ веществомъ (замѣчу кстати, что въ 3-ьей работѣ Tammann почти всегда говоритъ вмѣсто твердаго состоянія — кристаллическое), а нижняя часть этой кривой даетъ давленіе и температуры, при которыхъ кристаллическое вещество находится въ равновѣсіи съ веществомъ въ состояніи стеклообразной жидкости.

Въ подтвержденіе своего вывода о возможности существованія второй точки плавленія Tammann приводитъ одно наблюденіе Lehmann'a и одно наблюденіе Pictet. По наблюденіямъ Lehmann'a, если нагрѣвать обыкновенный аморфный селенъ, то онъ при 50° становится мягкимъ, при 90° въ красной жидкости начинаютъ образовываться кристаллы, которые при дальнѣйшемъ нагрѣваніи заполняютъ все поле зрѣнія въ микроскопѣ, а по достиженіи температуры 217° вся масса превращается въ темнокрасную, почти совсѣмъ непрозрачную жидкость. При охлажденіи же Lehmann наблюдалъ слѣдующее: «если снова медленно охлаждать, то сначала выступаютъ сферокристаллы сѣраго видоизмѣненія, и въ то время, какъ они медленно, но постоянно уменьшаются, быстро уменьшается и темное окрашиваніе жидкости, наконецъ, мы снова получаемъ первоначальную свѣтлокрасную жидкость, которая при дальнѣйшемъ охлажденіи затвердѣваетъ въ обыкновенномъ аморфномъ красномъ видоизмѣненіи».

Pictet наблюдалъ подобное же явленіе на хлороформѣ, который застываетъ при температурѣ—68°5, а *при дальнѣйшемъ охлажденіи* при—80° снова расплавляется — замѣчу, что самъ Pictet объяснилъ это явленіе совершенно инымъ образомъ, — весьма запутанно и мало убѣдительно.

Tammann указываетъ еще одно обстоятельство, на которое придется часто наталкиваться при отысканіи второй точки плавленія,—на вѣроятную ничтожную величину быстроты кристаллизаціи при столь низкихъ температурахъ; если быстрота кристаллизаціи ничтожна, то и, обратно, превращеніе переохлажденнаго кристаллическаго вещества въ жидкое состояніе при температурахъ, соотвѣтствующихъ передней части средней террасы, должно совершаться съ крайней медленностью. Какъ примѣръ подобной трудности Tammann приводитъ одинъ свой опытъ съ литофеллиновой кислотой, точка плавленія которой 205°. Тонкій слой ея былъ расплавленъ между покровнымъ и предметнымъ стеклышкомъ, охлажденъ до комнатной температуры и помѣщенъ подъ микроскопомъ. При охлажденіи образовалось нѣсколько мельчайшихъ кристалловъ и Tammann сталъ измѣрять, въ продолженіе нѣсколькихъ дней, разстояніе одного кристалла отъ двухъ линій на стеклышкѣ. За первые 6 дней разстоянія конца кристалла отъ одной линіи уменьшилось на 0.003 мм., а отъ другого—увеличилось на 0.002. На седьмой день кончикъ вдругъ приблизился къ обѣимъ линіямъ на 0.003 мм., а въ 6 слѣдующихъ дней не произошло никакого измѣненія, такъ что рѣшить, растутъ или убываютъ кристаллы этого вещества при температурѣ 20°, на основаніи этого опыта невозможно.

Случаи замѣтной величины быстроты кристаллизаціи при второй точкѣ плавленія и небольшого разстоянія между первой и второй точкой плавленія (что возможно, когда r мало, а $\frac{dr}{dt}$ относительно велико), вѣроятно, весьма рѣдки, а потому неудивительно, что существованіе второй точки плавленія долго ускользало отъ наблюденія, тѣмъ болѣе, что ея и не искали, а когда нашли случайно, то и не оцѣнили этого наблюденія по достоинству и объяснили его иначе. Замѣчу отъ себя, что въ книгѣ Lehmann'a «Molecularphysik» есть много странныхъ и необъяснимыхъ наблюденій; по этому неудивительно, что и это не остановило на себѣ ничьего вниманія. Что же касается Pictet, то его репутація, какъ достовѣрнаго наблюдателя, не изъ слишкомъ надежныхъ.

Такова совершенно новая область состояній вещества, которую открылъ Tammann, — область, обѣщающая еще очень и очень много любопытныхъ фактовъ, такъ мастерски обобщенныхъ Tammann'омъ.

Къ сожалѣнію, къ нему пока присоединилось мало другихъ изслѣдователей, но онъ самъ энергично работаетъ и находитъ все новыя и новыя, — какъ теоретическія, такъ и опытныя — подтвержденія своихъ взглядовъ.

Прив.-доц. *Б. П. Вейнбергъ* (Одесса).

P. S. Какъ выяснилось въ настоящее время, наблюденіе Lehmann'a относится къ различнымъ видоизмѣненіямъ селена, а наблюденіе Pictet неправильно. Но за то Tamman'у удалось найти подобныя же пары точекъ превращенія при одномъ и томъ же давленіи для превращенія обыкновеннаго льда въ двѣ другія кристаллическія разновидности льда, открытыя имъ же, такъ что его теорію нужно считать вполнѣ подтвержденною.

23 сент. 1900 г.

НОВАЯ ГЕОМЕТРІЯ

ТРЕУГОЛЬНИКА.

(Géométrie récente du triangle).

(*Продолженіе* *).

7. **Метаполюсы тр-ка**. Точки D и E называютъ *метаполюсами* (*métapôles*) тр-ка ABC относительно тр-ка A'B'C', для отличія точку D называютъ *первымъ мотаполюсомъ*, а точку E — *вторымъ*.

Такъ-какъ прямыя, соединяющія точки D и E съ вершинами тр-ка ABC образуютъ углы или равные угламъ тр-ка A'B'C', или дополнительные имъ до 180°, то говорятъ, что *метаполюсы тр-ка суть такія точки, изъ которыхъ стороны этого тр-ка видимы подъ углами равными угламъ другого тр-ка, или составляющими съ ними два прямыхъ.*

8. **Парныя точки тр-ка**. (*Points jumeaux*). Двѣ точки называютъ *парными* относительно тр-ка, если соотвѣтственные углы, получающіеся

*) „Вѣстникъ" № 271.

отъ соединенія этихъ точекъ съ вершинами тр-ка, равны или составляютъ два прямыхъ.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что *метаполюсы тр-ка суть парныя точки*, ибо (фиг. 2 и 3):

$\angle BDC = 180^0 - A'$, $\angle ADB = 180^0 - C'$ или $= C'$, $\angle ADC = 180^0 - B'$ или $= B$
и

$$\angle BEC = 180 - A', \quad \angle AEB = C', \quad \angle AEC = B'.$$

9. **Первый метаполюсъ** D, какъ видно изъ предыдущаго, можетъ быть только внутри тр-ка, или въ одномъ изъ его вертикальныхъ угловъ.

Положимъ для сокращенія

$$\angle BDC = X, \quad \angle ADC = У, \quad \angle ADB = Z.$$

Если точка D находится внутри тр-ка (фиг. 2), то

$$X = 180^0 - A', \quad У = 180^0 - B', \quad Z = 180^0 - C'$$

и

$$A < X, \quad B < У, \quad C < Z,$$

или

$$A + A' < 180^0, \quad B + B' < 180^0, \quad C + C' < 180^0.$$

Если-же точка D находится въ одномъ изъ вертикальныхъ угловъ тр-ка, напр. A, то (фиг. 3):

$$X = 180^0 - A', \quad У = B', \quad Z = C'$$

и

$$X < A,$$

слѣдовательно

$$A + A' > 180^0, \quad B + B' < 180^0, \quad C + C' < 180^0.$$

Этими условіями опредѣляется положеніе перваго метаполюса тр-ка.

10. **Второй метаполюсъ** E всегда лежитъ внѣ тр-ка, въ части плоскости, ограниченной одной стороной его, напр. BC (фиг. 2 и 3), и продолженіями двухъ другихъ его сторонъ.

Положивъ для сокращенія

$$\angle BEC = X', \quad \angle AEC = У', \quad \angle AEB = Z',$$

получимъ:

$$X' = 180^0 - A', \quad У' = B', \quad Z' = C'.$$

Если точка E лежитъ внутри окружности ABC, описанной около тр-ка, то

$$X' > 180^0 - A, \quad У' > B, \quad Z' > C,$$

или

$$A > A', \quad B > B' \text{ и } C > C'.$$

Если-же точка E лежитъ внѣ окружности ABC, то

$$X' < 180^0 - A, \quad У' < B \text{ и } Z' < C,$$

или $A < A'$, $B < B'$, $C < C'$.

Наконецъ, если точка E лежитъ на окружности, то

$$X' = 180 - A, \quad Y' = B \text{ и } Z' = C,$$

$$A = A', \quad B = B' \text{ и } C = C'.$$

Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ тр-ки ABC и A'B'C' подобны и углы

$$X = \angle BDC, \quad Y = \angle ADC, \quad Z = \angle ADB$$

Причемъ $BDC = B + C$, $ADC = C + A$ и $ADB = B + A$, слѣдовательно, первый метаполюсъ D тр-ка ABC совпадаетъ въ этомъ случаѣ съ его *ортоцентромъ*. Кромѣ того дуга ADC вмѣщаетъ уголъ B, слѣдовательно, симметричная ей дуга совпадаетъ съ дугой ABC, по той же причинѣ дуги, симметричныя съ ADC и BCD относительно сторонъ тр-ка также совпадутъ съ ней. Отсюда

Теорема. *Первый метаполюсъ всякаго тр-ка относительно тр-ка ему подобнаго совпадаетъ съ его ортоцентромъ, а второй метаполюсъ въ этомъ случаѣ находится въ произвольной точкѣ окружности, описанной около тр-ка.*

11. Если D и E суть метаполюсы тр-ка ABC относительно тр-ка A'B'C', а D' и E' — метаполюсы тр-ка A'B'C' относительно тр-ка ABC, то точки D' и E' имѣютъ такое-же положенiе относительно тр-ка A'B'C', какое имѣютъ точки D и E относительно тр-ка ABC.

Дѣйствительно, условiя (9)

$$A + A' < 180^0, \quad B + B' < 180^0, \quad C + C' < 180^0$$

и

$$A + A' > 180^0, \quad B + B' > 180^0, \quad C + C' > 180^0,$$

которыми опредѣляется положенiе точки D внутри тр-ка ABC или въ вертикальномъ его углу A, одинаково примѣнимы какъ къ тр-ку ABC такъ и къ тр-ку A'B'C'; слѣдовательно, точки D и D' одинаково расположены относительно тр-въ ABC и A'B'C', а потому точки E и E', D и D' одинаково расположены относительно этихъ тр-въ.

12. Но точки E и E' различно расположены относительно окружностей ABC и A'B'C', ибо условiя (10)

$$A > A', \quad B < B', \quad C < C'$$

и

$$A < A', \quad B > B', \quad C > C',$$

которыми опредѣляется положенiе точки E относительно окружности ABC таковы, что если одно изъ нихъ удовлетворяется по отношенiю къ тр-ку ABC, то другое удовлетворяется по отношенiю къ тр-ку A'B'C'; слѣдовательно, если точка E лежитъ внутри окружности ABC, то точка E' находится внѣ окружности A'B'C', и наоборотъ.

При $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ точки E и E' суть первые метаполюсы окружностей ABC и A'B'C', а точки D и D' совпадаютъ съ ортоцентрами тр-въ ABC и A'B'C' (10).

13. Изъ предыдущаго видно, что положенiе метаполюсовъ даннаго тр-ка ABC относительно другого тр-ка $A'B'C'$ опредѣляется формой (т. е. углами) тр-ка $A'B'C'$, а не величиной его, такъ что метацентры тр-ка ABC относительно тр-въ подобныхъ $A'B'C'$ одни и тѣ-же. Одинъ изъ такихъ тр-въ получимъ, построивъ тр-къ стороны котораго параллельны или перпендикулярны прямымъ, соединяющимъ тотъ или другой метаполюсъ тр-ка ABC съ его вершинами.

Обозначивъ построенный такимъ образомъ тр-къ чрезъ $A'B'C'$, замѣтимъ, что если стороны его параллельны или перпендикулярны къ прямымъ, соединяющимъ первый метаполюсъ тр-ка ABC съ его вершинами, такъ что

$$B'C' \parallel \text{или} \perp DA, \quad C'A' \parallel \text{или} \perp DB, \quad A'B' \parallel \text{или} \perp DC,$$

то тр-ки ABC и $A'B'C'$ *сходственно расположены*, въ томъ смыслѣ, что переходъ по периметру тр-ка $A'B'C'$ чрезъ вершины A', B', C' совершается въ томъ-же направленiи, какъ и у тр-ка ABC чрезъ вершины A, A, C.

Если-же стороны тр-ка $A'B'C'$ параллельны или перпендикулярны къ прямымъ, соединяющимъ второй метацентръ тр-ка ABC съ его вершинами, такъ что

$$B'C' \parallel \text{или} \perp EA, \quad C'A' \parallel \text{или} \perp EB, \quad A'B' \parallel \text{или} \perp EC,$$

то тр-ки ABC и $A'B'C'$ (въ вышеуказанномъ смыслѣ) *обратно расположены*.

14. Если тр-ки ABC и $A'B'C'$ подобны, то точка D совпадаетъ съ ортоцентромъ тр-ка ABC, а точка E — есть произвольная точка окружности, описанной около него (10).

Отсюда, на основанiи сдѣланныхъ замѣчанiй (13) приходимъ къ выводу.

Если стороны тр-ка $A'B'C'$ параллельны или перпендикулярны высотамъ тр-ка ABC, то тр-ки ABC и $A'B'C'$ подобны и сходственно расположены (прямо подобны).

Если-же стороны тр-ка $A'B'C'$ параллельны или перпендикулярны къ прямымъ, соединяющимъ его вершины съ какой-либо точкой описанной около него окружности, то тр-ки ABC и $A'B'C'$ обратно подобны.

15. **Теорема.** *Если a, b, c и a', b', c, суть центры окружностей BDC, CDA, ADB BEC, CEA и AEB, гдѣ D и E суть первый и второй метаполюсы тр-ка ABC относительно тр-ка $A'B'C'$, то тр-ки abc и $a'b'c'$ подобны тр-ку $A'B'C'$ и обратно расположены.*

Прямыя AD, BD и CD суть общiя хорды окружностей, имѣющихъ центрами b и c, c и a, a и b, поэтому

$$AD \perp bc, \quad BD \perp ca, \quad CD \perp ab;$$

по той-же причинѣ

$$AE \perp b'c', \quad BE \perp c'a', \quad CE \perp a'b';$$

слѣдовательно (13), тр-ки abc и $a'b'c'$ подобны тр-ку $A'B'C'$.

Такъ-какъ тр-ки ABC и abc сходственно расположены (13), а тр-ки ABC и $a'b'c'$ обратно расположены, то тр-ки abc и $a'b'c'$ обратно подобны. (Фиг. 2 и 3).

16. **Теорема**. *Если прямыя AD, BD, DC, соединяющія вершины тр-ка ABC съ его метаполюсомъ относительно тр-ка $A'B'C'$, пересѣкаются съ окружностями BDC, CDA, ADB еще въ точкахъ A_1, B_1, C_1, то тр-ки A_1BC, AB_1C, ABC_1 подобны тр-ку $A'B'C'$.*

Такъ-какъ точка D лежитъ на окружности A_1BC, описанной, около тр ка A_1BC (фиг. 4) и

$$AD \text{ или } A_1D \perp bc, \quad BD \perp ca \text{ и } CD \perp ab,$$

то (14) тр-ки A_1BC и abc обратно подобны; точно также и тр-ки AB_1C и ABC_1 подобны тр-ку abc; слѣдовательно (15) тр-ки A^1BC, AB_1C и ABC^1 подобны тр-ку $A'B'C'$.

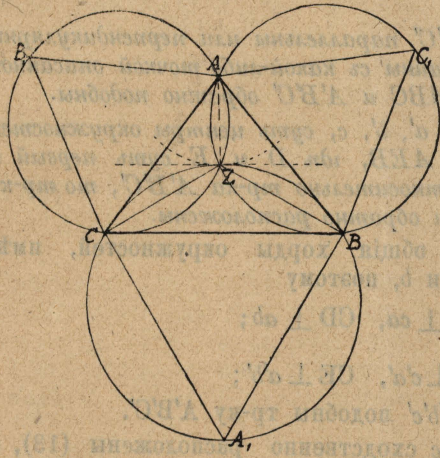
Такъ-какъ тр-ки ABC и abc сходственно расположены (15), то каждый изъ тр-въ A^1BC, AB_1C, ABC_1 обратно расположенъ съ тр-мъ ABC.

Аналогичная теорема справедлива и для второго метаполюса E, а именно:

Если прямыя AE, AE, CE, соединяющія второй метаполюсъ E тр-ка ABC съ его вершинами пересѣкаютъ окружности BEC, CEA, AEB еще въ точкахъ A'_1, B'_1, C'_1, то тр-ки A'_1BC, AB'_1C, ABC'_1 подобны тр-ку $A'B'C'$; ибо каждый изъ этихъ тр-ковъ обратно подобенъ тр-ку $a'b'c'$.

Тр-ки A'_1BC, AB'_1C, ABC'_1 сходственно расположены съ тр-ми ABC и симметричны съ тр-ми A_1BC, AB_1C, ABC_1 относительно сторонъ тр-ка ABC.

17. **Обратная теорема**. *Если внѣшніе тр-ки A_1BC, AB_1C, ABC_1, построенные на сторонахъ тр-ка ABC, подобны тр-ку $A'B'C'$, то окружности, описанныя около этихъ тр-въ, и прямыя AA_1, BB_1, CC_1 пересѣкаются въ одной точкѣ D, метаполюсѣ тр-ка ABC относительно тр-ка $A'B'C'$.*



фиг. 4.

Если A'_1BC, AB'_1C' ABC'_1 суть тр-ки симметричные съ тр-ми A_1BC, AB_1C, ABC_1 относительно сторонъ тр-ка ABC, то окружности, описанныя около этихъ тр-въ, и прямыя AA'_1, BB'_1, CC'_1 пересѣкаются въ одной точкѣ E, второмъ метаполюсѣ тр-ка ABC относительно тр-ка $A'B'C'$.

Доказательство вытекаетъ изъ слѣдующей теоремы (16).

18. Если на сторонахъ AB, BC и CA тр-ка ABC описать окружности, внутреннія дуги которыхъ вмѣщаютъ углы

$$180^0 - A,\quad 180^0 - B,\quad 180^0 - C,$$

или

$$180^0 - B,\quad 180^0 - C,\quad 180^0 - A,$$

то каждая изъ этихъ окружностей будетъ касаться одной изъ сторонъ тр-ка т. е. эти окружности будутъ сопряженныя. [1]) Такія три окружности, какъ было ранѣе указано (III, 6) пересѣкаются въ одной изъ точекъ *Брокара* тр-ка ABC. Слѣдовательно, каждая изъ точекъ Брокара тр-ка ABC есть первый метаполюсъ этого тр-ка относительно подобнаго ему тр-ка $A'B'C'$, у котораго

$$\angle A' = \angle C,\quad \angle B' = \angle A,\quad \angle C' = \angle B,$$

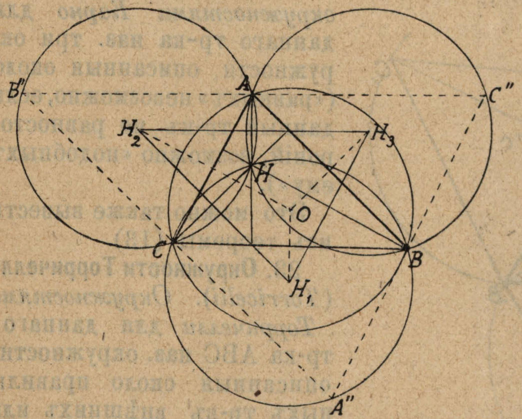
или

$$\angle A' = \angle B,\quad \angle B' = \angle C,\quad \angle C' = \angle A.$$

Парныя точки для точекъ Брокара (8), или вторые метаполюсы тр-ка ABC и подобныхъ ему тр-ковъ $A'B'C'$ суть *центры подобія* (III, 5) тр-ка ABC и подобныхъ описанныхъ около него тр-въ, также, какъ точки Брокара суть центры подобія тр-ка ABC и вписанныхъ въ него подобныхъ тр-въ.

19. **Окружности Карно** (*Carnot*). *Окружностями Карно* для даннаго тр-ка ABC мы будемъ называть окружности, симметричныя съ окружностью описанной около этого тр-ка относительно его сторонъ.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что центры окружностей Карно симметричны относительно сторонъ тр-ка съ центромъ окружности, описанной около него.



фиг. 5

Теорема Карно. *Три окружности Карно даннаго тр-ка пересѣкаются въ его ортоцентрѣ.*

Доказательство слѣдуетъ изъ разсужденій, приведенныхъ выше (10).

20. **Теорема.** *Если точки* H_1, H_2, H_3 *суть центры окружностей Карно для тр-ка ABC, то тр-ки ABC и* $H_1H_2H_3$ *равны и имѣютъ общую окружность Эйлера.* [2])

---

[1]) Окружности эти наз. во французскихъ изданіяхъ „*arconférences adjointes*“ (VII, 16). Я предложилъ-бы называть ихъ „*окружностями Шадю*“ (*Chadu*), по имени профессора, который первый воспользовался ими для рѣшенія задачи *Брокара*.

[2]) Эта и слѣдующая теоремы открыты Карно и потому носятъ его имя.

Обозначимъ чрезъ α, β, γ пересѣченія сторонъ тр-ка CB, CA, AB съ прямыми OH_1, OH_2, OH_3 (фиг. 5). Такъ какъ β и γ суть средины AC и AB, то $\beta\gamma = \frac{1}{2}$ BC и $\|$ BC; но $\beta H_2 = O\beta$ и $\gamma H_3 = O\gamma$, слѣдовательно H_2H_3 равна и параллельна BC; подобнымъ-же образомъ H_1H_2 и H_1H_3 соотвѣтственно равны и параллельны AB и AC; слѣдовательно тр-ки ABC и $H_1H_2H_3$ равны и гомотетичны (II, 4). Такъ какъ $H_1O \perp BC$ и $BC \| H_2H_3$, то $H_1O \perp H_2H_3$, точно также $H_2O \perp H_1H_3$ и $H_3O \perp H_1H_2$; значитъ центръ O круга, описаннаго около тр-ка ABC есть ортоцентръ тр ка $H_1H_2H_3$; не трудно убѣдиться, что ортоцентръ H тр-ка ABC служитъ центромъ круга, описаннаго около тр-ка $H_1H_2H_3$; поэтому центры окружностей Эйлера для тр-въ ABC и $H_1H_2H_3$ совпадаютъ въ срединѣ отрѣзка HO (I, 12), а вслѣдствіе равенства этихъ тр-въ и самыя окружности Эйлера совпадаютъ.

Изъ этого слѣдуетъ, что центръ общей окружности Эйлера для тр-въ ABC и $H_1H_2H_3$ есть центръ гомотетіи этихъ тр-въ.

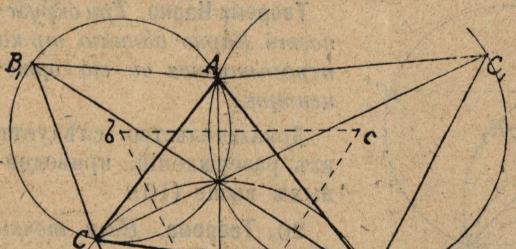
21. **Теорема.** *Окружности Карно даннаго тр-ка касаются окружности, описанной около тр-ка антидополнительнаго.*

Такъ какъ стороны антидополнительнаго тр-ка $A''B''C''$ (III, 9) дѣлятся вершинами даннаго тр-ка ABC пополамъ, и при томъ

$$A''B'' \| AB,\quad B''C'' \| BC \text{ и } C''A'' \| CA,$$

то ортоцентръ H тр-ка ABC (фиг. 5) служитъ центромъ круга, опиописаннаго около тр-ка $A''B''C''$; поэтому окружности $A''B''C''$ и $H_1H_2H_3$ концентричны (20), а потому окружности Карно AHB, BHC, CHA, имѣющіе центры въ H_3, H_1, H_2, касаются окружности $A''B''C''$.

22. Такъ какъ тр-ки ABC'', BCA'', CAB'' равны тр-ку ABC, то можно сказать, что *окружностями Карно* для даннаго тр-ка наз. три окружности, описанныя около («равныхъ» невозможно, если данный тр-къ не равностороній, возможно «подобныхъ ему»).



фиг. 6

Это можно также вывести изъ теоремы (13).

23. **Окружности Торричелли** (*Torricelli*). *Окружностями Торричелли* для даннаго тр-ка ABC наз. окружности, описанныя около правильныхъ тр-въ внѣшнихъ или внутреннихъ, построенныхъ на сторонахъ даннаго тр-ка (*Neuberg*).

Окружности Торричелли описанныя около внѣшнихъ правильныхъ тр-въ, построенныхъ на сторонахъ даннаго тр-ка, будемъ называть *внѣшними*, а симметричныя съ ними окружности относительно сторонъ даннаго тр-ка, *внутренними*.

24. **Теорема Торричелли.** *Три окружности Торричелли (внѣшнія или внутреннія) пересѣкаются въ одной точкѣ* (См. фиг. 6).

Пусть A_1BC, AB_1C ABC_1 суть правильные внѣшніе тр-ки, построенные на сторонахъ тр-ка ABC (фиг. 6). Внѣшнія дуги BA_1C, CB_1A, AC_1B окружностей Торричелли вмѣщаютъ углы въ 60^0, т. е. равные угламъ правильнаго тр-ка; слѣдовательно (5) эти окружности пересѣкаются въ одной точкѣ Z, а потому и внутреннія окружности Торричелли, симметричныя съ первыми, также пересѣкаются въ одной точкѣ Z'.

Очевидно, что *точки пересѣченія окружностей Торричелли даннаго тр-ка суть метаполюсы этого тр-ка относительно правильныхъ тр-въ*.

25. **Изогоническіе центры** (*Centres isogones*). Точки, изъ которыхъ видимы стороны даннаго тр-ка подъ углами въ 60^0 или 120^0, наз. *изогональными центрами* этого тр-ка.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что *изогоническіе центры тр-ка суть метаполюсы его относительно правильныхъ тр-въ*, т. е. это суть точки пересѣченія окружностей *Торричелли* (Z и Z').

Если каждый изъ угловъ даннаго тр-ка меньше 120^0, то одинъ изъ его изогоническихъ центровъ (Z) лежитъ внутри тр-ка, а другой внѣ его; въ этомъ случаѣ первый будемъ называть *внутреннимъ*, а второй *внѣшнимъ*.

Тр-къ, у котораго одинъ изъ угловъ больше 120^0, не имѣетъ внутренняго изогоническаго центра.

26. **Теорема.** *Сумма разстояній внутренняго изогоническаго центра тр-ка отъ его вершинъ есть minimum.*

Положимъ, что нѣкоторая точка Z (фиг. 6) удовлетворяетъ условію

$$AZ + BZ + CZ = minimum;$$

описавъ около точки A окружность радіусами AZ и проведя къ ней касательную въ точкѣ Z, замѣтимъ, что при опредѣленномъ разстояніи AZ и при условіи $BZ + CZ = minimum$, касательная должна составлять равные углы съ прямыми BZ и CZ, а слѣдовательно, эти прямыя должны составлять равные углы съ прямою AZ. Разсуждая также относительно вершины B, придемъ къ заключенію, что прямыя AZ и CZ должны составлять равные углы съ прямою BZ; слѣдовательно, точка Z, удовлетворяющая условію

$$AZ + BZ + CZ = minimum,$$

должна удовлетворять условію

$$\angle AZB = \angle BZC = \angle CZA = 120^0;$$

значитъ точка Z совпадаетъ съ внутреннимъ изогоническимъ центромъ тр-ка.

27. **Приложенія**. Если D и D′ суть соотвѣтственные метаполюсы тр-въ ABC и A′B′C′ относительно другъ друга, то полные четыреугольники ABCD и A′B′C′D′ метаполярны (III, 22).

28. Если a, b, c и a', b', c' суть центры круговъ BDC, CDA, ADB и AEC, CEA, AEB, гдѣ D и E суть метаполюсы тр-ка ABC относительно другого тр-ка A′B′C′, то тр-ки abc и $a'b'c'$ перспективны или гамологичны. (II, 1).

29. Если H_1, H_2, H_3 суть центры окружностей Карно для тр-ка ABC, H—ортоцентръ этого тр-ка и O центръ описаннаго около него круга, то прямыя AH_1, BH_2, CH_3 и OH пересѣкаются въ одной точкѣ, дѣлящей каждую изъ нихъ пополамъ.

30. Если A_1BC, AB_1C, ABC_1 суть правильные тр-ки (внутренніе или внѣшніе), построенные на сторонахъ тр-ка ABC, то прямыя AA_1, BB_1, CC_1 равны между собою и пересѣкаются въ одной точкѣ.

Д. Е. (Иваново-Вознесенскъ).

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

№ 613. Черезъ данную точку провести окружность, встрѣчающую данныя три параллельныя прямыя по двумъ хордамъ данной длины. *)

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 614. Рѣшить систему уравненій:

$$(x^3+y^3)(x-y)=304$$
$$(x^3-y^3)(x-y)=784.$$

А. Гольденбергъ (Спб.).

№ 615. Рѣшить систему уравненій:

$$u+v=a$$
$$ux-vy=b$$
$$ux^2+vy^2=c$$
$$ux^3-vy^3=d.$$

С. Адамовичъ (Двинскъ).

*) Подъ хордой, по которой встрѣчаютъ окружность двѣ параллельныя, подразумѣвается хорда, стягивающая заключенную между двумя параллельными прямыми дугу.

№ 616. Доказать, что выраженіе

$$5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n}$$

при n цѣломъ и не меньшемъ нуля дѣлится на 41 безъ остатка.

(Заимств.) *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ).

№ 617. Треугольникъ ABC вращается около биссектрисы AA' внутренняго угла A. Доказать, что поверхности, образуемыя при вращеніи прямыми AB и AC относятся, какъ объемы тѣлъ, полученныхъ отъ вращенія треугольниковъ ABA' и ACA'.

(Заимств.) *П. П.* (Одесса).

№ 618. На сонометрѣ натянута струна при помощи куска мягкаго желѣза незначительнаго вѣса. На желѣзо дѣйствуетъ сильный электромагнитъ, по которому проходитъ токъ отъ тяги соединенныхъ въ рядъ аккумуляторовъ. Натянутая такимъ образомъ струна можетъ издавать извѣстный звукъ. Спрашивается, сколько надо прибавить аккумуляторовъ, чтобы издаваемый струною звукъ былъ какъ можно ближе къ квинтѣ первоначальнаго?

Допускается, что въ условіяхъ опыта притягивающая сила электромагнита пропорціональна силѣ тока и что внутреннее сопротивленіе аккумуляторовъ незначительно въ сравненіи съ сопротивленіемъ остальной части цѣпи. Какъ далѣе надо поступить на практикѣ, чтобы второй звукъ при той же длинѣ струны былъ точно квинтою перваго?

(Заимств.) *М. Г.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 523. (3 сер.) *Найти двузначное число, если извѣстно, что будучи увеличено на сумму своихъ цифръ, оно даетъ въ результатѣ число m.*

Пусть x цифра десятковъ, y цифра единицъ искомаго числа. Тогда

$$10x + y + (x + y) = 11x + 2y = m.$$

Рѣшая это уравненіе въ цѣлыхъ числахъ, для чего можно обратиться къ рѣшенію $x = -m$, $y = 6m$, мы найдемъ:

$$x = 2t - m \quad (1), \qquad y = 11t + 6m \quad (2)$$

Такъ какъ x и y цифры и $x \neq 0$, то

$$10 > 2t - m > 0, \ 10 > 11t + 6m \geqslant 0,$$

откуда

$$\frac{m+10}{2} > t > \frac{m}{2} \quad (3), \qquad \frac{6m}{11} \geqslant t > \frac{6m-10}{11} \quad (4)$$

Если

$$\frac{6m-10}{11}=z \qquad (5),$$

гдѣ z число цѣлое, задача невозможна. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ (см. (4))

$$t \geqslant \frac{6m-10}{11}+1=\frac{6m+1}{11}>\frac{6m}{11}.$$

Рѣшая уравненіе (5) въ числахъ цѣлыхъ, найдемъ, что при условіи

$$m=11t_1+9, \qquad (6)$$

гдѣ t_1 цѣлое число, задача невозможна. Кромѣ того она невозможна, если m не удовлетворяетъ неравенствамъ

$$106 \geqslant m \geqslant 22, \qquad (7)$$

будучи четнымъ и неравенствамъ

$$117 \geqslant m \geqslant 11, \qquad (8)$$

будучи нечетнымъ. Дѣйствительно, четный и нечетный minimum m есть соотвѣтственно $20+2$ и $10+1$, а maximum — соотвѣтственно $89+8+9$ и $99+1+8$. Если же цѣлое число m не есть число вида (6) и удовлетворяетъ соотвѣтственно неравенствамъ (7), (8), то задача возможна и имѣетъ одно рѣшеніе. Дѣйствительно, при указанныхъ ограниченіяхъ неравенствамъ (3), (4) можно удовлетворить одновременно, полагая

$$t=E\frac{6m-10}{11}+1 \qquad (9),$$

гдѣ символъ E означаетъ наибольшее цѣлое число, заключающееся въ дроби $\frac{6m-10}{11}$.

Въ самомъ дѣлѣ, разность между положительной дробью $\frac{6m-10}{11}$ и $E\frac{6m-10}{11}$ не болѣе $\frac{10}{11}$ и не менѣе $\frac{1}{11}$. Поэтому

$$\frac{6m}{11}=\frac{6m-10}{11}-\frac{1}{11}+1 \geqslant E\frac{6m-10}{11}+1 \geqslant \frac{6m-10}{11}-\frac{10}{11}+$$

$$+1>\frac{6m-9}{11}>\frac{6m-10}{11}.$$

Кромѣ того t можетъ имѣть лишь одно цѣлое значенiе, такъ какъ разность между предѣлами t (см. (4)) менѣе 1. Но указанное (см. (3)) значенiе t удовлетворяетъ и неравенствамъ (3).

Дѣйствительно, при m четномъ изъ тожествъ

$$E\frac{6m-10}{11}=E\left(\frac{m}{2}+E\frac{m-20}{22}\right)=E\left(\frac{m+6}{2}-\frac{86-m}{22}\right)$$

и неравенствъ (7) имѣемъ:

$$\frac{m+6}{2}\geqslant E\frac{6m-10}{11}\geqslant\frac{m}{2},$$

а потому

$$\frac{m+10}{2}>\frac{m+8}{2}>E\frac{6m-10}{11}+1>\frac{m}{2}.$$

Точно также при m нечетномъ изъ тожествъ

$$E\frac{6m-10}{11}=E\left(\frac{m-1}{2}+\frac{m-9}{22}\right)=E\left(\frac{m+7}{2}-\frac{97-m}{22}\right)$$

и неравенствъ (8) слѣдуетъ:

$$\frac{m+7}{2}\geqslant E\frac{6m-10}{11}\geqslant\frac{m-1}{2},$$

откуда

$$\frac{m+10}{2}>\frac{m+9}{2}>E\frac{6m-10}{11}+1>\frac{m+1}{1}>\frac{m}{2}.$$

Изъ равенствъ (9), (1), (2) находимъ x и y, откуда искомое число опредѣляется равенствомъ

$$10x+y=9-4m+9\,E\frac{6m-10}{11}.$$

И. Поповскiй (Умань); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *Я. Полушкинъ* (Знаменка).

№ 542. (3 сер.) *Даны три точки A, B, C. Найти такую четвертую точку X, чтобы около четыреугольника ABCX можно было описать окружность и чтобы въ тотъ же четыреугольникъ можно было вписать окружность.*

Согласно съ условiемъ задачи точка X лежитъ на окружности, проходящей черезъ точки A, B и C, а потому для возможности задачи эти три точки не должны быть на одной прямой. Четыреугольникъ ABCX есть описанный около нѣкоторой окружности.

Поэтому

$$AB + XC = BC + AX,$$

откуда

$$AX - XC = AB - BC.$$

Пусть AB не меньше BC. Если $AB = BC$, то точка X есть средина дуги, дополняющей дугу ABC до полной окружности. Если $AB > BC$, то задача приводится къ построенію треугольника AXC по сторонѣ AC, углу $AXC = 2d - \angle ABC$ и разности сторонъ $AX - XC$.

Поэтому для нахожденія точки X надо изъ точки A описать окружность радіусомъ $AB - BC$, построить на AC сегментъ, вмѣщающій уголъ $\alpha = d + \frac{\angle AXC}{2} = 2d - \frac{\angle ABC}{2}$ и расположенный по ту же сторону прямой AC, какъ и сегментъ, вмѣщающій уголъ AXC, и черезъ точку M пересѣченія сегмента, вмѣщающаго уголъ α, съ описанной изъ A окружностью провести прямую AM до пересѣченія съ окружностью, описанной около треугольника ABC, въ искомой точкѣ X. Задача всегда возможна, такъ какъ

$$AB - BC < AC.$$

А. Гвоздевъ (Курскъ); *П. Матвѣевъ* (Полтава); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *С. Адамовичъ* (Двинскъ); *А. Воронцовъ* (Шуя).

Редакторъ **В. А. Циммерманъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса, 13-го Октября 1900 г.

Типографія Г. М. Левинсона, Ришельевская, домъ № 19.

Обложка
пщется

Обложка
ищется