Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXI Сем. № 6.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 246.

Содержаніе: Новая геометрія треугольника (Продолженіе) *Д. Е.*—Элементарная теорія эллипса (Продолженіе).—Замѣтка относительно *maximum*'а силы тока гальванической батареи. *А. Кириллова.*—Эмиль дю Буа-Реймондъ. (Некрологъ).—Изобрѣтенія и открытія: Новое примѣненіе гальваническаго тока.—Опыты и приборы: Фоліоскопъ. Усовершенствованный зажимъ для каучуковыхъ трубокъ.—Задачи №№ 397—402. — Рѣшенія задачъ (3-ей серіи) №№ 329, 330, 334 и 336.—Обзоръ научныхъ журналовъ: Mathesis № 5. *Д. Е.*—Отвѣты редакціи.—Объявленія.

НОВАЯ ГЕОМЕТРІЯ
ТРЕУГОЛЬНИКА.

(Géométrie récente du triangle).

(Продолженіе).*

11. Теорема. *Прямыя, проведенныя чрезъ вершины тр-ка* ABC *параллельно сторонамъ* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *перваго тр-ка Брокара пересѣкаются въ одной точкѣ на окружности* ABC.

Положимъ, что прямая, проведенная чрезъ A параллельно B_1C_1, пересѣкаетъ окружность ABC въ точкѣ R (фиг. 35). Прямыя B_1C_1 и BC, какъ соотвѣтственныя прямыя тр-въ $A_1B_1C_1$ и ABC, составляютъ равные углы съ осью Штейнера xx'. Прямыя A_1K и AR, параллельныя BC и B_1C_1, образуютъ также равные углы съ xx', а такъ какъ эти прямыя проходятъ чрезъ соотвѣтственныя точки A_1 и A тр-въ $A_1B_1C_1$ и ABC, то онѣ также суть соотвѣтственныя прямыя этихъ тр-въ.

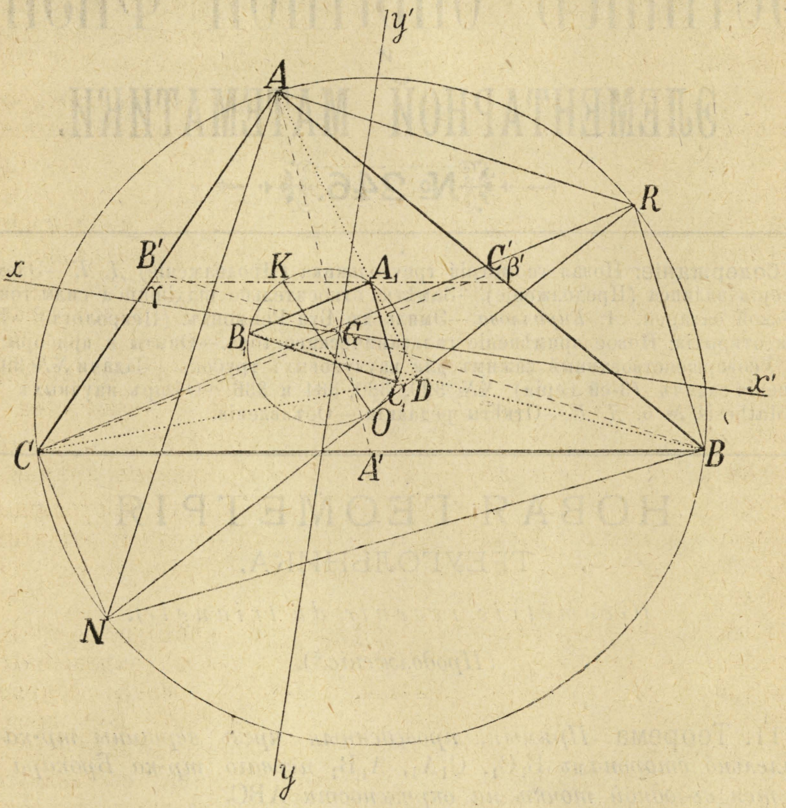
Такимъ образомъ, прямыя, проведенныя черезъ A, B, C параллельно B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 суть соотвѣтственныя прямымъ A_1K, B_1K и C_1K. Но A_1K, B_1K, C_1K пересѣкаются въ одной точкѣ K на окружности $A_1B_1C_1$; поэтому и соотвѣтственныя имъ прямыя, означенныя въ теоремѣ, пересѣкаются въ одной точкѣ R на окружности ABC.

12. Точка Штейнера. Точка пересѣченія R прямыхъ, проведенныхъ чрезъ вершины тр-ка ABC параллельно сторонамъ B_1C_1, C_1A_1, B_1C_1 перваго тр-ка Брокара, наз. *точкой Штейнера* тр-ка ABC.

---

*) См. „Вѣстника Оп. Физики“ №№ 230, 231, 232, 234, 236, 239, 240 и 244.

Изъ доказательства предыдущей теоремы слѣдуетъ, что точка Штейнера R и точка Лемуана K тр-ка ABC суть соотвѣтственныя точки тр-въ ABC и $A_1B_1C_1$.



Фиг. 35.

13. **Теорема.** *Перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ основного тр-ка* ABC *на стороны* B_1C_1, C_1A_1, B_1C_1 *перваго тр-ка Брокара, пересѣкаются въ одной точкѣ на окружности* ABC.

Положимъ, что перпендикуляръ изъ A на B_1C_1 пересѣкаетъ окружность ABC въ точкѣ N (фиг. 35). Такъ какъ BC и B_1C_1, какъ соотвѣтственныя прямыя тр-въ ABC и $A_1B_1C_1$, составляютъ равные углы съ осью Штейнера xx', то и перпендикуляры A_1A' и AN къ этимъ прямымъ составляютъ съ xx' равные углы; но A и A_1 суть соотвѣтственныя точки тр-въ ABC и $A_1B_1C_1$, а потому и A_1A' и AN суть соотвѣтственныя прямыя этихъ тр-въ. Такимъ образомъ, перпендикуляры изъ A, B, C на B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 суть соотвѣтственныя прямыя для A_1A', B_1B', C_1C'; эти же прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ O на окружности $A_1B_1C_1$; слѣдовательно и перпендикуляры изъ A, B, C на B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 пересѣкаются въ одной точкѣ N на окружности ABC.

14. **Точка Тарри** (*Tarry*). Точка пересѣченія N перпендикуляровъ изъ вершинъ тр-ка ABC на стороны B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 перваго тр-ка Брокара наз. *точкой Тарри* тр-ка ABC.

Изъ доказательства предыдущей теоремы видно, что точка Тарри N и центръ O круга ABC суть соотвѣтственныя точки тр-въ ABC и $A_1B_1C_1$.

Такъ какъ точка Лемуана K и центръ O круга ABC суть концы діаметра окружности $A_1B_1C_1$, то соотвѣтственныя имъ *точка Штейнера* R *и точка Тарри* N *суть концы діаметра окружности* ABC.

15. Теорема. *Основной тр-къ* ABC *и первый тр-къ Брокара* $A_1B_1C_1$ *перспективны*, т. е. прямыя AA_1, BB_1, CC_1 пересѣкаются въ одной точкѣ.

Положимъ, что KA_1 пересѣкаетъ AB и AC въ β' и γ (фиг. 35). Такъ какъ KA_1 есть отрѣзокъ параллели Лемуана (2), то β' и γ суть точки окружности Лемуана; но окружность Лемуана концентрична съ окружностью Брокара (1); поэтому $K\gamma = A_1\beta'$; слѣдовательно, прямыя AK и AA_1 изотомичны относительно BC. Подобнымъ же образомъ BK и BB_1, CK и CC_1 изотомичны относительно AC и AB. Слѣдовательно, прямыя AA_1, BB_1, CC_1, изотомически сопряженныя съ AK, BK, CK, пересѣкаются въ одной точкѣ (V,2); эту точку будемъ обозначать чрезъ D.

Центръ перспективы D *тр-въ* ABC *и* $A_1B_1C_1$ *лежитъ на прямой* NR, *соединяющей точку Тарри съ точкой Штейнера.*

Ось гомологіи тѣхъ-же тр-въ перпендикулярна къ прямой OD.

16. Сопряженныя окружности. Окружности, проходящія чрезъ двѣ вершины тр-ка и касающіяся его стороны въ одной изъ этихъ вершинъ, наз. *сопряженными окружностями*. (*Circonférences adjointes, Beikreise*).

Каждая изъ сопряженныхъ окружностей проходитъ чрезъ одну изъ точекъ Брокара тр-ка (III,6,7); поэтому шесть сопряженныхъ окружностей тр-ка ABC можно раздѣлить на двѣ группы: сопряженныя окружности 1-й группы суть окружности $A\Omega B$, $B\Omega C$, $C\Omega A$, проходящія чрезъ первую точку Брокара (Ω) тр-ка; окружности $A\Omega' B$, $B\Omega' C$, $C\Omega' A$, проходящія чрезъ вторую точку Брокара (Ω') тр-ка, составляютъ 2-ю группу сопряженныхъ окружностей. Изъ этого слѣдуетъ, что сопряженныя окружности одной группы пересѣкаются въ одной изъ точекъ Брокара (Ω или Ω') тр-ка.

17. Окружность, проходящую чрезъ вершину тр-ка A и касающуюся противоположной стороны его BC въ точкѣ B, будемъ обозначать чрезъ $(A,\overline{B})$, гдѣ вторая буква съ чертой сверху обозначаетъ точку касанія окружности со стороной тр-ка, противолежащей вершинѣ его, обозначенной первой буквой.

Такимъ образомъ, сопряженныя окружности

1-й группы: $A\Omega B$, $B\Omega C$, $C\Omega A$ обозначаются чрезъ $(A,\overline{B})$, $(B,\overline{C})$, $(C,\overline{A})$;

2-й группы: $A\Omega' B$, $B\Omega' C$, $C\Omega' A$ „ „ $(B,\overline{A})$, $(C,\overline{B})$, $(A,\overline{C})$.

18. Обозначимъ пересѣченія прямой (фиг. 36)

$A\Omega$ съ BC и окружностью $(B,\overline{C})$ чрезъ Ω_1 и α,

$B\Omega$ съ CA и „ $(C,\overline{A})$ „ Ω_2 и β,

$C\Omega$ съ AB и „ $(A,\overline{B})$ „ Ω_3 и γ.

Такъ какъ

$$\angle B\Omega C = 180^0 - C \text{ (III,6)},$$

то

$$\angle B\alpha C = \angle C \text{ и } \angle BC\alpha = \angle B\Omega\alpha;$$

но, обозначивъ чрезъ α_1, β_1, γ_1 пересѣченія прямыхъ $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ съ окружностью ABC и замѣтивъ, что (III,8)

$$\angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \angle \Omega CA = \omega \text{ (уголъ Брокара)},$$

а потому

$$\smile{A\gamma_1} = \smile{B\alpha_1} = \smile{C\beta_1},$$

найдемъ, что

$$\angle B\Omega\alpha = \angle B;$$

слѣдовательно

$$\angle BC\alpha = \angle B \text{ и } \angle CB\alpha = \angle A.$$

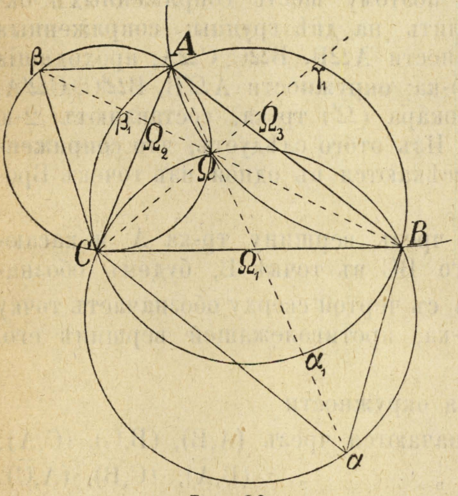
Отсюда слѣдуетъ, что *тр-ки* αBC *и* CAB *обратно подобны.* То же справедливо для тр-въ βCA, γAB.

1) Прямыя αC, βA, γB соотвѣтственно параллельны сторонамъ тр-ка AB, BC, CA.

2) Прямыя αB, βC, γA касаются окружности ABC.

3) Если симедіаны тр-ка AK, BK, CK пересѣкаютъ его стороны въ K_1, K_2, K_3, то прямыя $K_1\Omega_3$, $K_2\Omega_1$, $K_3\Omega_2$ соотвѣтственно параллельны сторонамъ CA, AB, BC.

Очевидно, что сопряженныя окружности второй группы обладаютъ аналогичными свойствами.



Фиг. 36.

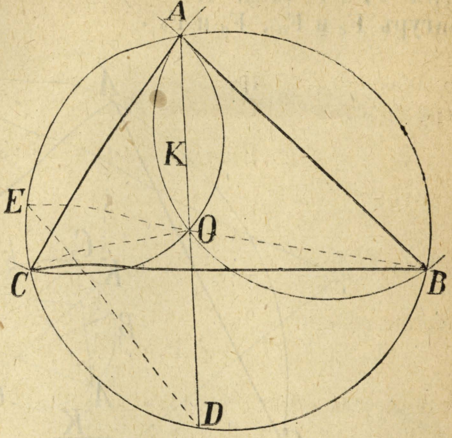
20. Смежныя сопряженныя окружности. Двѣ сопряженныя окружности разныхъ группъ, касающіяся сторонъ тр-ка въ одной вершинѣ его (напр. окружности $(C,\overline{A})$ и $(B,\overline{A})$) будемъ называть *смежными сопряженными окружностями.*

Изъ построенія центра подобія (двойной точки) подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ слѣдуетъ, что:

Вторая точка пересѣченія смежныхъ сопряженныхъ окружностей $(C,\overline{A})$ *и* $(B,\overline{A})$ *есть центръ подобія подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ, построенныхъ на сторонахъ тр-ка* CA *и* BA. (III,2).

21. Теорема. *Если смежныя сопряженныя окружности* $(C,\overline{A})$ *и* $(B,\overline{A})$ *тр-ка* ABC *пересѣкаются въ* O, *а прямая* AO *пересѣкается съ окружностью* ABC *въ* D, *то хорда* AD *проходитъ чрезъ точку Лемуана тр-ка* ABC *и дѣлится въ* O *пополамъ.* (фиг. 37).

Обозначимъ стороны тр-ка AB и AC чрезъ c и b. Такъ какъ точка O, по предыдущему, есть центръ подобія подобныхъ фигуръ, имѣющихъ соотвѣтственными прямыми AB и AC, то разстоянія точки O отъ этихъ прямыхъ относятся какъ $c:b$; въ томъ же отношеніи находятся разстоянія точки Лемуана K тр-ка отъ этихъ сторонъ (V,17); слѣдовательно, прямая AO проходитъ чрезъ точку K.



Фиг. 37.

Для доказательства второй части теоремы положимъ, что прямая BO пересѣкается съ окружностью ABC въ точкѣ E. Такъ какъ тр-ки BOA и AOC подобны и одинаково расположены, то $\angle OAC = \angle ABC = \angle ODE$ и $\angle ACO = \angle DEO$. Изъ равенства-же угловъ $\angle DAC$ и $\angle ADE$ слѣдуетъ равенство дугъ CD и AE, и DE и AC; поэтому хорды DE и AC равны, а слѣдовательно $AO = DO$.

22. Второй треугольникъ Брокара. Треугольникъ, вершины котораго (A_2, B_2, C_2) суть пересѣченія окружности Брокара съ симедіанами тр-ка ABC, наз. *вторымъ тр-мъ Брокара*.

Обозначимъ чрезъ K_1, T_1 и A_2 точки пересѣченія симедіаны AK тр-ка ABC съ его стороной BC, съ окружностью ABC и съ окружностью Брокара (фиг. 38). Такъ какъ прямая KO, соединяющая точку Лемуана K тр-ка ABC съ центромъ O описаннаго около него круга, служитъ діаметромъ круга Брокара (1), то $OA_2 \perp AT_1$, а потому A_2 есть средина хорды AT_1, хорда же AT_1 есть симедіана тр-ка ABC; слѣдовательно (21), точка A_2 есть пересѣченіе смежныхъ сопряженныхъ окружностей $(C,\overline{A})$ и $(B,\overline{A})$, или $A\Omega C$ и $A\Omega' B$.

Такимъ образомъ, *вершины второго тр-ка Брокара* $A_2B_2C_2$ *суть точки пересѣченія трехъ паръ смежныхъ сопряженныхъ окружностей тр-ка* ABC.

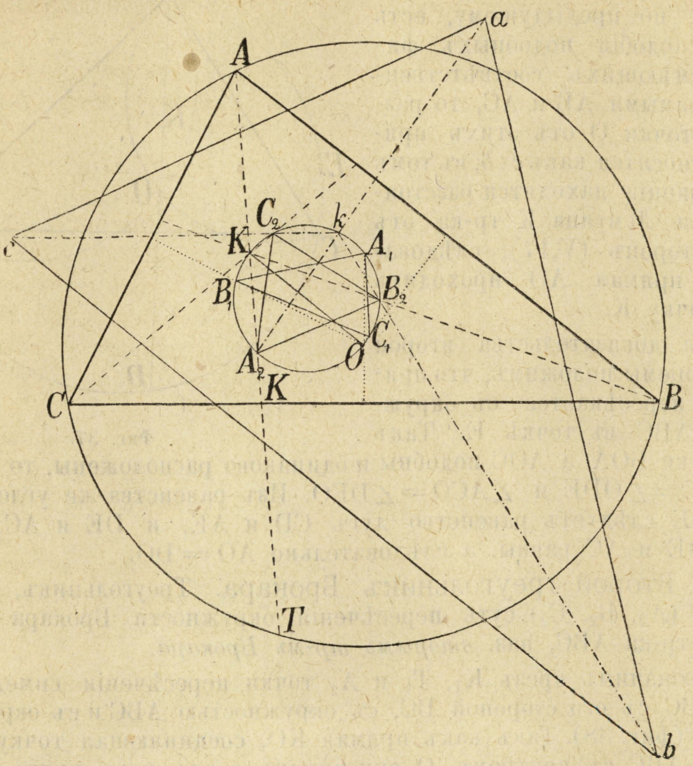
Не трудно убѣдиться также, что

$$A_2B \,.\, A_2C = \overline{A_2A}^2, \quad \frac{A_2B}{A_2C} = \frac{c^2}{b^2},$$

гдѣ b и c суть стороны AC и AB тр-ка ABC.

23. Теорема. *Вершины второго тр-ка Брокара* $A_2B_2C_2$ *суть центры подобія подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ, построенныхъ на сторонахъ тр-ка* ABC.

Обозначимъ чрезъ F_a, F_b, F_c подобныя и одинаково расположенныя фигуры, соотвѣтственныя стороны которыхъ суть BC, CA, AB. Точка A_2, по доказанному, есть пересѣченіе смежныхъ сопряженныхъ окружностей $(C,\overline{A})$ и $(B,\overline{A})$; слѣдовательно, A_2 есть центръ подобія фигуръ F_b и F_c (20). По аналогіи, точки B_2 и C_2 суть центры подобія фигуръ F_c и F_a, F_a и F_b.



Фиг. 38.

Слѣдствіе. *Второй тр-къ Брокара и окружность Брокара служатъ треугольникомъ и окружностью подобія для подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ, построенныхъ на сторонахъ главнаго тр-ка* ABC. (III,18).

24. Теорема. *Симедіаны тр-ка, составленнаго соотвѣтственными прямыми подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ, построенныхъ на сторонахъ тр-ка* ABC, *проходятъ чрезъ вершины второго тр-ка Брокара* ($A_2B_2C_2$).

Положимъ, что соотвѣтственныя прямыя фигуръ F_a, F_b, F_c образуютъ тр-къ abc (фиг. 38). Такъ какъ точка A_2 есть центръ подобія фигуръ F_c и F_b, соотвѣтственныя прямыя которыхъ суть ba и ac, BA и AC, то $\angle A_2ac = \angle A_2AC$ и $\angle A_2ab = \angle A_2AB$; слѣдовательно прямая A_2a есть симедіана тр-ка abc. По аналогіи заключаемъ, что B_2b и C_2c суть также симедіаны тр-ка abc. Теорема такимъ образомъ доказана.

25. Теорема. *Точка Лемуана* k *тр-ка* abc, *составленнаго соотвѣтственными прямыми подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ, построенныхъ на сторонахъ главнаго тр-ка* ABC, *находится на окружности Брокара этого тр-ка*.

Тр-ки $A_2B_2C_2$ и abc перспективны и центръ перспективы ихъ находится на окружности подобія фигуръ F_a, F_b, F_c (III,19), т. е. на окружности Брокара тр-ка ABC (23). По предыдущей-же теоремѣ центромъ перспективы тр-въ $A_2B_2C_2$ и *abc* служитъ точка Лемуана k тр-ка *abc*; слѣдовательно точка k находится на окружности Брокара тр-ка ABC. (Фиг. 38).

26. Теорема. *Вершины перваго тр-ка Брокара* ($A_1B_1C_1$) *суть неизмѣнныя точки подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ, построенныхъ на сторонахъ главнаго тр-ка* (ABC).

Такъ какъ тр-ки ABC и *abc* подобны и $\angle KA_1k = \angle KA_2k$, то $\angle KA_1k$ = углу, составленному прямыми BC и *bc* (III,2,*c*): но $A_1K \parallel BC$; слѣдовательно, $A_1k \parallel bc$. Точно также и $B_1k \parallel ab$. Поэтому A_1k, B_1k, C_1k суть соотвѣтственныя прямыя фигуръ F_a, F_b, F_c и A_1, B_1, C_1 суть соотвѣтственныя точки этихъ фигуръ, (III,20,21). (фиг. 38).

Слѣдствіе. *Центръ подобія тр-ка* ABC *и тр-ка* abc, *составленнаго соотвѣтственными прямыми подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ, построенныхъ на сторонахъ перваго тр-ка* (ABC), *находится на окружности Брокара этого тр-ка.*

Ибо соотвѣтственныя прямыя *ka* и KA подобныхъ фигуръ *kabc* и KABC перрсѣкаются въ точкѣ A_2, а потому центръ подобія этихъ фигуръ находится въ пересѣченіи окружности A_2aA съ окружностью Брокара A_2Kk. (III,5).

27. Теорема Брокара. *Если три соотвѣтственныя прямыя подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ, построенныхъ на сторонахъ тр-ка* ABC, *пересѣкаются въ одной точкѣ, то эта точка находится на окружности Брокара этого тр-ка.*

Теорема эта есть частный случай ранѣе доказанной теоремы относительно трехъ подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ. (III,20).

28. Теорема. *Треугольники Брокара* ($A_1B_1C_1$ *и* $A_2B_2C_2$) *перспективны; центромъ и осью перспективы ихъ служатъ центръ тяжести* G *главнаго треугольника* (ABC) *и поляра этой точки относительно круга Брокара.*

Тр-ки $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ перспективны, потому что $A_2B_2C_2$ есть тр-къ подобія (23) подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ F_a, F_b, F_c, а A_1, B_1, C_1 суть неизмѣнныя точки этихъ фигуръ (III,22).

Такъ какъ B_1, C_1 суть соотвѣтственныя точки фигуръ F_b, F_c (III,21), то уголъ между прямыми A_2B_1 и A_2C_1 равенъ углу между соотвѣтственными прямыми CA и AB, т. е. углу $\pi - A$, и (5)

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{CA}{AB} = \frac{C_1A_1}{A_1B_1},$$

отсюда $A_2B_1 . A_1B_1 = A_1C_1 . A_2C_1$; слѣдовательно, тр-ки $A_1A_2B_1$ и $A_1A_2B_2$ равновелики и прямая A_1A_2 дѣлитъ пополамъ B_1C_1, т. е. проходитъ чрезъ общій центръ тяжести G тр-въ $A_1B_1C_1$ и ABC (7). То же справедливо и для прямыхъ B_1B_2 и C_1C_2; а отсюда слѣдуетъ, что A_1B_1 и A_2B_2 пересѣкаются на полярѣ точки G относительно круга Брокара (III,13).

29. Приложенія. Радикальная ось окружности, описанной около тр-ка ABC и окружности Брокара есть трилинейная поляра точки Лемуана K тр-ка ABC (III,13 и IV,7).

30. Окружность Брокара и трилинейная поляра точки Лемуана K относительно тр-ка ABC суть обратныя фигуры относительно окружности ABC.

31. Если H_1, H_2, H_3, суть основанія высотъ тр-ка ABC, то треугольники AH_2H_3, H_1BH_3, H_1H_2 C обратно подобны тр-ку ABC.

Три соотвѣтственныя прямыя этихъ тр-въ образуютъ тр-къ $\alpha\beta\gamma$, перспективный съ тр-мъ $H_1H_2H_3$; центръ перспективы N этихъ тр-въ находится на окружности девяти точекъ тр-ка ABC и совпадаетъ съ центромъ круга $\alpha\beta\gamma$.

Разстоянія точки N отъ сторонъ тр-ка $\alpha\beta\gamma$ пропорціональны cosA, cosB, cosC.

32. Если H_1', H_2', H_3' суть средины высотъ AH_1, AH_2, AH_3 тр-ка ABC, то прямыя, соединяющія эти точки съ центрами круговъ, вписанныхъ въ тр-ки AH_2H_3, H_1BH_3, H_1H_2C, проходятъ чрезъ точки касанія круга, вписаннаго въ тр-къ ABC, съ кругомъ девяти точекъ этого тр-ка.

33. Если ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 суть радіусы трехъ сопряженныхъ окружностей одной группы ($A\Omega B$, $B\Omega C$, $C\Omega A$) и R радіусъ круга, описаннаго около главнаго тр-ка (ABC), то

$$\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = R^3 \text{ (\textit{Tucker})}.$$

34. Треугольникъ, вершины котораго суть центры трехъ сопряженныхъ окружностей одной группы, имѣетъ точкой Брокара центръ круга, описаннаго около главнаго тр-ка (ABC). (*Dewulf*).

35. Прямая Симсона точки Тарри перпендикулярна къ прямой, соединяющей центръ круга описаннаго около главнаго тр-ка (ABC) съ его точкой Лемуана (K).

36. Прямая, соединяющая точки Брокара (Ω,Ω') тр-ка (ABC), перпендикулярна къ прямой, проходящей чрезъ центръ круга O, описаннаго около этого тр-ка, и чрезъ его точку Лемуана (K).

Д. Е.

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРІЯ ЭЛЛИПСА.

(Отвѣтъ на тему, предложенную профессоромъ Ермаковымъ въ № 110 „Вѣстника").

(*Продолженіе**).

47. При доказательствѣ одного изъ свойствъ касательныхъ намъ придется пользоваться нѣкоторыми опредѣленіями и теоремами, относящимися къ свойствамъ ломаныхъ. Эти опредѣленія и теоремы (приводимыя здѣсь безъ доказательства) суть слѣдующія:

*) См. „Вѣстника Оп. Физики" №№ 239, 240, 242, 243, 244 и 245.

a) Совокупность отрѣзковъ, послѣдовательно соединяющихъ нѣсколько точекъ, которыя лежатъ въ одной плоскости, но не расположены всѣ на одной прямой, назовемъ плоской ломаной. Это опредѣленіе не исключаетъ возможности такого случая, когда три и болѣе изъ послѣдовательно соединяемыхъ отрѣзками точекъ лежатъ на одной прямой.

Послѣдовательно соединяемыя отрѣзками точки называются вершинами, а самые отрѣзки — сторонами ломаной. Если послѣдняя изъ соединяемыхъ послѣдовательно точекъ совпадаетъ съ первой, то ломаная называется замкнутой.

Ломаная, которая лежитъ вся по одну сторону каждой изъ прямыхъ, соединяющихъ двѣ ея послѣдовательныя вершины, называется выпуклой. Таковы, напримѣръ, ломаныя, ограничивающія треугольникъ, параллелограммъ и трапецію.

Если нѣкоторыя изъ сторонъ выпуклой ломаной подраздѣлимъ новыми вершинами, взятыми на этихъ сторонахъ, на части, то вновь полученная ломаная будетъ также выпукла.

b) Внутреннимъ угломъ выпуклой ломаной называется уголъ, образованный двумя ея послѣдовательными сторонами; причемъ, если эти стороны лежатъ на одной прямой, то внутреннимъ считается развернутый уголъ, лежащій по ту же сторону прямой, на которой лежатъ двѣ послѣдовательныхъ стороны ломаной, какъ и вся ломаная; если же двѣ послѣдовательныя стороны не лежатъ на одной прямой, то внутреннимъ угломъ ломаной считается уголъ, меньшій 180^0.

Если точка лежитъ внутри каждаго изъ внутреннихъ угловъ замкнутой выпуклой ломаной, то говорятъ, что точка лежитъ внутри замкнутой выпуклой ломаной.

Чтобы точка лежала внутри выпуклой замкнутой ломаной, необходимо и достаточно, чтобы она лежала внутри каждаго изъ внутреннихъ угловъ, отличныхъ отъ 180^0.

c) Подъ угломъ, стягиваемымъ отрѣзкомъ AB въ нѣкоторой точкѣ O, лежащей внѣ прямой AB, подразумѣваютъ внутренній уголъ AOB треугольника AOB.

d) Относительно всякой выпуклой замкнутой ломаной справедливы слѣдующія предложенія:

I. Сумма угловъ, стягиваемыхъ сторонами выпуклой замкнутой ломаной въ точкѣ, лежащей внутри этой ломаной, равна четыремъ прямымъ.

II. Сумма угловъ, стягиваемыхъ въ вершинѣ выпуклой замкнутой ломаной всѣми ея сторонами, кромѣ двухъ ея сторонъ, сходящихся въ этой вершинѣ, равна внутреннему углу, заключенному между этими двумя сторонами.

e) Пусть двѣ выпуклыя замкнутыя ломаныя имѣютъ нѣсколько общихъ сторонъ. Тогда суммы угловъ, стягиваемыхъ остальными, необщими сторонами обѣихъ ломаныхъ въ нѣкоторой точкѣ M, лежащей одновременно внутри обѣихъ ломаныхъ, равны между собою.

Дѣйствительно, обозначивъ сумму угловъ, стягиваемыхъ въ точкѣ M общими сторонами обѣихъ ломаныхъ, черезъ s, сумму угловъ, стягиваемыхъ остальными сторонами первой ломаной, — черезъ σ, а сумму угловъ, стягиваемыхъ остальными сторонами второй ломаной — черезъ σ', имѣемъ (см. d, I):

$$s + \sigma = 4d,\quad s + \sigma' = 4d,$$

а потому

$$\sigma = \sigma'.$$

f) Выпуклая ломаная можетъ пересѣкаться съ прямою, не проходящей черезъ двѣ ея послѣдовательныя вершины, не болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ.

Прямая, пересѣкающая выпуклую замкнутую ломаную въ двухъ точкахъ a и b, раздѣляетъ ее въ этихъ точкахъ на двѣ незамкнутыя выпуклыя ломаныя.

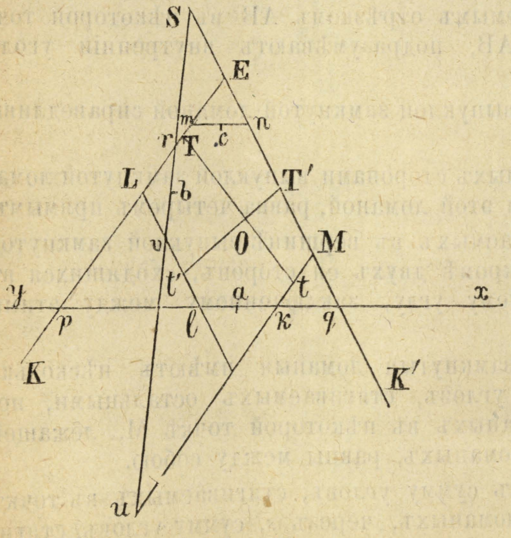
Каждая изъ этихъ двухъ незамкнутыхъ ломаныхъ вмѣстѣ съ отрѣзкомъ ab образуетъ новую выпуклую замкнутую ломаную, каждую изъ этихъ замкнутыхъ ломаныхъ по отношенію къ первоначальной замкнутой ломаной мы условимся называть отсѣченной.

При этомъ справедливо слѣдующее предложеніе: точка, лежащая внутри выпуклой замкнутой ломаной и находящаяся внѣ отрѣзка ab, лежитъ внутри одной изъ двухъ отсѣченныхъ ломаныхъ.

g) Если внутри одной изъ отсѣченныхъ ломаныхъ возьмемъ нѣкоторую точку c и въ другой отсѣченой ломаной замѣнимъ отрѣзокъ ab ломаной acb, то вновь полученная замкнутая ломаная будетъ выпукла.

48. **Лемма**. Пусть нѣсколько прямыхъ, касающихся эллипса, образуютъ, взаимно пересѣкаясь, выпуклую замкнутую ломаную; если точки прикосновенія всѣхъ касательныхъ, образующихъ ломаную, лежатъ на сторонахъ ея, то фокусы эллипса лежатъ внутри этой выпуклой замкнутой ломаной.

Дѣйствительно, пусть AB и BC будутъ двѣ послѣдовательныя стороны ломаной, образующія внутренній уголъ, меньшій 180°; такіе углы непремѣнно окажутся, такъ какъ (§ 47,a) всѣ вершины ломаной не могутъ лежать на одной прямой.



Фиг. 39.

Точка прикосновенія касательной AB лежитъ, по предположенію, внутри отрѣзка AB; обозначимъ эту точку черезъ τ; точно также точка прикосновенія τ' касательной BC лежитъ внутри отрѣзка BC. Каждый изъ фокусовъ, находясь внутри (§ 5) эллипса, лежитъ въ то же время (§ 36, сл.) внутри угла $\tau B \tau'$.

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что оба фокуса лежатъ внутри каждаго изъ внутреннихъ угловъ ломаной, меньшихъ 180^0, а потому лежатъ внутри всѣхъ ея внутреннихъ угловъ, т. е. (§ 47,b) — внутри самой ломаной.

49. Пусть черезъ центръ эллипса O проходятъ двѣ различныя хорды Tt и $T't'$ (черт. 39). Проведемъ въ точкахъ эллипса T, T', t и t' касательныя. По теоремѣ 44-й касательныя въ точкахъ T и T' параллельны соотвѣтственно касательнымъ въ точкахъ t и t', а потому пары касательныхъ въ точкахъ эллипса T и T', T' и t, t' и t, t' и T пересѣкутся соотвѣтственно въ нѣкоторыхъ точкахъ (§ 40, сл.) E, M, e, L. Докажемъ справедливость слѣдующихъ положеній:

1) Точки T, T', t и t' лежатъ соотвѣтственно внутри отрѣзковъ EL, ME, eM, Le.

2) Касательная, проведенная къ эллипсу въ нѣкоторой точкѣ его a, лежащей внутри угла tOt', пересѣкаетъ отрѣзки te и $t'e$ въ нѣкоторыхъ точкахъ k и l, а также встрѣчаетъ въ нѣкоторыхъ точкахъ p и q лучи LK и MK', служащіе продолженіями отрѣзковъ EL и EM.

3) При этомъ точка a лежитъ внутри отрѣзковъ lk и pq; точки же l и k лежатъ на отрѣзкѣ pq.

Докажемъ первое изъ этихъ положеній:

Предположимъ, что точка T, напримѣръ, лежитъ внѣ отрѣзка EL; тогда либо точка L лежитъ на отрѣзкѣ ET, либо точка E лежитъ на отрѣзкѣ LT, либо, наконецъ, точка T совпадаетъ съ одной изъ точекъ L или E.

Остановимся раньше на первомъ допущеніи, а именно—что точка L лежитъ на отрѣзкѣ ET. Такъ какъ точки E и O лежатъ по разныя стороны (§ 46) прямой TT', то и всякія двѣ точки, изъ которыхъ одна находится на лучѣ TE, а другая — на лучѣ $T'O$, лежатъ по разныя стороны этой прямой; поэтому и точки L и t' лежатъ по разныя стороны прямой TT', откуда вытекаетъ, что отрѣзокъ $t'L$ встрѣчаетъ прямую TT'. Точка t' какъ точка эллипса (§ 35), лежитъ внутри угла TET', а точка L — на сторонѣ ET этого угла; слѣдовательно и весь отрѣзокъ Lt' лежитъ внутри угла TET'. Отсюда слѣдуетъ, что точка встрѣчи отрѣзка $t'L$ и прямой TT' не можетъ лежать на продолженіи отрѣзка TT'; другими словами, отрѣзокъ $t'L$ пересѣкаетъ отрѣзокъ TT'. Итакъ касательная $t'L$ проходитъ черезъ нѣкоторую промежуточную точку хорды TT', что (§ 9; § 24, сл. 3) невозможно.

Подобнымъ же образомъ можно доказать, что точка E не можетъ лежать на отрѣзкѣ LT.

Кромѣ того, ни одна изъ точекъ L и E не можетъ совпадать съ точкой T, такъ какъ тогда черезъ эту точку эллипса проходили бы двѣ касательныя, что также (§ 34) невозможно.

Изъ всего вышесказаннаго слѣдуетъ, что точка T лежитъ внутри отрѣзка LE. Такимъ же образомъ можно убѣдиться, что точки T', t и t' лежатъ соотвѣтственно внутри отрѣзковъ ME, eM, Le.

Обратимся теперь ко второму предложенію.

Точка эллипса a, лежа внутри угла (§ 35) tOt', лежитъ (§ 46, сл. 2) внутри треугольника tet'. Касательная къ эллипсу въ точкѣ a не можетъ пройти ни черезъ одну изъ вершинъ этого треугольника. Дѣйствительно, если бы она прошла черезъ вершину e, то изъ одной точки e проходили бы три касательныя къ эллипсу — et, et' и ea, что (§ 34) невозможно; если бы она прошла черезъ одну изъ вершинъ t или t', то черезъ одну изъ этихъ точекъ эллипса можно было бы провести двѣ касательныхъ къ эллипсу, что также невозможно.

Не проходя ни черезъ одну изъ вершинъ треугольника tet', касательная къ эллипсу въ точкѣ a должна пересѣчь какакія-нибудь двѣ изъ сторонъ его, такъ какъ точка a лежитъ внутри этого треугольника.

Но стороны tt' касательная къ эллипсу въ точкѣ a встрѣтить не можетъ, такъ какъ, встрѣтивъ ее, она прошла бы черезъ нѣкоторую точку хорды TT', лежащую внутри (§ 9) эллипса, а это (§ 24, сл. 3) невозможно. Поэтому касательная къ эллипсу въ точкѣ a встрѣчаетъ стороны te и $t'e$ треугольника tet' въ нѣкоторыхъ точкахъ k и l.

Сумма угловъ kle и lek треугольника kel менѣе двухъ прямыхъ; замѣняя углы kle и lek соотвѣтственно равными имъ углами ylL и KLe найдемъ, что сумма угловъ ylL и KLe также меньше двухъ прямыхъ, откуда слѣдуетъ, что лучи ly и LK встрѣчаются въ нѣкоторой точкѣ p. Но лучъ ly есть часть касательной къ эллипсу въ точкѣ a, а лучъ LK—продолженіе отрѣзка EL. Подобнымъ же образомъ, разсматривая лучи MK' и kx, служащіе соотвѣтственно продолженіями отрѣзковъ EM и lk, можно доказать, что касательная къ эллипсу въ точкѣ a встрѣчаетъ лучъ MK' въ нѣкоторой точкѣ q. Обратимся къ третьему предложенію этого параграфа.

Точка a, лежащая на прямой kl не можетъ лежать на продолженіи отрѣзка kl, а также не можетъ совпадать съ однимъ изъ концовъ этого отрѣзка, такъ какъ она лежитъ внутри угла tet' (§ 35). Отсюда слѣдуетъ, что точка a лежитъ внутри отрѣзка kl. Такъ какъ точки p и q лежатъ на двухъ лучахъ, составляющихъ продолженія отрѣзка kl въ разныя стороны, то точка a лежитъ также внутри отрѣзка pq; по той же причинѣ точки k и l лежатъ на отрѣзкѣ pq.

50. **Теорема.** Пусть KT и K'T'—(черт. 39) двѣ касательныхъ къ эллипсу, точки прикосновенія которыхъ суть соотвѣтственно T и T'; пусть t и t'—двѣ точки эллипса, соотвѣтственно симметричныя съ точками T и T' относительно центра эллипса O.

Отрѣзокъ нѣкоторой перемѣнной касательной между касательными KT и K'T' стягиваетъ въ одномъ изъ фокусовъ F уголъ, остающійся постояннымъ, пока точка прикосновенія перемѣнной касательной остается все время либо внутри угла tOt', либо внѣ его *).

Разсмотримъ раньше тотъ случай, когда касательныя KT и K'T' пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ E. Въ этомъ случаѣ хорда TT' не проходитъ черезъ центръ (§ 45), а потому хорды Tt и T't' суть двѣ различныя хорды. Проведемъ къ эллипсу касательныя въ точкахъ T, T', t и t'; пересѣкаясь въ точкахъ E, M, e, L, касательныя эти образуютъ (см. § 49) параллелограммъ EMeL.

*) Если точка прикосновенія перемѣнной касательной лежитъ на сторонахъ угла tot', т. е. совпадаетъ съ одной изъ точекъ T, T', t, t', то она вовсе не опредѣляетъ отрѣзка между касательными KT и K'T'.

При доказательствѣ этой части теоремы мы будемъ различать три случая, смотря по тому, будетъ-ли фокусъ F — лежащій вообще внутри (§ 36, сл.) угла TET′—лежать внутри треугольника TET′, внѣ его, или же на сторонѣ его TT′. Разберемъ сначала первый изъ этихъ случаевъ. Итакъ, пусть фокусъ F лежитъ внутри треугольника TET′. Назовемъ точку прикосновенія перемѣнной касательной черезъ a и предположимъ раньше, что точка эта остается внутри угла tOt'. Касательная къ эллипсу въ точкѣ a встрѣчаетъ (§ 49,2) лучи LK и MK′, представляющіе собою продолженія отрѣзковъ EL и EM, опредѣляя такимъ образомъ нѣкоторый отрѣзокъ pq между касательными ET и ET′. Ломаная Epq, какъ треугольникъ (§ 47,a), выпукла; замкнутыя ломаныя ETT′ и pTT′q также выпуклы, какъ отсѣченныя (§ 49,1; § 47,f) отъ треугольника Epq; такъ какъ фокусъ F, по предположенію, лежитъ внутри треугольника TET′, то и ломаная pTFT′q (§ 47,g) также выпукла.

Поэтому (§ 47,d,II)

$$\angle TFT' = \angle TFp + \angle pFq + \angle pFT' \qquad (13).$$

Но (§ 38)

$$\angle TFp = \angle pFa \text{ и } \angle T'Fq = \angle qFa, \qquad (14).$$

а потому

$$\angle TFT' = \angle pFq + (\angle pFa + \angle qFa) \qquad (15)$$

Такъ какъ точка a лежитъ внутри отрѣзка pq (§ 49,3), то

$$\angle pFa + \angle qFa = \angle pFq. \qquad (16).$$

Преобразовывая ур-іе (15) на основаніи ур. (16), получимъ

$$\angle TFT' = 2 \angle pFq,$$

откуда

$$\angle pFq = \frac{\angle TFT'}{2} \qquad (17).$$

Изъ этого равенства мы видимъ, что отрѣзокъ pq перемѣнной касательной между двумя постоянными касательными KT и K′T′ стягиваетъ въ фокусѣ F постоянный уголъ pFq, пока точка прикосновенія перемѣнной касательной остается внутри угла tot'. Этотъ постоянный уголъ равенъ половинѣ угла TFT′.

Пусть теперь точка прикосновенія перемѣнной касательной находится внѣ угла tOt', т. е. лежитъ въ одномъ изъ трехъ угловъ t'OT, ToT′ или T′ot.

Такъ какъ случаи, когда точка эта лежитъ внутри угловъ $t'o$T и T′ot аналогичны, то достаточно разобрать одинъ изъ этихъ случаевъ.

Пусть, напримѣръ точка прикосновенія перемѣнной касательной лежитъ внутри угла t'OT; обозначимъ эту точку черезъ b. Тогда, примѣняя къ углу t'OT то, что сказано въ § 49 относительно угла tot', мы найдемъ, что касательная къ эллипсу въ точкѣ b встрѣтитъ отрѣзки LT и LT′ въ нѣкоторыхъ точкахъ r и v, а также части лучей ME и Me, служащія соотвѣтственно продолженіемъ отрѣзковъ ME и Me,—въ нѣкоторыхъ точкахъ s и u; отрѣзокъ rs и есть въ этомъ случаѣ отрѣзокъ перемѣнной касательной между постоянными касательными KT и KT′.

Ломаная suM, какъ треугольникъ, выпукла. Ломаныя sveM и vrEMe, какъ отсѣченныя *) соотвѣтственно (§ 47,f) отъ треугольника suM и параллелограмма LEMe, также выпуклы.

Отсюда слѣдуетъ, что ломаныя vrsT′Me и vrTET′Me (§ 47,a) тоже выпуклы. Замѣчая, что ломаныя vrsT′Me и vrTET′Me имѣютъ общія стороны rv, ve, eM и MT′ и что фокусъ F лежитъ внутри (§ 48) этихъ обѣихъ ломаныхъ, находимъ (§ 47,e):

$$\angle rFs + \angle sFT' = \angle rFT + \angle TFE + \angle EFT' \qquad (18),$$

откуда

$$\angle rFs + \angle sFT' - \angle rFT = \angle TFE + \angle EFT'.$$

Но (§ 38)

$$\angle rFT' = \angle rFb,$$

$$\angle sFT' = \angle sFb,$$

а потому

$$\angle rFs + (\angle sFb - \angle rFb) = \angle TFE + \angle EFT'.$$

Такъ какъ точка s лежитъ на продолженіи отрѣзка br, то

$$\angle sFb - \angle rFb = \angle rFs$$

поэтому

$$2\angle rFs = \angle TFE + \angle FFT' \qquad (19).$$

Но изъ треугольника TET′ находимъ (§ 47, d, I):

$$\angle TFE + \angle EFT' + \angle TFT' = 4d,$$

откуда

$$\angle TFE + \angle EFT' = 4d - \angle TFT'.$$

Изъ этого уравненія въ связи съ уравненіемъ (19) вытекаетъ, что

$$2\angle rFs = 4d - \angle TFT',$$

откуда

$$\angle rFs = 2d - \angle \frac{TFT'}{2} \qquad (20).$$

Пусть теперь точка прикосновенія перемѣнной касательной находится внутри угла TOT′; назовемъ ее въ этомъ случаѣ черезъ c. Перемѣнная касательная, (§ 49,2) пересѣкаясь съ касательными ET и ET′ въ нѣкоторыхъ точкахъ m и n, лежащихъ на отрѣзкахъ ET и ET′ опредѣлитъ отрѣзокъ mn.

Ломаная TmnT′, какъ отсѣченная отъ треугольника TET′, выпукла. Фокусъ F лежитъ (§ 36, сл.) внутри угловъ Tmn и mnT′; лежа

*) Здѣсь надо принять во вниманіе, что точка r лежитъ внутри каждаго изъ отрѣзковъ LE и su, а точка v — внутри каждаго изъ отрѣзковъ Le и su, что вытекаетъ изъ положеній, доказанныхъ въ § 49.

внутри треугольника TET', онъ находится также внутри его угловъ nT'T и T'Tm. Поэтому фокусъ F лежитъ внутри всей ломаной TmnT', а потому (§ 47, d, I):

$$\angle \mathrm{TF}m + \angle m\mathrm{F}n + \angle n\mathrm{FT'} + \angle \mathrm{TFT'} = 4d,$$

откуда

$$\angle \mathrm{TF}m + \angle m\mathrm{F}n + \angle n\mathrm{FT'} = 4d - \angle \mathrm{TFT'},$$

или

$$\angle m\mathrm{F}n + (\angle \mathrm{TF}m + \angle n\mathrm{FT'}) = 4d - \angle \mathrm{TFT'}.$$

Но (§ 38)

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{TF}m &= \angle m\mathrm{F}c, \\ \angle n\mathrm{FT'} &= \angle n\mathrm{F}c. \end{aligned} \tag{21}$$

Такъ какъ точка c лежитъ внутри отрѣзка mn, то

$$\angle m\mathrm{F}c + \angle n\mathrm{F}c = \angle m\mathrm{F}n. \tag{22}$$

Поэтому

$$2 \angle m\mathrm{F}n = 4d - \mathrm{TFT'},$$

откуда

$$\angle m\mathrm{F}n = 2d - \angle \frac{\mathrm{TFT'}}{2} \tag{23}$$

Итакъ, когда точка прикосновенія перемѣнной касательной лежитъ внѣ угла tOt', то (см. ур. 20,23) отрѣзокъ перемѣнной касательной между двумя постоянными пересѣкающимися касательными KT и K'T' стягиваетъ въ фокусѣ постоянный уголъ, равный

$$2d - \angle \frac{\mathrm{TFT'}}{2}.$$

До сихъ поръ, мы предполагали, что фокусъ F лежитъ внутри треугольника TET'.

Предположимъ теперь, что фокусъ F лежитъ внѣ этого треугольника.

Находясь внутри (§ 48) ломаной Epq и, въ то же время, лежа внѣ треугольника TET', отсѣченнаго отъ ломаной Epq, фокусъ F лежитъ внутри ломаной (§ 47,f) TpqT', а потому:

$$\angle p\mathrm{F}q + \angle q\mathrm{FT'} + \angle \mathrm{TFT'} + \angle \mathrm{TF}p = 4d,$$

откуда

$$\angle p\mathrm{F}q + \angle q\mathrm{FT'} + \angle \mathrm{TF}p = 4d - \angle \mathrm{TFT'},$$

или, вслѣдствіе равенствъ (14) и (16),

$$2 \angle p\mathrm{F}q = 4d - \angle \mathrm{TFT'},$$

откуда

$$\angle p\mathrm{F}q = 2d - \angle \frac{\mathrm{TFT'}}{2} \tag{24}.$$

Такъ какъ ломаная TFT'mn выпукла (§ 47, g), то (§ 47, d, II).

$$\angle \mathrm{TFT'} = \angle \mathrm{TF}m + \angle m\mathrm{F}n + \angle n\mathrm{FT'}. \tag{25}$$

Изъ этого равенства на основаніи уравненій (21) и (22) выводимъ

$$\angle \mathrm{TFT'} = 2 \angle m\mathrm{F}n,$$

откуда

$$\angle m\mathrm{F}n = \angle \frac{\mathrm{TFT'}}{2} \qquad (26)$$

Наконецъ, такъ какъ фокусъ F лежитъ (§ 48) непремѣнно внутри обѣихъ ломаныхъ $vrs\mathrm{T'M}e$ и $vr\mathrm{TET'M}e$, то и въ томъ случаѣ, когда фокусъ лежитъ внѣ треугольника TET', мы можемъ также точно написать уравненіе (18) и привести его къ виду (19).

Затѣмъ, замѣчая, что ломаная TFT'E (§ 47,g) выпукла, находимъ (§ 47, d, II):

$$\angle \mathrm{TFT'} = \angle \mathrm{TFE} + \angle \mathrm{FFT'}.$$

Поэтому уравненіе (19) даетъ въ этомъ случаѣ:

$$2 \angle r\mathrm{F}s = \angle \mathrm{TFT'},$$

откуда

$$\angle r\mathrm{F}s = \angle \frac{\mathrm{TFT'}}{2} \qquad (27)$$

Равенства (24), (26) и (27) доказываютъ справедливость теоремы въ томъ случаѣ, когда фокусъ F лежитъ внѣ треугольника TET'.

Наконецъ, если фокусъ F лежитъ на хордѣ TT', то, пользуясь выпуклой ломаной $p\mathrm{TFT'}q$, мы можемъ вывести послѣдовательно уравненія (13), (14), (15), (16), (17). Такъ какъ уголъ TFT' (§ 47,b) равенъ въ этомъ случаѣ $2d$, то уравненіе (17) даетъ

$$\angle p\mathrm{F}q = d \qquad (28).$$

Точно также, пользуясь уравненіемъ (19), которое, какъ мы уже указали, не зависитъ отъ положенія фокуса по отношенію къ треугольнику TET', и замѣняя сумму смежныхъ*) угловъ TFE и EFT' черезъ $2d$, получимъ

$$2 \angle r\mathrm{F}s = 2d,$$

откуда

$$\angle r\mathrm{F}s = d \qquad (29).$$

Наконецъ, выпуклая ломаная $\mathrm{TFT'}nm$ даетъ уравненіе (25), которое преобразуется къ уравненію (26); это же уравненіе даетъ

$$\angle m\mathrm{F}n = d, \qquad (30)$$

такъ какъ уголъ $\mathrm{TFT'} = 2d$.

Формулы (28), (29), (30) показываютъ, что въ случаѣ, когда фокусъ лежитъ на хордѣ TT', отрѣзокъ всякой перемѣнной касательной, пересѣкающей двѣ постоянныя касательныя KT и K'T', между этими двумя постоянными касательными стягиваетъ въ фокусѣ прямой уголъ.

*) Эти углы дѣйствительно смежны, такъ какъ точка F, лежа, по предположенію, на прямой TT' и находясь (§ 36, сл.) внутри угла TET', лежитъ на отрѣзкѣ TT'.

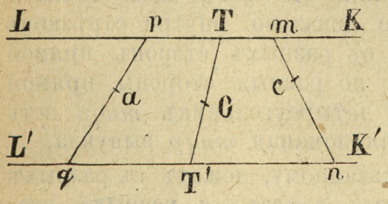
§ 51. До сихъ поръ, при доказательствѣ теоремы § 50, мы предполагали, что касательныя KT и K'T' пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ E. Предположимъ теперь, что касательныя KT и K'T' параллельны. Въ этомъ случаѣ хорда TT', соединяющая точки прикосновенія этихъ касательныхъ, проходитъ (§ 45) черезъ центръ эллипса O, а потому точки t и T', равно какъ и точки t' и T, попарно совпадаютъ.

Углы TOt' и T'Ot обращаются въ нуль, а углы tOt' и TOT' являются въ этомъ случаѣ развернутыми углами, лежащими по разныя стороны прямой TT'. Самый текстъ теоремы (§ 50) можетъ быть въ этомъ случаѣ выраженъ проще, а именно:

Пусть KL *и* K'L' — *двѣ параллельныя касательныя къ эллипсу, точки прикосновенія которыхъ обозначимъ соотвѣтственно черезъ* T *и* T'. *Отрѣзокъ перемѣнной касательной между касательными* KL *и* K'L' *стягиваетъ въ одномъ изъ фокусовъ* F *уголъ, который остается постояннымъ, пока точка прикосновенія перемѣнной касательной остается по одну сторону прямой* TT'.

Вообразимъ себѣ двѣ какія-нибудь точки эллипса a и c, лежащія по разныя стороны прямой TT'*). Проведемъ касательныя къ эллипсу въ этихъ двухъ точкахъ. Каждая изъ этихъ касательныхъ встрѣтитъ касательныя LK и L'K' (§ 40, сл.).

Пусть касательная къ эллипсу въ точкѣ a встрѣчаетъ касательныя LK и L'K' въ точкахъ p и q (черт. 40), а касательная въ точкѣ c встрѣчаетъ тѣ же параллельныя касательныя въ точкахъ m и n. Точка эллипса a не можетъ совпадать съ точкой p; дѣйствительно, если бы точки a и p совпадали, то касательная LK встрѣчала бы эллипсъ въ двухъ различныхъ точкахъ T и a, что невозможно. Точно также убѣдимся, что точка a не можетъ совпадать съ точкой q. Точка a не можетъ также лежать и на продолженіи отрѣзка pq; въ самомъ дѣлѣ, если бы точка a лежала на продолженіи отрѣзка pq въ сторону луча pq, то точки эллипса a и T лежали бы по разныя стороны касательной L'K', что невозможно (§ 24, сл. 4). Точно также докажемъ, что точка a не можетъ лежать на продолженіи отрѣзка pq въ сторону луча qp.



Фиг. 40.

Не лежа на продолженіи отрѣзка pq въ ту или другую сторону и не совпадая ни съ однимъ изъ концовъ этого отрѣзка, точка a лежитъ внутри отрѣзка pq. Подобнымъ же образомъ можно доказать, что точка c лежитъ внутри отрѣзка mn.

Точка p не можетъ совпадать съ точкою T; дѣйствительно, если бы точки p и T совпадали, то касательная къ эллипсу въ точкѣ a про-

*) Точки эллипса, лежащія по обѣ стороны прямой TT', несомнѣнно существуютъ; чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно разсмотрѣть два луча, проходящихъ черезъ центръ эллипса O, лежащій посрединѣ отрѣзка TT' (§ 14), и расположенныхъ по разныя стороны прямой TT'. Лучи эти встрѣтятъ эллипсъ въ двухъ точкахъ (§ 12, сл. 1), лежащихъ по разныя стороны TT'.

ходила бы черезъ двѣ точки эллипса — a и T, что невозможно; точно также точка q не можетъ совпадать съ точкой T'.

Покажемъ теперь, что точки p и q не могутъ лежать по разныя стороны прямой TT'. Дѣйствительно, предположимъ, что точки p и q лежатъ по разныя стороны прямой TT'. Изъ этого предположенія вытекаетъ, что отрѣзокъ pq встрѣчаетъ прямую TT' въ нѣкоторой точкѣ x. Эта точка x не можетъ совпадать съ одной изъ точекъ T или T', такъ какъ тогда касательная pq совпала бы съ одной изъ касательныхъ KL или K'L', что невозможно, такъ какъ, по предположенію, точка a не совпадаетъ ни съ одной изъ двухъ точекъ прикосновенія касательныхъ KL и K'L'. Точно также точка x не можетъ лежать на продолженіи отрѣзка TT'; въ самомъ дѣлѣ, пусть точка x лежитъ на продолженіи отрѣзка TT' въ сторону луча TT'; тогда точки T и x лежали бы по разныя стороны прямой L'K', между тѣмъ, какъ всѣ точки отрѣзка pq, а слѣдовательно и точка x, лежатъ, по построенію, вмѣстѣ съ точкой T по одну сторону прямой L'K'. Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что точка x не можетъ лежать на продолженіи отрѣзка TT' въ другую сторону. Не совпадая съ концами отрѣзка TT' и не находясь на предложеніи этого отрѣзка въ ту или другую сторону, точка x лежитъ на отрѣзкѣ TT'; значитъ касательная pq встрѣчаетъ хорду TT', а это (§ 9; § 24, сл. 3) невозможно.

Итакъ точки p и q лежатъ по одну сторону прямой TT'. Точно также убѣдимся, что точки m и n лежатъ по одну сторону этой прямой.

Отсюда вытекаетъ, что весь отрѣзокъ pq лежитъ по одну сторону прямой TT' равно, какъ и весь отрѣзокъ mn. Но такъ какъ точка a и b, лежащія соотвѣтственно, какъ выше доказано, внутри отрѣзковъ pq и mn, находятся, по предположенію, съ разныхъ сторонъ прямой TT', то и сами отрѣзки pq и mn лежатъ по разныя стороны прямой TT', а потому не пересѣкаются; поэтому четыреугольникъ $mnqp$ есть трапеція. Слѣдовательно (§ 47,f) замкнутая ломаная $mnqp$ выпукла.

Такъ какъ отрѣзки pq и mn, по доказанному, лежатъ съ разныхъ сторонъ прямой TT', то точки m и p также лежатъ съ разныхъ сторонъ этой прямой, а потому точка T лежитъ внутри отрѣзка mp; точно также убѣдимся, что точка T' лежитъ внутри отрѣзка nq.

Отсюда слѣдуетъ, что ломаныя TmnT' и T'qpT суть отсѣченныя отъ ломаной $mnqp$, а потому (§ 47,f) обѣ онѣ выпуклы. Предположимъ сначала, что фокусъ F не лежитъ на отрѣзкѣ TT'. Тогда, находясь (§ 48) внутри ломаной $mnqp$, онъ долженъ лежать (§ 47,f) внутри одной изъ отсѣченныхъ ломаныхъ TmnT' или TqpT'. Пусть, напримѣръ, онъ лежитъ внутри ломаной TmnT'.

Эта выпуклая ломаная даетъ намъ формулу (см. § 50, ур. (23)*)

$$\angle\, m\mathrm{F}n = 2d - \angle\, \frac{\mathrm{TFT'}}{2}$$

*) На чертежѣ (40) сохранены буквенныя обозначенія чертежа (39).

Точно также ломаная $p\mathrm{TFT}'q$, которая тоже (§ 47,g) выпукла, даетъ (см. § 50, ур. (17)):

$$\angle\, p\mathrm{F}q = \angle\, \frac{\mathrm{TFT}'}{2}.$$

Если же фокусъ F лежитъ на отрѣзкѣ TT′, то, пользуясь выпуклыми ломаными $p\mathrm{TFT}'q$ и $\mathrm{TFT}'nm$, находимъ (см. § 50, ур. (28), (30)):

$$\angle\, m\mathrm{F}n = d$$

$$\angle\, p\mathrm{F}q = d.$$

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

Замѣтка относительно maximum'а силы тока гальванической батареи.

Извѣстно, что наивыгоднѣйшее дѣйствіе гидроэлектрической батареи обусловливается равенствомъ внутренняго и внѣшняго сопротивленій. Слѣдующее доказательство этой истины основано, по нашему мнѣнію, на очень простыхъ математическихъ соображеніяхъ.

Обозначивъ черезъ e и r соотвѣтственно электровозбудительную силу и сопротивленіе одного элемента, черезъ n и m число всѣхъ данныхъ элементовъ и число группъ, на которыя они раздѣлены, черезъ l сопротивленіе цѣпи и, наконецъ, черезъ F силу тока батареи, на основаніи закона Ома найдемъ, что

$$\mathrm{F} = \frac{me}{\frac{m^2r}{n} + l}.$$

Подобнымъ образомъ для какого нибудь другого числа группъ m_1 будемъ имѣть:

$$\mathrm{F}_1 = \frac{m_1e}{\frac{m_1^2r}{n} + l}.$$

Если m есть то число группъ, при которомъ сила тока будетъ наибольшая, то

$$\frac{me}{\frac{m^2r}{n} + l} > \frac{m_1e}{\frac{m_1^2r}{n} + l},$$

или

$$mm_1(m_1 - m)r > (m_1 - m)nl,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$mm_1r > nl$$

когда $m_1 > m$ и

$$mm_1r < nl,$$

если $m_1 < m$.

Замѣняя m черезъ m_1, и подавно будемъ имѣть: въ первомъ случаѣ

$$m_1^2 r > nl,$$

откуда

$$m_1 > \sqrt{\frac{nl}{r}},$$

а во второмъ —

$$m_1^2 r < nl,$$

слѣдовательно,

$$m_1 < \sqrt{\frac{nl}{r}}.$$

Поэтому, если число группъ m_1 сдѣлаемъ равнымъ

$$\sqrt{\frac{nl}{r}},$$

то оно въ то же время будетъ равняться m, значитъ

$$m = \sqrt{\frac{nl}{r}}.$$

Подставивъ это значеніе въ выраженіе для внутренняго сопротивленія батареи, найдемъ, что

$$\frac{m^2 r}{n} = l.$$

А. Кирилловъ (Бердянскъ).

Эмиль дю Буа Реймондъ.
(НЕКРОЛОГЪ).

14/26 декабря 1896 года скончался знаменитый ученый Emil du Bois-Reymond, труды котораго, подобно работамъ Гельмгольца, Brücke, Ludwig'а лежатъ въ основаніи современной физіологіи. Du Bois-Reymond родился въ Берлинѣ 7 ноября 1818 года, занимался сперва теологіей, а съ 1838 г. посвятилъ себя изученію естественныхъ наукъ и медицины въ университетахъ Бонна и Берлина. По совѣту своего учителя Johann'а Müller'а, онъ занялся изученіемъ животнаго электричества. Въ наукѣ тогда господствовало ученіе о жизненной силѣ, дѣйствіемъ которой объясняли всѣ непонятныя явленія, происходившія въ живыхъ организмахъ. Жизненная сила управляла образованіемъ органовъ, ассимилировала вещества, сортировала ихъ, воспроизводила ткани, содѣйствовала развитію, отличала цѣлебное отъ яда, полезное отъ вреднаго, лечила раны и т. п. Этому туманному понятію du Bois-Reymond противоставляетъ математически-механическій взглядъ на явленія въ организмахъ. Между частицами живого тѣла, по его допущенію, дѣйствуютъ лишь центральныя силы, такъ что законъ сохраненія энергіи примѣнимъ и къ жизненнымъ явленіямъ. „Къ матеріи, говоритъ du Bois-Reymond, нельзя по произволу припрягать и отпрягать отъ нея силы, какъ лошадей къ экипажу. Частица желѣза остается совершенно одной и той же вещью, независимо отъ того, мчится ли она по міровому пространству въ метеоритѣ, громыхаетъ ли по рельсамъ въ колесѣ паровоза или протекаетъ въ кровяномъ шарикѣ поэта по височной артеріи". Слѣдовательно, всѣ явленія, совершающіяся въ живыхъ существахъ, ничѣмъ существенно не отличаются отъ явленій, протекающихъ въ мертвой природѣ.

Du Bois-Reymond'у приходилось работать при крайне неблагопріятныхъ условіяхъ, такъ какъ въ то время еще не было физіологическихъ институтовъ. Онъ устроилъ себѣ лабораторію уже въ 1841 г. на своей студенческой квартирѣ; необходимые инструменты пріобрѣталъ и готовилъ самъ. Лишь въ 1853 г. ему отвели мѣсто въ зданіи университета. Въ 1874 году онъ переѣхалъ въ новый институтъ.

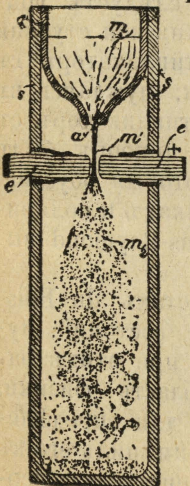
Въ концѣ прошлаго столѣтія возникъ, какъ извѣстно, знаменитый споръ между Вольтой и Гальвани, который продолжался и послѣ смерти обоихъ ученыхъ. Du Bois-Reymond былъ согласенъ съ мнѣніемъ Poggendorff'а, что теорія прикосновенія не опровергнута, а химическая не доказана. Изъ фактовъ, приводившихся Гальвани въ пользу существованія животнаго электричества, одинъ лишь не могъ быть удовлетворительно объясненъ Вольтой и его послѣдователями; это такъ называемое „раздраженіе безъ помощи металла", являющееся при соединеніи мускула съ его нервомъ извѣстнымъ образомъ. Не смотря на опыты Александра Гумбольдта, наблюдавшаго подобныя явленія, этотъ вопросъ былъ преданъ забвенію до изобрѣтенія въ 1828 г. Нобили астатической стрѣлки, пользуясь которой послѣдній указалъ на присутствіе тока, идущаго отъ пальцевъ заднихъ конечностей къ позвоночному столбу. Заслуга Маттеучи состоитъ въ томъ, что онъ снова привлекъ вниманіе ученыхъ къ этому вопросу, но лишь du Bois-Reymond'у удалось указать ближайшія причины этого тока. Чтобы представить себѣ всѣ затрудненія, которыя пришлось преодолѣть du Bois-Reymond'у, слѣдуетъ помнить, что электротехника стояла тогда на чрезвычайно низкой ступени развитія. Du Bois-Reymond самъ построилъ себѣ мультипликаторъ съ астатической стрѣлкой съ 4650 оборотами, впослѣдствіи, нуждаясь въ болѣе чувствительномъ приборѣ онъ приготовилъ мультипликаторъ съ 24160 оборотами. Когда этотъ весьма чувствительный приборъ былъ готовъ, пришлось бороться съ тѣми „пертурбаціями", которыя обусловливались ничтожнымъ количествомъ желѣза въ проводникахъ и поляризаціей электродовъ. Изъ всѣхъ этихъ затрудненій du Bois-Reymond вышелъ побѣдителемъ.

Не останавливаясь на чисто физіологическихъ работахъ du Bois-Reymond'а (нервно-мускульный аппаратъ, электрическое состояніе мускуловъ, реакція мускуловъ и пр.), замѣтимъ лишь, что при этихъ работахъ ему часто приходилось дѣлать экскурсіи въ область физики. Такъ онъ видоизмѣнилъ предложенный Poggendorff'омъ для опредѣленія электродвигательныхъ силъ методъ компенсаціи и примѣнилъ его къ измѣренію этихъ силъ въ животныхъ органахъ, усовершенствовалъ зеркальную буссоль, увеличивъ ея чувствительность, занимался теоріей усмиренія качаній магнита и т. п. Интересно также его наблюденіе, что сильные разряды бобины, убивающіе другихъ рыбъ, не дѣйствуютъ повидимому на электрическаго ската. Этотъ фактъ не былъ до сихъ поръ удовлетворительно объясненъ.

Талантливый ученый, du Bois-Reymond былъ въ то же время талантливымъ популяризаторомъ науки. Въ своихъ многочисленныхъ рѣчахъ и докладахъ онъ касался самыхъ разнообразныхъ вопросовъ, какъ научныхъ, такъ и философскихъ, и литературныхъ. Но ни одинъ изъ этихъ докладовъ не привлекъ въ себѣ такого вниманія ученыхъ, какъ его докладъ съѣзду естествоиспытателей въ 1872 г.: „О границахъ познанія природы". Извѣстно, что Laplace мечталъ о „міровой формулѣ", которая давала бы возможность вычислить всѣ матеріальныя явленія прошедшаго и будущаго. Уму, который обладалъ бы этой формулой, не была бы однако доступна „*сущность*" мельчайшихъ движущихся частицъ — атомовъ — и здѣсь лежитъ первая граница нашему познанію. Переходъ мертвой матеріи въ матерію живущую былъ бы вполнѣ понятенъ, еслибы мы располагали формулой Лапласа, ибо тогда, разъ дана матерія, каждый процессъ, каждое явленіе, а въ томъ числѣ и явленія жизни, могли бы быть разложены въ рядъ математическихъ и механическихъ задачъ. Но возникновеніе *процесса сознанія*, простѣйшее *ощущеніе* въ простѣйшихъ представителяхъ жизни составляетъ вторую границу, за которую не суждено перешагнуть человѣческому уму,—и эта вторая граница вѣроятно совпадаетъ съ первой. Всякой попыткѣ перейти эти границы du Bois-Reymond противопоставляетъ свое „ignorabimus".

ИЗОБРѢТЕНІЯ и ОТКРЫТІЯ.

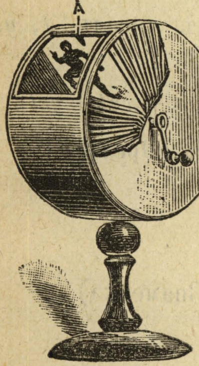
Новое примѣненіе гальваническаго тока.—Если лить тонкимъ слоемъ расплавленный металлъ между двумя электродами, въ которые посылается токъ высокаго напряженія (см. фиг 41), то металлъ распадается въ болѣе или менѣе тонкій порошокъ, въ зависимости, главнымъ образомъ, отъ температуры жидкаго металла. Очевидно, что это изобрѣтеніе можетъ имѣть многочисленныя примѣненія: такъ можно готовить свинцовый порошокъ для пластинъ аккумуляторовъ, превращать расплавленное желѣзо въ сталь дѣйствіемъ воздуха и т. п. (Герм. патентъ № 89062 „Société civile d'études du syndicat de l'acier Gérard").



Фиг. 41

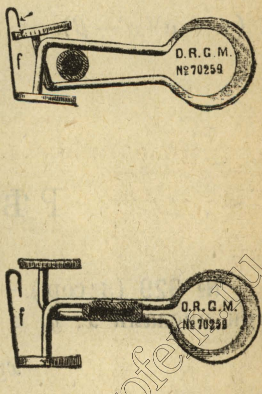
ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Фоліоскопъ. — Подъ такимъ названіемъ поступилъ въ продажу въ прошломъ году въ Парижѣ особый родъ стробоскопа, имѣвшій форму небольшой тетрадки. На каждомъ листкѣ этой тетрадки было помѣщено изображеніе одного изъ послѣдовательныхъ положеній, принимаемыхъ движущимся предметомъ. При быстромъ перелистываніи тетрадки получалось, какъ и въ обыкновенномъ стробоскопѣ, впечатлѣніе непрерывнаго движенія. Въ настоящее время изобрѣтатель фоліоскопа, г. Watillaux, усовершенствовалъ свой приборъ, прикрѣпивъ листки съ изображеніями къ горизонтальной оси, приводимой въ движеніе рукояткой и помѣстивъ эту ось съ листками въ цилиндрическій ящикъ съ отверстіемъ въ стѣнкѣ, какъ показано на фиг. 41. На краю отверстія сдѣланъ маленькій выступъ, задерживающій на мгновеніе листокъ въ то время, когда онъ проходитъ мимо отверстія. Приборъ даетъ очень хорошіе результаты, такъ какъ рисунки на листкахъ сдѣланы помощью моментальной фотографіи и такъ какъ листковъ много. Очевидно, что въ каждомъ приборѣ можно имѣть двѣ серіи рисунковъ.



Фиг. 41.

Усовершенствованный зажимъ для каучуковыхъ трубокъ. — Всякій, кому приходилось пользоваться обыкновенными зажимами для каучуковыхъ трубокъ, знаетъ, какъ иногда бываетъ неудобно просунуть трубку въ кольцеобразную часть зажима чтобы открыть ее на болѣе или менѣе продолжительное время, особенно если трубка сдѣлана изъ толстаго каучука. Это неудобство вполнѣ устраняется чрезвычайно простымъ приспособленіемъ, придуманнымъ *C. Leiss*'омъ и состоящимъ въ томъ, что къ одной изъ кнопокъ зажима припаивается кусочекъ упругой проволоки, изогнутой въ видѣ крючка, какъ показано на прилагаемомъ рисункѣ (см. *f*—фиг. 42). Употребленіе этого зажима вполнѣ понятно изъ чертежа (Chem. Ztg.).



Фиг. 42

ЗАДАЧИ.

№ 397. Даны двѣ точки A и B и прямая LM; требуется на этой послѣдней найти точку C такъ, чтобы углы A и B въ треугольникѣ ABC имѣли данную разность.

З. Колтовскій (Харьковъ).

№ 398. Черезъ точку M внутри треграннаго угла $SXYZ$ провести плоскость, пересѣкающую ребра SX, SY, SZ въ точкахъ A, B, C такъ, чтобы объемъ тетраэдра $SABC$ былъ minimum.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 399. Доказать, что если сумма положительныхъ чиселъ x, y, z, t равна единицѣ, то

$$(x^2+y^2+z^2+t^2)-(x^3+y^3+z^3+t^3)<1-13(xyz+xyt+xzt+yzt).$$

М. Зиминъ (Орелъ).

№ 400. Рѣшить уравненіе

$$\sin^{10}x+\cos^{10}x=a.$$

(Заимств.) *Г. Легошинъ* (с. Знаменка).

№ 401. Рѣшить систему уравненій:

$$\sin^2 x-\sin^2(y-z)=a,$$
$$\sin^2 y-\sin^2(z-x)=b,$$
$$\sin^2 z-\sin^2(x-y)=c.$$

(Заимств.) *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 402. Написать частное и остатокъ отъ дѣленія многочлена

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m$$

на $(x-\alpha)(x-\beta)$.

Е. Буницкій (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 329 (3 сер.).—Доказать, что если между четырьмя положительными числами x, y, z и t существуютъ соотношенія

$$xy=zt \text{ и } x-y>z-t>0,$$

то

$$(x-y)^2(z+t)>(z-t)^2(x+y).$$

Такъ какъ по условію, $x-y>z-t$, то данное неравенство справедливо, если докажемъ, что

$$(x-y)(z+t)>(z-t)(x+y);$$

но это неравенство приводится къ виду:

$$xt>yz,$$

что очевидно справедливо, такъ какъ изъ соотношенiй

$$xy = zt \text{ и } x - y > z - t > 0$$

слѣдуетъ, что $x > z$ и $t > y$.

Лежебокъ (Ярославль); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 330 (3 сер.).—Рѣшить безъ помощи тригонометрiи слѣдующую задачу, помѣщенную въ „Собранiи стереометрическихъ задачъ, требующихъ примѣненiя тригонометрiи", Н. Рыбкина, изд. 3, стр. 16, зад. 12.

„Опредѣлить плоскiй уголъ при вершинѣ правильной четыреугольной пирамиды, если центры вписаннаго и описаннаго шаровъ совпадаютъ".

Пусть S—вершина пирамиды, A, B, C и D—вершины основанiя, O—общiй центръ шаровъ вписаннаго и описаннаго. Продолживъ SO до пересѣченiя съ плоскостью основанiя въ M и опустивъ изъ O перпендикуляръ ON на грань SAB, изъ равенства треугольниковъ ONS и OMA заключимъ, что $NS = MA$, а изъ равенства треугольниковъ AON и AOM, — что $NA = MA$. Такимъ образомъ $NS = NA = NB = MA$, т. е. радiусъ окружности, описанной около треугольника ASB, равенъ радiусу MA окружности, описанной около квадрата $ABCD$. Треугольникъ ANB равенъ треугольнику AMB и $\angle ANB = \angle AMB = 90^0$, слѣдовательно $\angle ASB = 45^0$.

М. Зиминъ (Орелъ); *Д. Цельмеръ* (Тамбовъ).

№ 334 (3 сер.).—Рѣшить безъ помощи тригонометрiи слѣдующую задачу, взятую изъ „Собранiя стереометрическихъ задачъ, требующихъ примѣненiя тригонометрiи" Н. Рыбкина, изд. 3, стр. 27, № 76.

„Пирамида съ равными боковыми ребрами имѣетъ въ основанiи прямоугольникъ, стороны котораго a и b; соотвѣтствующiе этимъ сторонамъ плоскiе углы при вершинѣ пирамиды относятся какъ 3 : 1. Опредѣлить объемъ этой пирамиды".

Наложимъ на грань SAB $(AB = a)$ грань SBC $(BC = b)$ такъ, чтобы вершины и апоѳемы граней совпали, и пусть грань SBC заняла положенiе SMN. Такъ какъ $\angle ASB = 3\angle MSN$, то четыреугольникъ $MABN$ представляетъ, очевидно, равнобочную трапецiю, коей параллельныя стороны суть $AB = a$ и $MN = b$, непараллельныя—$AM = BN = b$, а радiусъ описанной окружности равенъ ребру пирамиды. По теоремѣ Птоломея имѣемъ:

$$\overline{AN}^2 = AB \, . \, MN + AM \, . \, NB,$$

откуда

$$AN = \sqrt{ab + b^2}.$$

Зная AN, легко опредѣлимъ высоту треугольника AMN, проведенную изъ вершины M

$$MP = \frac{\sqrt{3b^2 - ab}}{2}$$

и площадь AMN, равную

$$\frac{b\sqrt{(a+b)(3b-a)}}{4},$$

а такъ какъ радіусъ описанной около треугольника окружности равенъ произведенію сторонъ, раздѣленному на учетверенную площадь треугольника, то

$$SA = \frac{b^2}{\sqrt{b(3b-a)}}.$$

Зная боковое ребро и стороны основанія пирамиды, легко опредѣлимъ и искомый объемъ

$$V = \frac{ab}{6}\sqrt{\frac{(a-b)(a^2-2ab-b^2)}{3b-a}}.$$

Терентьевъ (Гельсингфорсъ); *М. Зиминъ* (Орелъ).

№ 336 (3 сер.)—Построить треугольникъ по даннымъ: углу ($\angle$ B), разности между стороной, прилежащей этому углу, и высотой, соотвѣтствующей другой прилежащей сторонѣ ($c-h_a$) и по периметру треугольника.

Построивъ уголъ B, на одной изъ сторонъ его выберемъ произвольную точку M и опустимъ изъ нея перпендикуляръ MN на другую сторону угла B. Отложивъ на прямой MB отъ точки M по направленію къ B отрѣзокъ $MP=MN$, а отъ точки B по направленію къ M отрѣзокъ $BD=c-h_a$, проводимъ $DE \parallel PN$ (точка E на BN) и $EA \parallel MN$ (точка A на BM). Отложивъ далѣе по прямой BN отъ точки B отрѣзокъ $BF=2p-AB$ и возставивъ къ AF перпендикуляръ изъ средины AF, найдемъ въ пересѣченіи его съ BF точку C. Треугольникъ ABC есть, очевидно, требуемый, ибо $AB-AE=AB-AD=$ $=c-h_a$ и $AB+AC+BC=AB+CF+BC=AB+2p-AB=2p$.

М. Зиминъ (Орелъ); *Лежебокъ* (Ярославль); *Ю. Идельсонъ* (Мюнхенъ); *Терентьевъ* (Гельсингфорсъ); *Э. Заторскій* (Москва); *С. Циклинскій* (Пинскъ).

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1896.—№ 5.

Sur les cercles radicaux. D'après M. *J. Duran Loriga.* 1. Пусть O и O′, R и R′ суть центры и радіусы двухъ окружностей; требуется найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ M, степени которыхъ*) относительно этихъ окружностей равны по величинѣ и противоположны по знакамъ.

*) См. „Новая геометрія треугольника“, VI. 1.

Положимъ $OO' = D$, $MO = l$, $MO' = l'$; по условію задачи

$$l^2 - R^2 = -(l'^2 - R'^2), \text{ или } l^2 + l'^2 = R^2 + R'^2.$$

Если N есть средина OO′ и $R'' = MN$, то, на основаніи полученнаго равенства, найдемъ, что

$$R''^2 = \frac{2(R^2 + R'^2) - D^2}{4}$$

слѣдовательно, искомое геометрическое мѣсто есть окружность, описанная около точки N радіусомъ $R'' = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2) - D^2}$. Эта окружность называется *радикальною окружностью* для данныхъ окружностей O и O′. (По аналогіи съ *радикальною осью*).

Если окружности O и O′ пересѣкаются (или касаются другъ друга), то радикальная окружность проходитъ чрезъ общія точки ихъ.

Если окружности O и O′ находятся одна внутри другой, то $D < \pm(R' - R)$, или

$$D^2 < R^2 + R'^2 - 2RR' < R^2 + R'^2 < 2(R^2 + R'^2);$$

поэтому, въ этомъ случаѣ для R″ получается всегда величина дѣйствительная, т. е. радикальная окружность можетъ быть построена геометрически Въ частномъ случаѣ, когда окружности O и O′ концентричны, радикальная окружность также концентрична съ ними и имѣетъ радіусомъ $R'' = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2)}$.

Если окружности O и O′ находятся одна внѣ другой, то радикальная окружность будетъ дѣйствительной, или мнимой, смотря по тому, будетъ-ли $2(R^2 + R'^2)$ больше или меньше D^2. При $2(R^2 + R'^2) = D^2$ радикальная окружность обращается въ точку (средина OO′).

Положимъ, что окружности O и O′ не имѣютъ общихъ точекъ. Обозначимъ чрезъ F и G, F′ и G′ точки пересѣченія ихъ съ произвольной третьей окружностью O″. Радикальная ось FG окружностей O и O″ и радикальная окружность для окружностей O′ и O″ пересѣкаются въ двухъ точкахъ H и H′, чрезъ которыя проходитъ радикальная ось окружностей O и O′. Ибо, если P, P′, P″ суть степени точки H для окружностей O, O′, O″, то $P = P''$ и $P' = -P''$, слѣдовательно $P = -P'$. Этой теоремой можно пользоваться для построенія радикальной окружности для двухъ окружностей неимѣющихъ общихъ точекъ.

Удобнѣе, однако, съ тою-же цѣлью пользоваться слѣдующей теоремой:

Если даны три окружности O, O′, O″, *то радикальная ось радикальныхъ окружностей для* O *и* O′, O *и* O″ *совпадаетъ съ радикальною осью окружностей* O′ *и* O″.

Авторъ заканчиваетъ статью указаніемъ на слѣдующія приложенія свойствъ радикальныхъ окружностей къ геометріи тр-ка.

1) Обозначимъ чрезъ P_a, P_b, P_c окружности, имѣющія діаметрами стороны тр-ка ABC,—чрезъ Q_a, Q_b, Q_c — окружности, имѣющія діаметрами медіаны AM_a, BM_b, CM_c того-же тр-ка. Q_a, Q_b, Q_c суть радикальныя окружности для P_b и P_c, P_c и P_a, P_a и P_b.

2) Пусть U_a, U_b, U_c суть окружности, центры которыхъ находятся въ срединахъ M_a, M_b, M_c сторонъ тр-ка ABC, а радіусы — равны медіанамъ M_aA, M_bB, M_cC того-же тр-ка.

Діаметры этихъ окружностей = медіанамъ тр-ка A′B′C′, антидополнительнаго для тр-ка ABC (Нов. геом. тр-ка III,9). Радикальныя оси окружностей U_a, U_b, U_c, но двѣ взятыхъ, суть прямыя симметричныя съ высотами тр-ка ABC относительно центра O описаннаго около него круга; радикальный центръ тѣхъ-же окружностей есть ортоцентръ тр-ка A′B′C′.

3) Если V_a, V_b, V_c суть окружности, имѣющія діаметрами стороны тр-ка A′B′C′, то U_a, U_b, U_c суть радикальныя окружности для V_b и V_c, V_c и V_a, V_a и V_b.

Sur les triangles équilatéraux inscrits à une conique. Par *M. A. Droz-Farny*. Въ дополненіе къ изслѣдованіямъ правильныхъ тр-въ, вписанныхъ въ коническія сѣченія, авторъ сообщаетъ полученные имъ результаты, изъ которыхъ обращаемъ вниманіе на слѣдующія теоремы:

1) Если уголъ между ассимптотами $= 60^0$, то всякая точка гиперболы есть вершина правильнаго вписаннаго въ нее тр-ка; двѣ другія вершины этого тр-ка суть безконечно удаленныя точки гиперболы.

2) Если ассимптоты гиперболы составляютъ уголъ въ 120^0, то геометрическимъ мѣстомъ центровъ окружностей описанныхъ около правильныхъ тр-въ, вписанныхъ въ гиперболу, служатъ двѣ параллельныя прямыя.

Sur une nouvelle démonstration du postulatum d'Euclide.

Професcоръ M. P. Mansion разбираетъ новое доказательство постулата Эвклида о параллельныхъ прямыхъ, предложенное M. Флоровымъ, членомъ французскаго математическаго общества. Доказательство, конечно, оказалось несостоятельнымъ.

Notes extraites de la correspondance mathématique et physique. 10. *De la courbe aux trois foyers et de sa tangente.* 11. *Sur quelques courbes remarquables.*

Solutions de questions proposées. №№ 814, 995 и 993, 968, 969, CCCXVI.

Questions d'examen. №№ 748, 749.

Questions proposées. №№ 1068—1071.

Д. Е.

ОТВѢТЫ РЕДАКЦІИ.

П. С. (Н.-Новгородъ).—„Данный прямоугольный треугольникъ скользитъ вершинами острыхъ угловъ по прямымъ“ = „данный прямоугольный треугольникъ перемѣщается въ плоскости такъ, что вершины острыхъ его угловъ остаются на данныхъ прямыхъ“. „Подвижной прямоугольникъ“ въ данномъ случаѣ есть перемѣнный прямоугольникъ. „Неподвижныя точки“ суть точки, не перемѣщающіяся въ плоскости чертежа. Маленькій софизмъ не будетъ напечатанъ.

В—му (Спб.).—Вѣроятно Васъ вполнѣ удовлетворитъ двухнедѣльный журналъ „Revue générale des sciences pures et appliquées“; онъ стоитъ 25 фр. въ годъ и издается у G. Carré и C. Naud (3, rue Racine, Paris).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 22-го Апрѣля 1897 г.
„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

Обложка
ищется

Обложка
ищется