Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXI Сем. № 12.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 252.

О числахъ, дающихъ данные остатки при дѣленiи на данныя взаимно-простыя числа.

Требуется найти наименьшее число, дающее остатки $r, r_1, r_2, r_3, \ldots$ при дѣленiи на взаимно простыя числа $m, m_1, m_2, m_3, \ldots$

Разсматривая только дѣленiе на m и m_1, получимъ:

$$X = mk + r = m_1k_1 + r_1.$$

Пусть $\frac{a}{b}$ предпослѣдняя подходящая непрерывной дроби, равной $\frac{m}{m_1}$; если она больше $\frac{m}{m_1}$, то возьмемъ a и b отрицательными, такъ чтобы всегда было $mb - m_1a = 1$. Пусть

$$Q = m_1a = mb - 1.$$

Тогда

$$k = b(r_1 - r), \quad k_1 = a(r_1 - r),$$
$$X = r_1 + Q(r_1 - r).$$

Здѣсь можно прибавить $\pm mm_1t$, такъ чтобы приблизить X къ r_2. Разсматривая дѣленiе на m_2, получимъ:

$$X_1 = mm_1t_1 + X = m_2k_2 + r_2.$$

Пусть $\frac{a_1}{b_1}$ предпослѣдняя подходящая дроби $\frac{mm_1}{m_2}$, такъ что $mm_1b_1 - m_2a_1 = 1$. Пусть

$$Q_1 = m_2a_1 = mm_1b_1 - 1.$$

Тогда

$$X_1 = r_2 + Q_1(r_2 - X).$$

Здѣсь можно придать $\pm mm_1m_2t$, чтобы приблизить X_1 къ r_3.

Если $\frac{a_2}{b_2}$ предпослѣдняя подходящая для дроби $\frac{mm_1m_2}{m_3}$, то

$$Q_2 = m_3a_2 = mm_1m_2b_2 - 1,$$

$$X_2 = r_3 + Q_2(r_3 - X_1) \pm mm_1m_2m_3t.$$

Также и далѣе.

Примѣръ. Найти число при дѣленіи на 3, 7, 11, 17 дающее остатки 1, 3, 5 и 8. $\frac{a}{b} = \frac{-2}{-1}; Q = -7.$

$$X = 3 - 7.2 = -11 \text{ или } +10.$$

$$\frac{mm_1}{m_2} = \frac{21}{11};\ a_1 = -2,\ b_1 = -1,\ Q_1 = -22,$$

$$X_1 = 5 - 22.(-5) = 115$$

$$a_2 = -68,\ b_2 = -5,\quad Q_2 = -1156,$$

$$X_2 = 8 - 1156(-107) = 123700 \text{ или } = 1963.$$

Если внесемъ выраженія X_1 и X, то получимъ:

$$X_2 = (1 + Q_2)r_3 - Q_2(1 + Q_1)r_2 + Q_1Q_2(1 + Q)r_1 - QQ_1Q_2r.$$

Если обратимъ дробь $\frac{M}{N}$ въ непрерывную и затѣмъ составимъ другую непрерывную дробь изъ частныхъ въ обратномъ порядкѣ, то найдемъ замѣчательное соотношеніе между этими дробями. Если предпослѣдняя подходящая $\frac{M}{N}$ равна $\frac{U}{V}$, то обращенная дробь будетъ $\frac{M}{U}$, а предпослѣдняя подходящая $\frac{N}{V}$; числители подходящихъ обращенной дроби будутъ остатки при обращеніи данной дроби, а числители подходящихъ данной дроби—остатки при обращеніи въ непрерывную обращенной.

Это видно изъ слѣд. примѣра:

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5}}}} \qquad \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{11}{4},\ \frac{25}{9},\ \frac{136}{49}$$

	2	1	3	2	5
136	49	38	11	5	1

$$5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}} \qquad \frac{5}{1},\ \frac{11}{2},\ \frac{38}{7},\ \frac{49}{9},\ \frac{136}{25}$$

	5	2	3	1	2
136	25	11	3	2	1

Это легко доказать и алгебраически.

Отсюда видно, что число X есть линейная функція остатковъ $r, r_1, r_2 \ldots$, которыхъ коэффиціенты зависятъ только отъ дѣлителей $m, m_1, m_2, \ldots$

Для трехъ чиселъ

$$X = m_1 m_2 b r + m m_2 b_1 r_1 + m m_1 b_2 r_2.$$

При дѣленіи на m второй и третій члены не дадутъ остатка, а коэффиціентъ при r долженъ дать остатокъ 1, слѣдовательно

$$m_1 m_2 b = m a + 1,$$

гдѣ a есть цѣлое число; отсюда видно, что $\frac{a}{b}$ есть предпослѣдняя подходящая дроби $\frac{m_1 m_2}{m}$; если она больше этой дроби, то надо перемѣнить знаки при a и b. Точно также b_1 есть знаменатель предпослѣдней подходящей дроби $\frac{m m_2}{m_1}$, а b_2 для дроби $\frac{m m_1}{m_2}$ съ тѣмъ же условіемъ относительно знаковъ.

Для четырехъ чиселъ будетъ

$$X = m_1 m_2 m_3 b r + m m_2 m_3 b_1 r_1 + m m_1 m_3 b_2 r_2 + m m_1 m_2 b_3 r_3,$$

гдѣ b, b_1, b_2 и b_3 знаменатели предпослѣднихъ подходящихъ дробей

$$\frac{m_1 m_2 m_3}{m}, \quad \frac{m m_2 m_3}{m_1}, \quad \frac{m m_1 m_3}{m_2} \quad \text{и} \quad \frac{m m_1 m_2}{m_3}.$$

Напр. $m = 3$, $m_1 = 7$, $m_2 = 13$, $m_3 = 17$

$$\frac{7.13.17}{3} = \frac{1547}{3}, \text{ подходящая } \frac{516}{1}, \quad b = -1$$

$$\frac{3.13.17}{7} = \frac{663}{7}, \quad \text{»} \quad \frac{284}{3}, \quad b_1 = 3$$

$$\frac{3.7.17}{13} = \frac{357}{13}, \quad \text{»} \quad \frac{55}{2}, \quad b_2 = -2$$

$$\frac{3.7.13}{17} = \frac{273}{17}, \quad \text{»} \quad \frac{16}{1}, \quad b_3 = 1$$

$$X = -1547 r + 663.3 r_1 - 357.2 r_2 + 273 r_3$$

$$= -1547 r + 1989 r_1 - 714 r_2 + 273 r_3$$

какіе бы ни были остатки. Пусть остатки $r = 1$, $r_1 = 2$, $r_2 = 9$, $r_3 = 14$; тогда

$$X = -173 + 4641 t.$$

Наименьшее положительное число X будетъ поэтому 4468.

А. Веребрюсовъ. (Кѣльцы).

Нѣкоторыя свойства треугольника, въ которомъ сумма двухъ сторонъ равняется утроенной третьей сторонѣ.

§ 1. Въ предлагаемой статьѣ доказываются нѣкоторыя свойства треугольника ABC, между сторонами AB $= c$, AC $= b$, BC $= a$ котораго существуетъ соотношеніе:

$$b + c = 3a.$$

Пусть h будетъ высота треугольника ABC, опущенная изъ A, r — радіусъ вписаннаго круга, соотвѣтствующаго сторонѣ a, и Δ — площадь треугольника. Извѣстно, что

$$r = \frac{2\Delta}{a + b + c}, \quad r' = \frac{2\Delta}{-a + b + c}.$$

Замѣняя въ этихъ формулахъ сумму $b + c$ черезъ $3a$, получимъ:

$$r = \frac{2\Delta}{4a}, \quad r' = \frac{2\Delta}{2a}. \qquad (1)$$

Кромѣ того имѣемъ:

$$h = \frac{2\Delta}{a}. \qquad (2)$$

Изъ равенствъ (1) и (2) видно, что въ разсматриваемомъ треугольникѣ:

1⁰ *радіусъ вписаннаго круга равенъ четверти высоты, опущенной изъ* A;

2⁰ *радіусъ внѣвписаннаго круга, соотвѣтствующаго сторонѣ* a, *равенъ половинѣ той же высоты и вдвое болѣе радіуса вписаннаго круга.*

§ 2. Пусь J и J′ будутъ центры круговъ r и r', а D и D′—точки касанія этихъ круговъ со стороною AB.

Извѣстно, что во всякомъ треугольникѣ AD $= p - a$ и AD′ $= p$, гдѣ p есть полупериметръ треугольника. Но если $b + c = 3a$, то $p = 2a$, слѣдов., AD $= a$ и AD′ $= 2a$. Отсюда видно, что AD $=$ DD′, а такъ такъ, кромѣ того, линіи JD и J′D′ параллельны, то AJ $=$ JJ′, т. е. *линія, соединяющая центръ внѣвписаннаго круга треугольника, соотвѣтствующаго сторонѣ* a, *съ вершиной* A, *дѣлится пополамъ центромъ вписаннаго круга.*

§ 3. Обозначимъ черезъ T и T′ точки касанія окружностей J и J′ со стороной BC, и пусть H будетъ основаніе высоты треугольника, опущенной изъ A, а E—точка пересѣченія стороны BC съ биссекторомъ угла A (иначе, съ прямой AJ). Изъ подобія треугольниковъ ET′J′ и ETJ слѣдуетъ:

$$\frac{ET'}{ET} = \frac{J'T'}{JT} = \frac{r'}{r} = 2, \qquad \text{(см. § 1)}$$

откуда

$$ET' = 2ET,$$

$$TT' = ET' + ET = 3ET. \qquad (3)$$

Треугольники ETJ и EHA подобны, слѣдов.,

$$\frac{EH}{ET} = \frac{AH}{JT} = \frac{h}{r} = 4 \qquad \text{(см. § 1)},$$

откуда:

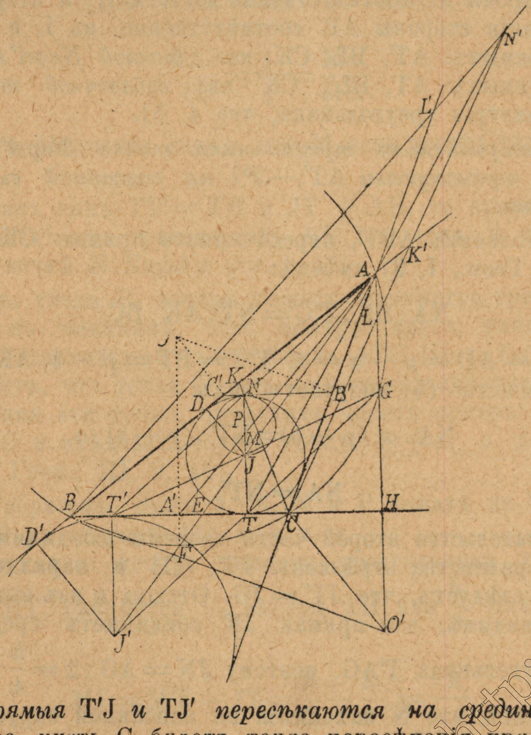
$$EH = 4ET,$$

$$TH = EH - ET = 3ET. \qquad (4)$$

Изъ (3) и (4) слѣдуетъ:

$$TT' = TH,$$

т. е., *точка касанія вписаннаго круга со стороной* BC *одинаково удалена отъ основанія опущенной изъ* A *высоты и отъ лежащей на* BC *точки касанія внѣвписаннаго круга, соотвѣтствующаго сторонѣ* BC.



§ 4. *Прямыя* T'J *и* TJ' *пересѣкаются на срединѣ высоты* AH.
Дѣйствительно, пусть G будетъ точка пересѣченія прямыхъ T'J и AH.
Треугольники T'JT и T'GH подобны, а потому

$$\frac{GH}{JT} = \frac{T'H}{T'T},$$

но по доказанному $TT' = TH$ (§ 3), слѣдов.,

$$\frac{T'H}{T'T} = 2 = \frac{GH}{JT},$$

откуда

$$GH = 2JT = 2r = \frac{h}{2} \qquad \text{(см. § 1)},$$

т. е., G дѣлитъ пополамъ отрѣзокъ AH.

Соединивъ, далѣе, точки G и J съ T, получимъ два прямоугольныхъ треугольника: $TT'J'$ и THG, въ которыхъ $TT' = TH$ и $T'J' = HG$ $\left(\text{потому что } r' = \frac{h}{2}\right)$, слѣдовательно, эти треугольники равны, $\angle T'TJ' = \angle HTG$, а линія $J'TG$ есть прямая.

Такимъ образомъ, обѣ прямыя: $T'J$ и TJ' пересѣкаются въ точкѣ G, которая есть средина высоты AH, что и т. д.

§ 5. Положимъ, что внѣвписанныя окружности треугольника ABC, соотвѣтствующія сторонамъ AB и AC, касаются: первая стороны AB и продолженія стороны AC соотвѣтственно въ K и L', а вторая — стороны AC и продолженія стороны AB соотвѣтственно въ L и K'. Точка N пересѣченія прямыхъ: AT', BL, CK наз. *точкой Nagel'я*, а точка N' пересѣченія прямыхъ: AT, BL', CK' наз. *добавочной точкой Nagel'я* (см. Новая Геометрія треугольника, что 4, 5).

Въ разсматриваемомъ треугольникѣ точка Nagel'я N *лежитъ* 1°) *на срединѣ трансверсали* AT',—2°) *на вписанной въ треугольникъ* ABC *окружности.*

Изъ треугольника ABT', пересѣченнаго прямою CK, по теоремѣ Менелая (Нов. Геом., I, 3) имѣемъ:

$$NA \,.\, BK \,.\, T'C = NT' \,.\, AK \,.\, BC \qquad (5)$$

Такъ какъ $BK = AD = p - a = \alpha$, $T'C = BT = p - b$, $AK = BD = p - b$, $BC = a$, то равенство (5) получаетъ видъ:

$$NA \,.\, \alpha \,.\, (p-b) = NT' \,.\, (p-b) \,.\, a,$$

откуда:

$$NA = NT'. \qquad (6)$$

Для доказательства второй части теоремы соединимъ точку N съ точкой J. Изъ равенства отрѣзковъ: TT', TH и параллельности прямыхъ: JT, GH слѣдуетъ, что $JT' = JG$. Отсюда и изъ вышедоказаннаго равенства (6) видимъ, что прямая JN соединяетъ средины сторонъ $T'A$ и $T'G$ треугольника $T'AG$, поэтому $JN = AG : 2 = \frac{h}{4} = r$ (см. § 1), откуда и слѣдуетъ, что N находится на вписанной окружности.

Добавочная точка Nagel'я N' *дѣлитъ трансверсаль* AT *въ отношеніи 2:1.*

Дѣйствительно, треугольникъ ABT и сѣкущая CK' даютъ соотношеніе:

$$N'T \,.\, AK' \,.\, BC = N'A \,.\, BK' \,.\, TC;$$

замѣчая, что $AK' = p - c$, $BC = a$,

$$BK' = p = 2a,\ TC = p - c,$$

послѣ подстановки будемъ имѣть:

$$N'T \,.\, a \,.\, (p - c) = N'A \,.\, 2a \,.\, (p - c),$$

откуда:

$$N'T = 2N'A,\ N'T : N'A = 2 : 1.$$

§ 6. *Центръ круга вписаннаго, центръ тяжести треугольника, точка Nagel'я и центръ тяжести периметра треугольника лежатъ на прямой, перпендикулярной къ сторонѣ* BC.

Для доказательства проведемъ медіану AA′. Перпендикуляръ JT къ сторонѣ BC пересѣчетъ AA′ въ M. Имѣемъ:

$$\frac{MA'}{MA} = \frac{TA'}{TH},$$

но такъ какъ $BT' = CT$, то

$$T'A' = TA' = TT' : 2 = TH : 2,$$

откуда:

$$\frac{TA'}{TH} = \frac{1}{2} = \frac{MA'}{MA}.$$

Изъ этого равенства видно, что M есть центръ тяжести треугольника ABC.

Далѣе, такъ какъ $TT' = TH$ и $JT \parallel AH$, то прямая JT, будучи продолжена, раздѣлитъ трансверсаль AT′ пополамъ и, слѣдоват., пересѣчетъ ее въ точкѣ N Nagel'я (см. § 5).

Наконецъ, точка P, центръ тяжести периметра треугольника, какъ доказывается въ механикѣ, есть центръ круга, вписаннаго въ треугольникъ, дополнительный треугольника ABC (Нов. Геом. III, 9, 10). Отсюда слѣдуетъ, что точка P есть дополнительная точки J, а прямая PJ, соединяющая эти точки, проходитъ черезъ центръ тяжести M треугольника ABC и слѣдоват. черезъ точку T (см. о дополнительныхъ точкахъ Нов. Геом., III, 9, 10).

Такимъ образомъ, точки J, M, N и P лежатъ на прямой JT, перпендикулярной къ сторонѣ BC, ч. и т. д.

§ 7. Разстояніе центра тяжести треугольника до стороны BC, т. е. прямая MT, равняется $1/3$ высоты AH или $\frac{h}{3}$. Зная, что $JT = \frac{h}{4}$, найдемъ:

$$MJ = MT - JT = \frac{h}{3} - \frac{h}{4} = \frac{h}{12}.$$

По свойству дополнительной точки $MP = MJ : 2 = \frac{h}{24}$, далѣе

$$PJ = MJ + MP = 3MP = \frac{h}{8} = \frac{r}{2}.$$

Выше было замѣчено, что точка P есть центръ окружности, вписанной въ треугольникъ, дополнительный треугольника ABC. Радіусъ этой окружности, очевидно, равенъ $r:2$. Такъ какъ разстояніе PJ между центрами двухъ окружностей: вписанной въ треугольникъ ABC и въ его дополнительный, равняется $r:2 = r - \frac{r}{2}$, т. е., равняется разности ихъ радіусовъ, то окружности эти взаимно касаются. — Доказано, что $JN = r$ (§ 5), и что линія JPN прямая (§ 6), поэтому *точка касанія окружностей J и P есть точка N Nagel'я треугольника.*

§ 8. *Прямая* $B'C'$, *соединяющая средины сторонъ* AC *и* AB, *касается вписанной окружности треугольника* ABC. Дѣйствительно, $B'C'$ проходитъ чрезъ средину трансверсали AT', т. е., черезъ точку N, лежащую на окружности J. Радіусъ JN, перпендикулярный къ сторонѣ BC, будетъ также перпендикуляренъ къ линіи $B'C'$, параллельной BC, а потому $B'C'$ есть касательная къ окружности J. Такъ какъ прямая $B'C'$ въ то же время касается окружности P, то слѣдов., она есть общая касательная къ окружностямъ P и J.

Перпендикуляръ, возстановленный изъ A' къ BC, пройдетъ черезъ центръ O описанной окружности треугольника ABC и пересѣчетъ биссекторъ AE въ точкѣ F, лежащей на срединѣ дуги BC этой окружности. Изъ подобія треугольниковъ AMJ и $AA'F$ имѣемъ:

$$\frac{A'F}{MJ} = \frac{AA'}{AM} = {}^3/_2,$$

откуда, замѣчая, что $MJ = \frac{h}{12}$ (см. § 7), найдемъ:

$$A'F = \frac{h}{8} = \frac{r}{2}.$$

Далѣе, пусть R будетъ радіусъ описанной окружности треугольника ABC, тогда

$$OA' = R - A'F = R - \frac{r}{2} = \frac{2R - r}{2} \qquad (7)$$

Найденное равенство показываетъ, что перпендикуляръ, опущенный изъ центра круга описаннаго на сторону BC, равенъ полуразности между діаметромъ круга описаннаго и радіусомъ круга вписаннаго.

Отсюда также слѣдуетъ, что прямая $O'A$, соединяющая ортоцентръ O' треугольника съ вершиною A, равняется $2R - r$, потому что эта прямая вдвое болѣе прямой OA'.

§ 10. Изъ треугольника $OA'B$ имѣемъ:

$$OA' = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Сопоставляя это равенство съ вышенайденнымъ (7), получимъ соотношеніе между a, R и r

$$\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = R - \frac{r}{2},$$

которое легко преобразуется въ слѣдующее:

$$a^2 + r^2 = 4Rr \tag{8}$$

Прямоугольный треугольникъ AJD (D—точка касанія вписаннаго круга со стороной AB), въ которомъ $AD = p - a = a$, даетъ:

$$\overline{AJ}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DJ}^2 = a^2 + r^2. \tag{9}$$

Изъ (8) и (9) выводится равенство:

$$\overline{AJ}^2 = 4Rr,$$

которое показываетъ, что *прямая, соединяющая центръ вписаннаго круга съ вершиной* A, *есть средняя пропорціональная между діаметрами круговъ вписаннаго и описаннаго.*

§ 11. *Сумма (или разность) перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра* O *описанной окружности на стороны* AC *и* AB, *равняется* $^3/_2\, r$.

Для доказательства прежде всего замѣтимъ, что въ прямоугольномъ треугольникѣ OBA′:

$$\angle BOA' = \angle A,\ OB = R,\ OA' = \frac{2R - r}{2},$$

откуда слѣдуетъ:

$$\cos A = OA' : OB = \frac{2R - r}{2R} = 1 - \frac{r}{2R} \tag{10}$$

Далѣе, пусть OB′ и OC′ будутъ перпендикуляры, опущенные изъ центра O на стороны AC и AB. Легко видѣть, что если углы B и C острые, то

$$OB' = R\cos B,\ OC' = -R\cos C.$$

Если же одинъ изъ угловъ B и C, напр. C, тупой, то

$$OB' = R\cos B,\ OC' = R\cos\,(180^0 - C) = -R\cos C.$$

Въ первомъ случаѣ сумма, а во второмъ разность перпендикуляровъ OB′ и OC′ равняется $R\cos B + R\cos C$, иначе

$$OB' \pm OC' = R\,(\cos B + \cos C) \tag{11}$$

Для дальнѣйшаго преобразованія имѣемъ:

$$\cos B + \cos C = 2\cos\frac{B + C}{2}\cos\frac{B - C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B - C}{2},$$

по формулѣ Мольвейде

$$\cos\frac{B - C}{2} = \frac{b + c}{a}\sin\frac{A}{2},$$

а такъ какъ $b + c = 3a$, то слѣдовательно;

$$\cos\frac{B - C}{2} = 3\sin\frac{A}{2}, \tag{12}$$

$$\cos B + \cos C = 6\sin^2\frac{A}{2}\cdot \qquad (13)$$

Далѣе, замѣняя въ формулѣ

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}$$

cosA его значеніемъ изъ равенства (10), найдемъ:

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{r}{4R}, \qquad (14)$$

и равенство (13) получаетъ видъ:

$$\cos B + \cos C = \frac{3r}{2R},$$

а подставляя найденное для $\cos B + \cos C$ значеніе въ равенство (11), будемъ имѣть:

$$OB' \pm OC' = {}^3/_2\, r,$$

ч. и т. д.

Слѣдствіе. Такъ какъ:

$$O'B = 2OB',\ O'C = 2OC', \text{ то}$$

$$O'B \pm O'C = 2(OB' \pm OC') = 3r,$$

т. е. *сумма (или разность) разстояній ортоцентра* O' *отъ вершинъ* B *и* C *равняется утроенному радіусу вписаннаго круга.*

§ 12. Кромѣ вышенайденныхъ соотношеній: (8), (10), (12), (14), (15) между элементами разсматриваемаго треугольника существуютъ нѣкоторыя другія, выводомъ которыхъ мы закончимъ эту статью.

1⁰ Изъ равенства: $b + c = 3a$ посредствомъ замѣны величинъ: a, b, c соотвѣтственно черезъ 2RsinA, 2RsinB, 2RsinC получимъ:

$$2R\sin B + 2R\sin C = 3.2R\sin A,$$

отсюда:

$$\sin B + \sin C = 3\sin A,$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\sin A;$$

извѣстно, что

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$$

поэтому будемъ имѣть:

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$$

откуда:

$$\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=2\sin\frac{A}{2} \tag{16}$$

2° Въ равенство (16) вмѣсто $\frac{A}{2}$ подставимъ $90^0-\frac{B+C}{2}$:

$$\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=2\sin\left(90^0-\frac{B+C}{2}\right)=2\cos\frac{B+C}{2}$$

или

$$\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

откуда:

$$2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

$$\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=2, \tag{17}$$

а также

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}={}^1/_2.$$

3° Для всякаго треугольника ABC имѣемъ:

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2},$$

отсюда, на основанiи равенства (17), получимъ:

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=2\cot\frac{A}{2}$$

и далѣе

$$\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2} \tag{18}$$

4° Имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{\cot\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}.$$

Это равенство на основанiи (17) и (18) преобразуется въ слѣдующее:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\cot\frac{A}{2}}{2}$$

или

$$2\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{A}{2}\cdot$$

5° Въ равенствѣ

$$b\cos C+c\cos B=a$$

замѣнимъ $\cos B$ и $\cos C$ соотвѣтственно выраженіями: $1-2\sin^2\frac{B}{2}$ и $1-2\sin^2\frac{C}{2}$:

$$b-2b\sin^2\frac{C}{2}+c-2c\sin^2\frac{B}{2}=a.$$

Изъ этого равенства находимъ:

$$2b\sin^2\frac{C}{2}+2c\sin^2\frac{B}{2}=b+c-a=2a$$

и наконецъ:

$$b\sin^2\frac{C}{2}+c\sin^2\frac{B}{2}=a.$$

М Зиминъ (Орелъ).

ЗАДАЧИ.

№ 433. Представить въ видѣ произведенія выраженіе

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{D}{2}-\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{D}{2},$$

если $A+B+C+D=360^0$.

М. Зиминъ (Орелъ).

№ 434. Показать, что

$$x^2-y^2=a^2-b^2,$$

если

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{b}=1 \text{ и } \frac{a^3}{x}-\frac{b^3}{y}+a^2-b^2=0.$$

(Заимств.) *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка),

№ 435. Показать, что во всякомъ треугольникѣ

$$\frac{a(a+1)+b(b+1)+c(c+1)}{(a+1)\sin A+(b+1)\sin B+(c+1)\sin C}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a\sin A+b\sin B+c\sin C},$$

гдѣ a, b и c суть стороны треугольника, а A, B и C — соотвѣтственно противолежащіе имъ углы.

Л. Магазаникъ (Бердичевъ).

№ 436. Рѣшить уравненія:

$$\sqrt{\frac{3y-2x}{y}}+\sqrt{\frac{4y}{3y-2x}}=2\sqrt{2},$$

$$3(x^2+1)=(y+1)(y-x+1).$$

(Заимств.) *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 437. Тѣло имѣетъ видъ цилиндра съ приложенными къ обоимъ его основаніямъ равными конусами. Пусть будутъ h и r соотвѣтственно высота и радіусъ основанія цилиндра, x — высота каждаго конуса. При какихъ соотношеніяхъ между этими величинами при данномъ объемѣ этого тѣла поверхность его будетъ minimum?

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

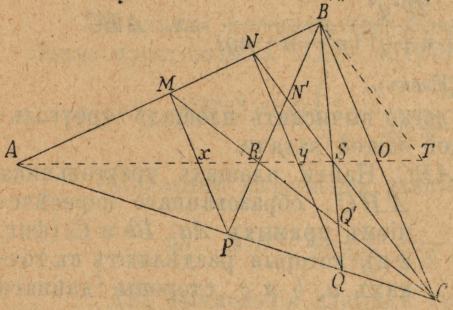
№ 438. Упростить выраженіе

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}.$$

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 154 (3 сер.) Стороны AB и AC треугольника ABC раздѣлены на p равныхъ частей. На сторонахъ AB и AC взяты точки дѣленія M и N, P и Q, причемъ M и P — n-ыя точки дѣленія, а N и Q — $(n+q)$-ыя, считая отъ A. По даннымъ p, n и q опредѣлить, какую часть площади треугольника ABC составитъ четыреугольникъ $RN'SQ'$, образованный пересѣченіемъ прямыхъ CM и CN съ BP и BQ.



Фиг. 1.

Пусть M и P (фиг. 1) n-ыя точки дѣленія сторонъ AB и AC, а N и Q — $(n+q)$-ыя точки дѣленія сторонъ AB и AC, считая отъ A. Пересѣченіемъ прямыхъ CM и CN съ BP и BQ образуется четыреугольникъ $RN'SQ'$, вершины котораго R и S очевидно лежатъ на медіанѣ AO треугольника ABC, которую положимъ равной l. Пусть x и y точки пересѣченія параллельныхъ прямыхъ MP и NQ съ AO. Изъ подобныхъ треугольниковъ RBC и MRP найдемъ:

$$\frac{OR}{Rx}=\frac{BC}{Mp}=\frac{p}{n} \quad \text{или} \quad \frac{OR}{xO}=\frac{p}{p+n}.$$

Такъ какъ $xO=\frac{p-n}{p}.\,l$, то $OR=\frac{p-n}{p+n}\cdot l$. Точно также изъ подобія треугольниковъ BSC и NSQ, находимъ $\frac{OS}{Sy}=\frac{p}{n+q}$ или $\frac{OS}{Oy}=\frac{p}{n+p+q}$;

такъ какъ $Oy=\frac{p-n-q}{p}\cdot l$, то $OS=\frac{p-n-q}{p+n+q}\cdot l$. Проведя $BT \parallel CN$ и замѣтивъ, что $SO=OT$, будемъ имѣть изъ подобія треугольниковъ $RN'S$ и RBT

$$\frac{RN'}{RB}=\frac{RS}{RT}=\frac{RO-OS}{RO+OS},$$

или, послѣ подстановки вмѣсто RO и OS найденныхъ величинъ для RO и OS,

$$\frac{RN'}{RB}=\frac{pq}{p^2-n^2-nq}.$$

Такъ какъ высоты треугольниковъ ABC и RBC, опущенныя изъ A и R на BC, относятся какъ $AO:RO$, то

$$\frac{\text{пл. } RBC}{\text{пл. } ABC}=\frac{RO}{AO}=\frac{p-n}{p+n}$$

и пл. $RBC=\frac{p-n}{p+n}$ пл. ABC. Легко видѣть, что треугольники $RN'S$ и RSQ' равномѣрны, равно какъ и треугольники POB и ROC. По извѣстной теоремѣ имѣемъ:

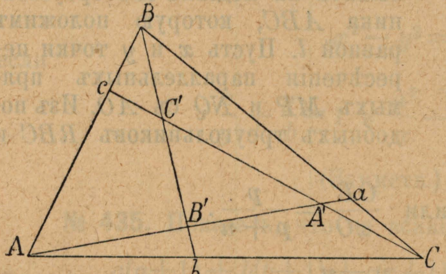
$$\frac{\text{пл. } RN'S}{\text{пл. } RBO}=\frac{RN'.RS}{RB.RO}=\frac{2p^2q^2}{(p-n)(p+n+q)(p^2-n^2-nq)}.$$

Но пл. $RBO=$ половинѣ площ. $RBC=\frac{p-n}{2(p+n)}$ пл. ABC; слѣдовательно пл. $RN'S=\frac{p^2q^2}{(p+n)(p+n+q)(p^2-n^2-nq)}$ пл. ABC, а площ. $RN'SQ'=2$ пл. $RN'S=\frac{2p^2q^2}{(p+n)(p+n+q)(p^2-n-nq)}$ пл. ABC.

Н. Николаевъ (Пенза); *М. Зиминъ* (Елецъ).

Примѣчаніе редакціи. Весьма легко вычислить площадь треугольника $RN'S$, зная рѣшеніе слѣдующей общей задачи.

Дана площадь треугольника ABC. Найти площадь треугольника $A'B'C'$, образованнаго пересѣченіемъ прямыхъ Aa, Bb и Cc (фиг. 2-я), которыя раздѣляютъ въ точкахъ a, b и c стороны даннаго треугольника въ данныхъ отношеніяхъ α, β и γ такъ, что



Фиг. 2.

$$\frac{Ba}{aC}=\alpha,\ \frac{Cb}{bA}=\beta,\ \frac{Ac}{cB}=\gamma \qquad (1).$$

Обозначая площадь треугольника ABC черезъ Q, при помощи второго изъ отношеній (1) находимъ:

$$\text{пл. } ABb=\frac{Q}{1+\beta} \qquad (2).$$

Сравнивая площади треугольниковъ $AC'B$ и ABb, получимъ:

$$\text{пл. } AB'B = \frac{BB'}{Bb} \cdot \text{ пл. } ABb \qquad (3).$$

Примѣняя теорему Менелая къ треугольнику BbC и сѣкущей Aa и пользуясь двумя первыми изъ пропорцій (1), найдемъ, что

$$1 = \frac{BB'.\, bA.\, Ca}{Bb.\, AC.\, aB} = \frac{BB'}{Bb} \cdot \frac{bA}{AC} \cdot \frac{Ca}{aB} = \frac{BB'}{Bb} \cdot \frac{1}{1+\beta} \cdot \frac{1}{\alpha},$$

откуда

$$\frac{BB'}{Bb} = \alpha\ (1+\beta),$$

а потому

$$\frac{BB'}{Bb} = \frac{\alpha (1+\beta)}{\alpha\beta+\alpha+1}.$$

Подставляя найденное выраженіе для отношенія $\frac{B'B}{Bb}$ и значеніе площади AbB изъ уравненія (2) въ уравненіе (3), имѣемъ.

$$\text{пл. } AB'B = \frac{\alpha Q}{\alpha\beta+\alpha+1}.$$

Пользуясь симметричностью обозначеній, можно сразу написать:

$$\text{пл. } BC'C = \frac{\beta Q}{\beta\gamma+\beta+1} \quad \text{и пл. } CA'A = \frac{\gamma Q}{\gamma\alpha+\gamma+1}.$$

Вычитая площади треугольниковъ $AB'B$, $BC'C$, $CA'A$ изъ площади треугольника ABC, получимъ:

$$\text{пл. } A'B'C' = Q\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha\beta+\beta+1} - \frac{\beta}{\beta\gamma+\gamma+1} - \frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1}\right).$$

Вычисливъ выраженіе, заключенное въ скобкахъ, найдемъ:

$$\text{пл. } A'B'C' = \frac{Q\ (1-\alpha\beta\gamma)^2}{(\alpha\beta+\beta+1)\ (\beta\gamma+\gamma+1)\ (\gamma\alpha+\gamma+1)}.$$

Для вычисленія площади треугольника $RN'S$ достаточно подставить вмѣсто α, β и γ ихъ значенія:

$$\alpha = \frac{BO}{OC} = 1, \quad \beta = \frac{CP}{PA} = \frac{p-n}{n}, \quad \gamma = \frac{AN}{NB} = \frac{n-q}{p-n-q}.$$

№ 359 (3 сер.). Изъ центра O вписаннаго въ треугольникъ ABC круга радіусомъ d описана окружность. Показать, что площадь вписаннаго въ эту окружность шестиугольника, вершины котораго лежатъ на биссектрисахъ угловъ A, B, C равна:

$$4d^2 \sin\left(45^0+\frac{A}{4}\right)\sin\left(45^0+\frac{B}{4}\right)\sin\left(45^0+\frac{C}{4}\right).$$

Пусть построенная окружность радіуса d пересѣкаетъ линіи AO, BO, CO соотвѣтственно въ точкахъ A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2. Площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ состоитъ изъ суммы площадей A_1OB_2, B_2OC_1 и т. д. Но

$$\text{пл. } A_1OB_2 = \text{пл. } B_1OA_2 = \frac{d^2 \sin A_1OB_2}{2} = \frac{d^2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2};$$

Точно также

$$\text{пл. } B_2OC_1 = \text{пл. } B_1OC_2 = \frac{d^2 \sin B_2OC_1}{2} = \frac{d^2 \sin \frac{B+C}{2}}{2};$$

и

$$\text{пл. } C_1OA_2 = \text{пл. } A_1OC_2 = \frac{d^2 \sin C_1OA_2}{2} = \frac{d^2 \sin \frac{A+C}{2}}{2};$$

откуда площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$, которую обозначимъ черезъ S, равна

$$d^2\left[\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{A+C}{2} + \sin\frac{B+C}{2}\right].$$

Такъ какъ

$$\frac{A+B}{2} + \frac{A+C}{2} + \frac{B+C}{2} = 180^0,$$

то

$$\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{A+C}{2} + \sin\frac{B+C}{2} = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{B+C}{2};$$

но

$$\frac{A+B}{4} = \frac{180^0 - C}{4} = 45^0 - \frac{C}{4},$$

а потому

$$\cos\frac{A+B}{4} = \cos\left(45^0 - \frac{C}{4}\right) = \sin\left(45^0 + \frac{C}{4}\right);$$

такимъ же образомъ

$$\cos\frac{B+C}{4} = \sin\left(45^0 + \frac{A}{4}\right); \quad \cos\frac{A+C}{4} = \sin\left(45^0 + \frac{B}{4}\right).$$

Слѣдовательно

$$S = 4d^2 \sin\left(45^0 + \frac{A}{4}\right)\sin\left(45^0 + \frac{B}{4}\right)\sin\left(45^0 + \frac{C}{4}\right).$$

Я. Полушкинъ (с. Знаменка); *Р. Кошевой* (Полтава).

№ 389 (3 сер.). На основаніи AC тр-ка ABC дана точка D. Черезъ эту точку провести прямую, дѣлящую треугольникъ на двѣ равновеликія части.

Соединяемъ B и D прямою BD и изъ точки E, середины AC, проводимъ EF параллельно BD. Прямая DF и есть искомая. Доказательство основано на равенствѣ площадей треугольниковъ BED и BFD.

Ѳ. Діесперовъ (сел. Акуличи); *С. Фридрихъ* (Ковно); *П. Соловьевъ* (Н. Новгородъ). *А. Д.* (Иваново Вознесенскъ); *Я. Полушкинъ* (сел. Знаменка); *С. Циклинскій* (Пинскъ); *А. Бомаринъ* (Глуховъ); *Лежебокъ* и *Г.* (Иваново-Вознесенскъ); *И. Величко* (Могилевъ губ.).

№ 206 (2 сер.). Двѣ окружности пересѣкаются въ точкахъ P и Q; общая къ нимъ касательная касается ихъ въ точкахъ A и B. Показать, что діаметръ одной изъ двухъ окружностей: APB или AQB—есть средняя пропорціональная между діаметрами данныхъ окружностей.

Назовемъ центръ окружности, касающейся общей касательной AB въ точкѣ A, черезъ O. Опустимъ изъ точки O перпендикуляръ OD на хорду AP и изъ точки P перпендикуляръ PE на общую касательную AB.

Изъ подобія треугольниковъ AOD и APE находимъ:

$$\frac{AD}{PE}=\frac{AO}{AP}, \text{ или } \frac{AP}{2PE}=\frac{AO}{AP},$$

откуда, называя черезъ R радіусъ круга O, получимъ:

$$\frac{AP^2}{PE}=2R \qquad (1).$$

Подобнымъ же образомъ

$$\frac{BP^2}{PE}=2R' \qquad (2),$$

гдѣ R' — радіусъ второй окружности.

Перемножая равенства (1) и (2), получимъ:

$$\frac{AP^2.BP^2}{PE^2}=2R.2R',$$

или, такъ какъ

$$\frac{AP.BP}{PE}=2r,$$

гдѣ r — радіусъ круга, описаннаго около треугольника APB:

$$(2r)^2=2R.2R', \quad 2r=\sqrt{2R.2R'}.$$

Такимъ же пріемомъ найдемъ то же выраженіе и для радіуса круга, описаннаго около треугольника AQB.

К. Щиголевъ (Курскъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 217 (2 сер.). Дана точка О и прямая MN. На прямой взяты три точки A, B, C. Около треугольниковъ AOB, BOC, COA описаны окружности. Кромѣ того черезъ точку O проведены еще три окружности, касательныя къ прямой MN: одна въ точкѣ A, другая—въ B, третья—въ C. Доказать, что произведеніе діаметровъ трехъ первыхъ окружностей равно произведенію діаметровъ трехъ остальныхъ.

Радіусы окружностей, описанныхъ около треугольниковъ AOB, BOC, COA, назовемъ соотвѣтственно черезъ R, R_1, R_2, а радіусы окружностей, проходящихъ черезъ точку O и касающихся прямой MN въ точкахъ A, B, C, назовемъ соотвѣтственно черезъ r, r_1, r_2.

Опустивъ перпендикуляръ OD изъ точки O на прямую MN, имѣемъ:

$$2R=\frac{OA.OB}{OD}\ ;\ 2R_1=\frac{OB.OC}{OD}\ ;\ 2R_2=\frac{OC.OA}{OD}\qquad (1).$$

Въ окружности радіуса r черезъ точку A проведемъ діаметръ AK и опустимъ на него изъ точки O перпендикуляръ OP. Тогда

$$OA^2=2r.\ AP=2r.\ OD,$$

откуда

$$2r=\frac{OA^2}{OD}\qquad (2).$$

точно также

$$2r_1=\frac{OB^2}{OD},\ 2r^2=\frac{OC^2}{OD}\qquad (3).$$

Изъ равенствъ (1), (2), (3) находимъ

$$2R.\ 2R_1.\ 2R_2=\frac{OA^2.OB^2.OC^2}{OD^3}=2r.\ 2r_1.\ 2r_2.$$

К. Щиголевъ (Курскъ); *В. Россовская* (Курскъ); *Я. Полушкинъ* (Знаменка).

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1896.—№ 10.

Centre de transversales angulaires égales. Par *M. Georges Brocard*. Авторъ ставитъ себѣ задачей найти такую точку F въ плоскости тр-ка ABC, чтобы прямыя AA′, BB′, CC′, проходящія чрезъ эту точку и пересѣкающія стороны тр-ка въ A′, B′, C′, имѣли данную длину l

Если стороны тр-ка ABC обозначить чрезъ a, b, c, то, положивъ

$$\frac{BA'}{A'C}=x,\ \frac{CB'}{B'A}=y,\ \frac{AC'}{C'C}=z,$$

получимъ ур-ніе (изъ тр-ка AA′B):

$$l^2=c^2+BA'^2-2c.BA'.\cos B=c^2+\frac{a^2x^2}{(1+x)^2}-\frac{2cax}{1+x}\cos B,$$

или

$$(l^2-b^2)x^2+2(l^2-bc.\cos A)x+l^2-c^2=0. \qquad (1)$$

По аналогіи можно написать еще два ур-нія:

$$(l^2-c^2)y^2+2(l^2-ca\,.\cos B)y+l^2-a^2=0, \qquad (2)$$

$$(l^2-a^2)z^2+2(l^2-ab\,.\cos C)z+l^2-b^2=0. \qquad (3)$$

Кромѣ того, по теоремѣ Чевы:

$$xyz=1. \qquad (4)$$

Приведя эти ур-нія къ виду:

$$x^2-sx+p=0,\quad y^2-s'y+p'=0,\quad z^2-s''z+p''=0 \qquad (5)$$

и замѣтивъ, что $pp'p''=1$, заключаемъ (по ур. 4), что корни ур-ній (5) удовлетворяютъ условіямъ $x'y'z'=1$ и $x''y''z''=1$: слѣдов., соотвѣтственно этимъ двумъ группамъ значеній x, y, z, существуютъ двѣ точки F и F' и двѣ группы прямыхъ AA', BB', CC' и AA'', BB'', CC'', удовлетворяющихъ условію задачи. Точки F и F', очевидно, опредѣляются значеніями l; чтобы найти эти значенія, берется ур- е

$$(x'+x'')(y'+y'')(z'+z'')=ss's'',$$

которое, вслѣдствіе ур-ній $x'y'z'=1$ и $x''y''z''=1$, принимаетъ видъ

$$\frac{s^2}{p}+\frac{s'^2}{p'}+\frac{s''^2}{p''}-ss's''-4=0; \qquad (6)$$

подставивъ сюда значенія s, s', s'' и p, p', p'', получимъ ур-ніе:

$$l^4-2S\cot g\omega\,.\,l^2+3S^2=0, \qquad (7)$$

гдѣ S и ω суть площадь и *уголъ Брокара* *) тр-ка ABC.

Первая часть этого ур-нія обращается въ отрицательныя величины, если подставлять въ нее вмѣсто l высоты тр-ка

$$h_a=\frac{2S}{a},\qquad h_b=\frac{2S}{b},\qquad h_c=\frac{2S}{c};$$

наоборотъ, при $l=0$ и $l=\infty$ получаются величины положительныя; слѣдов., ур-ніе (7) имѣетъ два дѣйствительныхъ корня: l_1 — большій наибольшей изъ высотъ тр-ка и l_2 — меньшій наименьшей изъ этихъ высотъ. Поэтому, окружности, описанныя радіусами l_1 около вершинъ тр-ка ABC, пересѣкутъ его стороны въ точкахъ A' и A'', B' и B'', C' и C'', такъ что прямыя AA', BB', CC' и AA'', BB'', CC'' пересѣкутся въ искомыхъ точкахъ F и F'.

Если тр-къ ABC равнобедренный и $b=c>a$, то $l_1=h_a$; при $b=c<a$, $l_2=h_a$.

Величины l_1 и l_2 зависятъ только отъ площади тр-ка S и его угла Брокара ω. Но извѣстно, что существуетъ безчисленное множество тр-въ T, имѣющихъ съ тр-мъ ABC общій центръ тяжести G и вписанныхъ въ эллипсъ E, описанный около ABC и имѣющій центромъ точку G; всѣ эти тр-ки равновелики и имѣютъ равные углы Брокара; поэтому величины l_1 и l_2 для всѣхъ тр-въ T остаются однѣ и тѣ же. Пусть A_1A_1' и A_2A_2' суть оси эллипса E; къ группѣ тр-въ T принадлежатъ равнобедренные тр-ки $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, основанія которыхъ B_1C_1 и B_2C_2 перпендикулярны къ полуосямъ эллипса GA_1' и GA_2' въ ихъ срединахъ M_1 и M_2; изъ этихъ тр-въ находимъ:

$$l_1=A_1M_1=\frac{3}{2}\alpha \quad\text{и}\quad l_2=A_2M_2=\frac{3}{2}\beta,$$

гдѣ 2α и 2β суть оси эллипса E.

---

*) См. „Нов. геом. тр-ка“.

Въ заключеніе доказывается, что точки F и F′ суть однѣ и тѣ же для всѣхъ тр-въ T и совпадаютъ съ фокусами эллипса E.

Note sur l'article précédent. Par *M. J. Neuberg.* Въ дополненіе къ статьѣ Brocard'a, M. Neuberg доказываетъ, что если AL′, BM′, CN′ и AL″, BM″, CN″ суть прямыя, гармонически сопряженныя съ AA′, BB′, CC′ и AA″, BB″, CC″ относительно угловъ A, B и C, то точки L′, L″, M′, M″, N′, N″ лежатъ на одной кривой 2-го порядка и при томъ точки L′, M′, N′ и L″, M″, N″ находятся на *трилинейныхъ полярахъ**) точекъ F и F′.

Изъ ур-нія (7) предыдущей статьи слѣдуетъ, что

$$\frac{l^2}{S} = \operatorname{cotg}\omega \pm \sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3};$$

поэтому, обозначивъ чрезъ ω_1 и ω_2 *углы Штейнера**) тр-ка ABC, получимъ

$$l_1^2 = S \cdot \operatorname{cotg}\omega_1, \quad l_2^2 = S \cdot \operatorname{cotg}\omega_2.$$

M. Neuberg даетъ еще (безъ доказательства) слѣдующее ур-ніе для опредѣленія l:

$$\sqrt{l^2a^2 - 4S^2} + \sqrt{l^2b^2 - 4S^2} + \sqrt{l^2c^2 - 4S^2} = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\operatorname{cotg}AA'B + \operatorname{cotg}BB'C + \operatorname{cotg}CC'A = 0;$$

отсюда выводится, что перпендикуляры къ сторонамъ тр-ка ABC въ точкахъ A′, B′, C′ (или A″, B″, C″) пересѣкаются въ одной точкѣ.

Прибавимъ отъ себя, что было бы весьма желательно встрѣтить на страницахъ „Вѣстника“ чисто геометрическое изслѣдованіе свойствъ новыхъ точекъ Brocard'a F и F′.

Réponse aux observations de M. Mansion. Par *M. Frolov.* Отвѣтъ г. Фролова на разборъ его *доказательства XI аксіомы Эвклида*, написанный *Mansion*'омъ.

Notes mathématiques. 9. *Fondation d'un prix en l'houneur de Lobatchefsky.* 10. *Sur le moindre multiple.*
Solutions de questions proposées. №№ 383, 967, 1004.
Questions d'examen. №№ 762 - 763.
Questions proposées. №№ 1089—1092.

Д. Е.

---

*) Ibid.

Конецъ XXI семестра.

Редакторъ В. А. Циммерманъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено цензурою. Одесса, 29-го Января 1898 г.
„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

Обложка
ищется

Обложка
ищется