Обложка
пщется

Обложка
пщется

XXI Сем. № 11.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 251.

Рѣшеніе уравненія:

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Bkx+Ak^2=0.$$

---

§ 1. Положимъ, что требуется рѣшить уравненіе:

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Bkx+Ak^2=0, \tag{1}$$

гдѣ

$$A \gtrless 0 \text{ и } k \gtrless 0. \tag{2}$$

Дѣля обѣ части уравненія (1) на x^2, получаемъ равносильное ему уравненіе:

$$Ax^2+Bx+C+B\cdot\frac{k}{x}+A\cdot\frac{k^2}{x^2}=0, \tag{3}$$

или

$$A\left(x^2+\frac{k^2}{x^2}\right)+B\left(x+\frac{k}{x}\right)+C=0. \tag{4}$$

Полагая

$$x+\frac{k}{x}=y \tag{5}$$

и замѣчая, что

$$x^2+\frac{k^2}{x^2}=y^2-2k, \tag{6}$$

получаемъ для опредѣленія y уравненіе:

$$A(y^2-2k)+By+C=0, \tag{7}$$

или

$$Ay^2+By+(C-2Ak)=0, \tag{8}$$

откуда найдемъ для y два значенія: y_1 и y_2.

Зная y, опредѣляемъ x изъ уравненія (5); освобождая это уравненіе отъ знаменателей, получаемъ равносильное ему при условіи (2) уравненіе:

$$x^2-yx+k=0, \tag{9}$$

откуда

$$x={}^1/_2\left(y\pm\sqrt{y^2-4k}\right). \tag{10}$$

Полагая здѣсь $y=y_1$, найдемъ для x два значенія: x_1 и x_2; полагая $y=y_2$, получимъ еще два значенія: x_3 и x_4.

§ 2. Сравнивая уравненіе:

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0, \tag{11}$$

съ уравненіемъ (1), заключаемъ, что уравненіе (11) можетъ быть приведено къ виду (1) безъ введенія вмѣсто x новаго неизвѣстнаго только въ томъ случаѣ, если два уравненія

$$D=Bk \text{ и } E=Ak^2 \tag{12}$$

имѣютъ общее рѣшеніе относительно неизвѣстнаго k. Исключая k изъ уравненій (12), получаемъ слѣдующее условіе ихъ совмѣстности:

$$AD^2-B^2E=0. \tag{13}$$

Условіе (13) и представляетъ критеріумъ возможности приведенія уравненія (11) къ виду (1) безъ введенія вмѣсто x новаго неизвѣстнаго. Если коэффиціенты уравненія (11) удовлетворяютъ условію (13), то уравненіе (11) можно замѣнить уравненіемъ (1), гдѣ коэффиціенты A, B и C тѣ же, что и въ уравненіи (11), а

$$k=\frac{D}{B}. \tag{14}$$

§ 3. Полагая $k=1$ въ уравненіи (1), получаемъ *возвратное уравненіе перваго рода* *):

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Bx+A=0. \tag{15}$$

Полагая $k=-1$ въ уравненіи (1), получаемъ *возвратное уравненіе второго рода* **):

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2-Bx+A=0. \tag{16}$$

---

*) Н. Н. Маракуевъ. Элементарная алгебра. Часть II. М. 1887. Стр. 117, § 542.
**) Тамъ же.

Рѣшеніе уравненій (15) и (16) вытекаетъ само собою изъ рѣшенія уравненія (1); между тѣмъ въ учебникахъ алгебры объ уравненіи (1) обыкновенно не говорится ни слова, уравненія же (15) и (16) разсматриваются независимо одно отъ другого. На этотъ недостатокъ обращено вниманіе въ рецензіи учебника алгебры: „Cours d'Algèbre élémentaire, par J. F. (Alfred Mame, à Tours; Ch. Poussielgue, à Paris; 1896)", помѣщенной въ журналѣ: „Journal de Mathématiques élementaires. Publié sous la direction de M. de Longchamps. № 2. — Février 1897. Paris. Page: 43", и подписанной иниціалами: G. L. (вѣроятно: G. de Longchamps). Именно тамъ говорится слѣдующее:

„L'auteur me permettra-t-il une légère critique"?

„Lorsque, à la page 158, il parle des équations réciproques du quatrième degré, il distingue--je sais que cette distinction a été faite par „d'autres—des équations réciproques de première et de deuxième espèce. „Il n'y a, à bien envisager la chose, comme le faisaient les anciens auteurs „(Mayer et Choquet notamment, si ma mémoire ne me trompe pas) „qu'une seule équation réciproque du quatrième degré:

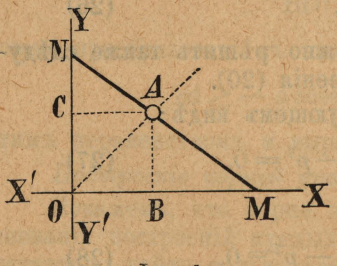
$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bkx + Ak^2 = 0,$$

„dans laquelle k est un paramètre quelconque. On peut donner à k les „valeurs $+1, -1$, et beaucoup d'autres; mais cela ne constitue pas des „genres différents et qu'il soit nécessaire de distinguer en deux espèces".

На это замѣчаніе слѣдовало бы обратить вниманіе составителямъ не только французскихъ, но и русскихъ учебниковъ алгебры.

§ 4. Къ рѣшенію уравненія вида (1) приводитъ между прочимъ **извѣстная задача Паппуса:**

Дана точка A *на биссектриссѣ прямого угла, составляемаго прямыми линіями* XX′ *и* YY′; *провести черезъ эту точку прямую линію такъ, чтобы отрѣзокъ ея въ одномъ изъ четырехъ угловъ, образуемыхъ прямыми* XX′ *и* YY′, *имѣлъ данную длину* p.



Фиг. 1.

Пусть (фиг. 1):

$$AB \perp XX', \quad AC \perp YY',$$

$$AB = AC = a, \quad MN = p,$$

$$BM = x, \quad CN = y.$$

Изъ подобія треугольниковъ ABM и NCA слѣдуетъ пропорція:

$$\frac{BM}{CA} = \frac{BA}{CN},$$

или

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{y}, \tag{17}$$

оукуда

$$xy = a^2. \tag{18}$$

Изъ прямоугольнаго треугольника MON выводимъ:

$$\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{MN}^2,$$

или

$$(x+a)^2 + (y+a)^2 = p^2. \tag{19}$$

Исключая y изъ уравненій (18) и (19), получаемъ уравненіе:

$$x^4 + 2ax^3 + (2a^2 - p^2)x^2 + 2a^3x + a^4 = 0. \tag{20}$$

Примѣняя къ этому уравненію критеріумъ (13), получаемъ:

$$1.(2a^3)^2 - (2a)^2.\,a^4 = 4a^6 - 4a^2.\,a^4 = 4a^6 - 4a^6 = 0. \tag{21}$$

Слѣдовательно приведеніе уравненія (20) къ виду (1) возможно, и для этого приведенія надо только на основаніи формулы (14) принять:

$$k = \frac{2a^3}{2a} = a^2, \tag{22}$$

тогда уравненіе (20) представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$x^4 + 2ax^3 + (2a^2 - p^2)x^2 + 2a\,.\,a^2x + 1.(a^2)^2 = 0. \tag{23}$$

Для рѣшенія этого уравненія дѣлимъ обѣ части его на x^2 и полагаемъ:

$$x + \frac{a^2}{x} = z; \tag{24}$$

тогда для опредѣленія z получимъ уравненіе:

$$z^2 + 2az - p^2 = 0. \tag{25}$$

Зная z, найдемъ x изъ уравненія (24), которому равносильно слѣдующее:

$$x^2 - zx + a^2 = 0. \tag{26}$$

§ 5. Систему уравненій (18) и (19) можно рѣшить также слѣдующимъ способомъ, не зависящимъ отъ уравненія (20).

Уравненіе (19) представляемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$x^2 + y^2 + 2a^2 + 2a(x+y) - p^2 = 0, \tag{27}$$

или на основаніи уравненія (18) такъ:

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2a(x+y) - p^2 = 0, \tag{28}$$

откуда

$$(x+y)^2 + 2a(x+y) - p^2 = 0. \tag{29}$$

Полагая здѣсь

$$x + y = t, \tag{30}$$

для опредѣленія t получаемъ уравненіе:

$$t^2 + 2at - p^2 = 0. \tag{31}$$

Изъ уравненій (18) и (30) слѣдуетъ, что x и y будутъ корни квадратнаго уравненія:

$$u^2 - tu + a^2 = 0. \qquad (32)$$

Уравненіе (31) дастъ для t два значенія: t_1 и t_2.

Положимъ, что изъ уравненія (32) при $t = t_1$ найдемъ для u два значенія u'_1 и u'_2 и при $t = t_2$ еще два значенія u''_1 и u''_2; тогда:

$$x_1 = u'_1, \quad y_1 = u'_2,$$

$$x_2 = u'_2, \quad y_2 = u'_1,$$

$$x_3 = u''_1, \quad y_3 = u''_2,$$

$$x_4 = u''_2, \quad y_4 = u''_1.$$

Послѣдняго способа рѣшенія задачи Паппуса мнѣ еще нигдѣ не приходилось встрѣчать.

С. Гирманъ (Варшава).

Построеніе корней тригонометрическихъ уравненій.

(*Окончаніе**)

Изслѣдованіе. Условіе пересѣченія и касанія круговъ выражается формулой

$$(c + d^2 \geqq BD^2 \geqq (c - d)^2,$$

которую посредствомъ равенства

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\Theta$$

можно преобразовать къ виду

$$cd \geqq -ab\cos\Theta \geqq -cd \text{ или } cd \geqq ab\cos\Theta.$$

Этимъ неравенствомъ и выражается условіе возможности задачи.

Построеніе корней уравненія $a^2\sin^2 x + b^2\sin^2(\omega - x) = c^2$.

Покажемъ, что корни этого уравненія могутъ быть отысканы на основаніи построеній предыдущей задачи. Прежде всего замѣтимъ, что достаточно найти только два корня, такъ какъ два другіе найдутся путемъ прибавленія къ нимъ по π. Затѣмъ очевидно, что уголъ ω, будучи положительнымъ, по причинѣ періодичности синуса долженъ быть меньше двухъ прямыхъ. Отсюда явствуетъ возможность двухъ случаевъ:

$$\omega \geqq \frac{\pi}{2} \text{ и } \omega \leqq \frac{\pi}{2}.$$

*) См. „Вѣстн. Оп. Физики“ № 249.

Случай $\omega \geqq \frac{\pi}{2}$. Отнеся къ этому случаю наши построенія, мы допустимъ, что они выполнены при условіи $\Theta = \omega - \frac{\pi}{2}$. Если обозначимъ $\angle BDA = x'$, то, принявъ во вниманіе свойства угловъ четыреугольника DFEC, получимъ $\angle BEA = \omega - x'$. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ BCD, ECA и ACB найдемъ:

$$BC = a \sin x', \quad AC = b \sin(\omega - x'), \quad BC^2 + AC^2 = AB^2$$

или

$$a^2 \sin^2 x' + b^2 \sin^2(\omega - x') = c^2.$$

Пусть теперь $\angle FDA' = x''$, тогда изъ разсмотрѣнія треугольниковъ DF'A' и A'C'E' получимъ $\angle BE'A' = \omega - x''$. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ BC'D, E'C'A' и A'C'B найдемъ:

$$BC' = a \sin x'', \quad A'C' = b \sin(\omega - x''), \quad BC'^2 + A'C'^2 = A'B^2$$

или

$$a^2 \sin^2 x'' + b^2 \sin^2(\omega - x'') = c^2.$$

Это значитъ, что въ случаѣ $\Theta = \omega - \frac{\pi}{2}$ корнями нашего уравненія служатъ углы BDA и FDA'.

Случай $\omega \leqq \frac{\pi}{2}$. На этотъ разъ за уголъ Θ слѣдуетъ принять $\frac{\pi}{2} - \omega$ и повторить прежнія построенія. Тогда подобно предыдущему легко убѣдиться, что въ этомъ случаѣ корнями уравненія

$$a \sin^2 x + b^2 \sin^2(\omega - x) = c^2$$

будутъ углы BDA' и FDA.

Изслѣдованіе. На основаніи тождествъ

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x \quad \text{и} \quad 2\sin^2(\omega - x) = 1 - \cos(2\omega - 2x)$$

наше уравненіе приводится къ виду

$$a^2 \cos 2x + b^2 \sin(2\omega - 2x) = a^2 + b^2 - 2c^2.$$

Условіе возможности этого уравненія, а слѣдовательно и даннаго, выражается формулой

$$(a^2 + b^2 - 2c^2)^2 \leqq a^4 + b^4 + 2a^2b^2 \cos 2\omega \quad \text{или} \quad ab \sin\omega \leqq cd.$$

Отсюда вытекаетъ, что задача имѣетъ четыре рѣшенія, если удовлетворяется неравенство

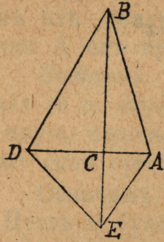
$$ab \sin\omega > cd,$$

два, когда оно обращается въ равенство, и невозможно во всѣхъ остальныхъ случаяхъ.

Построеніе корней уравненія $a^2 \operatorname{tg}^2 x + b^2 \operatorname{cotg}^2 x = c^2$.

Задача. *Черезъ концы гипотенузы даннаго прямоугольнаго треугольника провести параллельныя между собою прямыя такъ, чтобы прямая, соединяющая точки ихъ пересѣченія со сторонами прямого угла, имѣла данную величину.*

Пусть ABC будетъ данный прямоугольный треугольникъ, имѣющій катеты $BC = a$ и $AC = b$; пусть AE и BD будутъ искомыя параллельныя между собою прямыя, пересѣкающіяся со сторонами прямого угла въ точкахъ D и E, причемъ $DE = c$. Обозначивъ



Фиг. 9.

$$DC = \alpha,\ EC = \beta,\ \angle DBE = x',\ \angle DAE = \frac{\pi}{2} - x'$$

получимъ

$$\alpha = a\,\mathrm{tg}\,x',\ \beta = b\,\mathrm{cotg}\,x',\ \alpha\beta = ab$$

Это значитъ, что прямая DE есть касательная къ кругу, описанному изъ центра C радіусомъ $ab : c$. Такихъ касательныхъ при условіи $c^2 > 2ab$ существуютъ двѣ, а при условіи $c^2 = 2ab$ одна. Замѣчая, что

$$\alpha^2 + \beta^2 = c^2,$$

получаемъ:

$$a^2\mathrm{tg}^2 x' + b^2\mathrm{cotg}^2 x' = c^2.$$

Отсюда видно, что x' есть корень нашего уравненія. Такимъ же образомъ для другого положенія касательной DE найдется другой корень x''; остальные два будутъ $\pi - x'$ и $\pi - x''$.

Если къ обѣимъ частямъ уравненія

$$a^2\mathrm{tg}^2 x + b^2\mathrm{cotg}^2 x = c^2$$

прибавимъ ко $2ab$, то получимъ:

$$(a\,\mathrm{tg}\,x + b\,\mathrm{cotg}\,x)^2 = c^2 + 2ab.$$

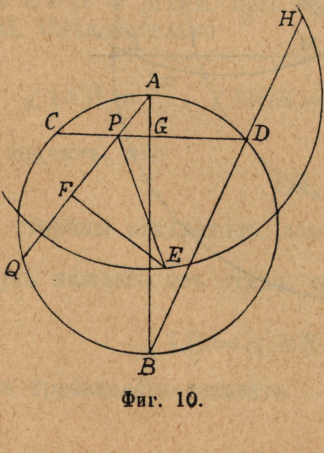
Это уравненіе распадается по два

$$a\,\mathrm{tg}\,x + b\,\mathrm{cotg}\,x = \sqrt{c^2 + 2ab}$$

$$a\,\mathrm{tg}(\pi - x) + b\,\mathrm{cotg}(\pi - x) = \sqrt{c^2 + 2ab},$$

которыя доставляютъ всѣ четыре корня, каждое по два.

Геометрическое мѣсто. Въ кругѣ проведены діаметръ $AB = 2r$ и перпендикулярная къ нему хорда CD на разстояніи $AG = a$ отъ точки A. Изъ точки A проведена прямая APQ, пересѣкающая хорду и окружность въ точкахъ P и Q и затѣмъ на отрѣзкѣ PQ, какъ на хордѣ, описана окружность даннымъ радіусомъ ϱ. Если черезъ E обозначимъ центръ этой окружности, то $PE = \varrho$. Предложимъ себѣ задачу найти геометрическое мѣсто точекъ E.



Фиг. 10.

Пусть F будетъ средина PQ. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ AFE и PFE получимъ:

$$AE^2 = FE^2 + AF^2,\ FE^2 = PE^2 - PF^2.$$

Обозначивъ $AP = x$, на основаніи подобія треугольниковъ APG и ABQ найдемъ:

$$AQ : AB = AG : AP \text{ или } AQ = \frac{2ra}{x}$$

Затѣмъ будемъ имѣть:

$$PQ = \frac{2ra - x^2}{x}, \; PF = \frac{2ra - x^2}{2x}, \; AF = \frac{2ra + x^2}{2x}.$$

Отсюда на основаніи формулы

$$AE^2 = PE^2 + AF^2 - PF^2$$

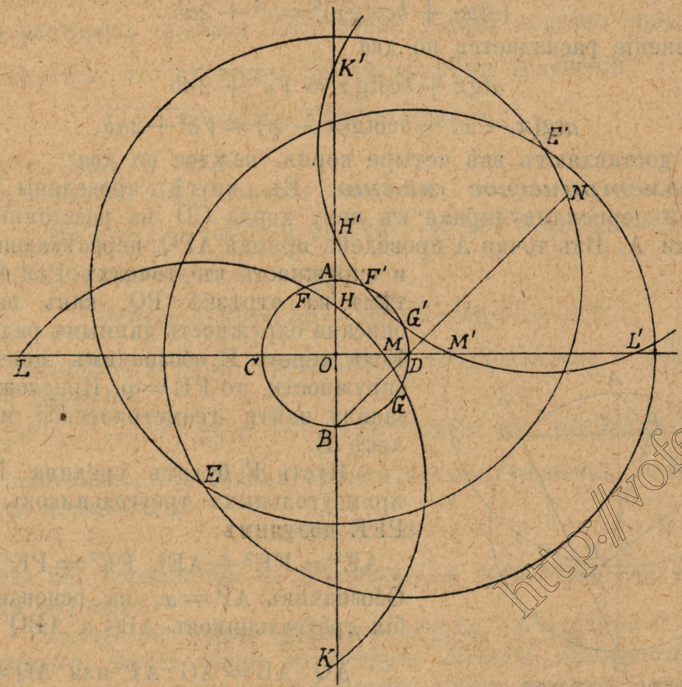
получимъ:

$$AE^2 = \varrho^2 + 2ra.$$

Это значитъ, что если на продолженіи BD отложимъ $DH = \varrho$ и изъ точки A, какъ изъ центра, опишемъ кругъ радіусомъ AH, то этотъ кругъ и будетъ искомымъ геометрическимъ мѣстомъ. Слѣдовательно:

Геометрическое мѣсто центровъ круговъ даннаго радіуса, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что всѣ прямыя, соединяющія точки пересѣченія любого изъ нихъ съ даннымъ кругомъ и съ данною хордою, проходятъ черезъ средину дуги, стягиваемой этою хордою, есть окружность описанная изъ средины дуги, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ гипотенузѣ такого треугольника, у котораго однимъ катетомъ служитъ прямая, соединяющая средину дуги съ концомъ ея, а другимъ катетомъ—данный радіусъ.

Примѣчаніе. Въ томъ случаѣ, когда прямая CD, оставаясь перпендикулярной къ AB, перестаетъ пересѣкать данный кругъ, искомымъ



Фиг. 11.

геометрическимъ мѣстомъ будетъ окружность, описанная изъ точки A, какъ изъ центра, радіусомъ $\sqrt{\varrho^2 - 2ra}$, гдѣ a означаетъ разстояніе точки A отъ прямой CD.

Задача. *Найти на кругѣ точку такъ, чтобы прямыя, соединяющія ее съ двумя смежными вершинами даннаго квадрата, вписаннаго въ кругъ, пересѣкались съ діагоналями квадрата въ точкахъ, отстоящихъ одна отъ другой на данное разстояніе.*

Означимъ это разстояніе черезъ c, а радіусъ даннаго круга черезъ a. Пусть 0 будетъ центръ даннаго круга, $AB = 2a$ и $CD = 2a$ его взаимно перпендикулярные діаметры, $AD = a\sqrt{2}$ сторона даннаго квадрата. Отложивъ $DN = \frac{c}{\sqrt{2}}$ на продолженіи BD, изъ точки A, какъ изъ центра, опишемъ кругъ радіусомъ AN; тѣмъ же радіусомъ изъ точки D, какъ изъ центра, опишемъ другой кругъ. Эти круги пересѣкутся между собою въ точкахъ E и E′. Пусть кругъ, описанный изъ E, какъ изъ центра, радіусомъ $DN = \frac{c}{\sqrt{2}}$, пересѣкается съ даннымъ кругомъ въ точкахъ F и G, съ прямою AB въ точкахъ H и K и съ прямою CD въ точкахъ M и L; а кругъ, описанный изъ точки E′, какъ изъ центра, радіусомъ $DN = \frac{c}{\sqrt{2}}$, пусть пересѣкается съ даннымъ кругомъ въ точкахъ F′ и G′, съ прямою AB въ точкахъ H′ и K′ и съ прямою CD въ точкахъ M′ и L′. Докажемъ, что точки F, G, F′ и G′ суть искомыя.

Въ самомъ дѣлѣ по свойству геометрическихъ мѣстъ, которыми мы здѣсь пользовались, каждая прямая

$$LF, \; GM, \; L'F' \text{ и } G'M'$$

должна пройти черезъ точку A, а каждая прямая

$$KG, \; FH, \; K'G' \text{ и } F'H'$$

черезъ точку D. Отсюда видно, что углы LFH и MGK составляютъ дополненія до двухъ прямыхъ относительно угловъ DFA и DGA; а углы L′F′H′ и M′G′K′ суть вертикальные относительно угловъ AF′D и AG′D. Слѣдовательно

$$\angle LFH = \frac{3\pi}{2}, \quad \angle MGK = \frac{3\pi}{2}, \quad \angle L'F'H' = \frac{3\pi}{2}, \quad \angle M'G'K' = \frac{3\pi}{2}.$$

Это значитъ, что

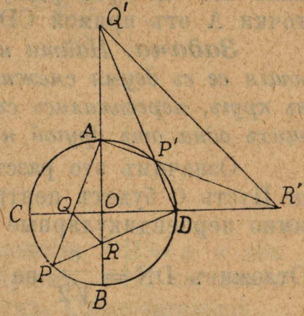
$$LH, \; MK, \; L'H', \; M'K'$$

суть стороны квадратовъ, вписанныхъ въ круги E и E′; а такъ какъ радіусъ каждаго изъ этихъ круговъ есть $\frac{c}{\sqrt{2}}$, то

$$LH = c, \; MK = c, \; L'H' = c, \; M'H' = c,$$

что и требовалось доказать.

Изслѣдованіе. Перемѣщая точку P по дугѣ DBCA и опредѣляя всякій разъ длину прямой QR, соединяющей точки пересѣченія діагоналей даннаго квадрата съ прямыми PA и PD, мы безъ труда замѣтимъ, что наименьшее значеніе QR соотвѣтствуетъ тому случаю, когда точка P лежитъ на срединѣ дуги BC. Подобнымъ образомъ можно убѣдиться, что когда точка P′, перемѣщающаяся по дугѣ AD, займетъ средину этой дуги, тогда осуществится minimum прямой Q′R′, соединяющей точки пересѣченія діагоналей даннаго квадрата съ прямыми P′A и P′D. Вычислимъ наименьшія значенія QR и Q′R′. Равнобедренные прямоугольные треугольники QOR и Q′OR′ даютъ



Фиг. 12.

$$QR = OQ\sqrt{2},\ \ Q'R' = OQ'\sqrt{2}.$$

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ AOQ и DOQ′ находимъ:

$$OQ = a\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = (\sqrt{2}-1)a,\ OQ' = a\,\mathrm{cotg}\frac{\pi}{8} = (\sqrt{2}+1)a.$$

Слѣдовательно

$$QR = (2-\sqrt{2})a,\ \ Q'R' = (2+\sqrt{2})a.$$

Имѣя это, не трудно заключить, что всѣхъ рѣшеній задача будетъ имѣть

4	когда	$c > (2+\sqrt{2})a$
3	„	$c = (2+\sqrt{2})a$
2	„	$(2+\sqrt{2})a > c > (2-\sqrt{2})a$
1	„	$c = (2-\sqrt{2})a$
0	„	$c < (2-\sqrt{2})a.$

Построеніе корней уравненія $a^2\mathrm{tg}^2x + a^2\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = c^2$.

Повторивъ всѣ построенія предыдущей задачи и введя обозначенія

$$\angle OAL = \angle ODK = x',\ \ \angle ODH = \angle OAM = x'',$$

$$\angle OAL' = \angle ODK' = x''',\ \ \angle ODH' = \angle OAM' = x'''',$$

получимъ:

$$x' - x'' = \frac{\pi}{4} \text{ и } x''' + x'''' = \frac{3\pi}{4}$$

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ

OAL, ODK, ODH, OAM,

OAL′, ODK′, ODH′, OAM′,

найдемъ:

$$OL = OK = a\,\mathrm{tg}x',\ \ OH = OM = a\,\mathrm{tg}x'',$$

$$OL' = OK' = a\,\mathrm{tg}x''',\ \ OH' = OM' = a\,\mathrm{tg}x''''.$$

Принявъ во вниманіе, что

$$OL^2 + OH^2 = LH^2 = c^2, \quad OK^2 + OM^2 = KM^2 = c^2,$$

$$OL'^2 + OH'^2 = L'H'^2 = c, \quad OK'^2 + OM'^2 = K'M'^2 = c^2,$$

будемъ имѣть:

$$-a^2\mathrm{tg}^2x' + a^2\mathrm{tg}^2x'' = c^2, \quad a^2\mathrm{tg}^2x''' + a^2\mathrm{tg}^2x'''' = c^2.$$

Имѣя это, легко уже заключить, что корни уравненія

$$a^2\mathrm{tg}^2x + a^2\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = c^2$$

суть углы:

$$x', \ \pi - x'', \ \pi - x''', \ \pi - x''''.$$

Построеніе корней уравненія $a^2\mathrm{tg}^2x + a^2\mathrm{tg}^2(\omega - x) = c^2$.

Это уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ

$$(a\mathrm{tg}x + a\mathrm{tg}(\omega - x) + a\mathrm{cotg}\omega)^2 = c^2 + 2a^2 + a^2\mathrm{cotg}^2\omega.$$

Пусть $d' > 0$ и $d'' < 0$ будутъ корни уравненія

$$d^2 + 2ad\,\mathrm{cotg}\omega = c^2 + 2a^2.$$

Тогда предыдущее уравненіе распадется на два такихъ:

$$a\mathrm{tg}x + a\mathrm{tg}(\omega - x) = d'$$

$$a\mathrm{tg}x + a\mathrm{tg}(\omega - x) = d''$$

Будемъ разумѣть подъ ω уголъ, меньшій двухъ прямыхъ. Условіе возможности перваго уравненія будетъ

$$d' \geqq 2a\sin\omega - d'\cos\omega \ \text{ или } \ d' \geqq 2a\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}.$$

Поставивъ сюда на мѣсто d' его значеніе, получимъ:

$$c \geqq a\sqrt{2}\ \mathrm{tg}\frac{\omega}{2}$$

Что касается уравненія

$$a\mathrm{tg}x + a\mathrm{tg}(\omega - x) = d'' \ \text{ или } \ a\mathrm{tg}(\pi - x) + a\mathrm{tg}\Big(\pi - \omega - (\pi - x)\Big) = -d'',$$

то условіе его существованія будетъ:

$$-d'' \geqq 2a\sin a - d''\cos\omega \ \text{ или } \ -d'' \geqq 2a\,\mathrm{cotg}\frac{\omega}{2}.$$

Поставивъ сюда на мѣсто d'' его значеніе, получимъ:

$$c \geqq a\sqrt{2}\,\mathrm{cotg}\frac{\omega}{2}.$$

На основаніи сказаннаго не трудно сосчитать число рѣшеній задачи.

При этомъ надо различать два случая

$$0 < \omega < \frac{\pi}{2} \text{ и } \frac{\pi}{2} < \omega < \pi.$$

Въ первомъ случаѣ всѣхъ рѣшеній будетъ:

4	когда	$c > a\sqrt{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}$
3	„	$c = a\sqrt{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}$
2	„	$a\sqrt{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} > c > a\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$
1	„	$c = a\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$
0	„	$c < a\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$

Во второмъ случаѣ всѣхъ рѣшеній будетъ:

4	когда	$c > a\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$
3	„	$c = a\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$
2	„	$a\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} > c > a\sqrt{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}$
1	„	$c = a\sqrt{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}$
0	„	$c < a\sqrt{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}$

Построеніе угла x, которое должно быть исполнено при посредствѣ уравненій

$$a\operatorname{tg}x + a\operatorname{tg}(\omega - x) = d' \text{ и } a\operatorname{tg}x + a\operatorname{tg}(\omega - x) = d'',$$

даетъ ключъ къ рѣшенію слѣдующей задачи.

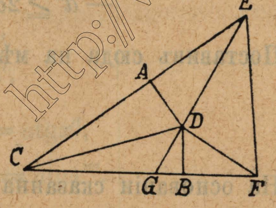
По углу между двумя взаимно противоположными сторонами и по длинѣ двухъ другихъ сторонъ построить четыреугольникъ такъ, чтобы діагонали его были взаимно перпендикулярны и чтобы онѣ были одинаково наклонены къ одной изъ данныхъ сторонъ.

Задача. *Даны двѣ пересѣкающіяся прямыя и точка, лежащая въ равныхъ отъ нихъ разстояніяхъ. Помѣстить между этими прямыми прямолинейный отрѣзокъ данной длины такъ, чтобы изъ данной точки онъ былъ виденъ подъ прямымъ угломъ.*

Пусть CE и CF будутъ данныя прямыя, пересѣкающіяся между собою подъ угломъ $ECF = \omega$, а D—данная точка, лежащая въ разстояніяхъ $DA = a$ и $DB = a$ отъ сторонъ угла. Означимъ черезъ c длину даннаго отрѣзка и вообразимъ, что задача рѣшена, именно:

$$EF = c \text{ и } \angle EDF = \frac{\pi}{2}.$$

Продолжимъ ED до пересѣченія съ CF въ точкѣ G и пусть $\angle EGF = x$; тогда изъ прямо-



Фиг. 13.

угольныхъ треугольниковъ DAE и DBF получимъ:

$$DE=\frac{a}{\sin(x-\omega)} \text{ и } DF=\frac{a}{\cos x}$$

и согласно условію найдемъ:

$$\frac{a^2}{\sin^2(\omega-x)}+\frac{a^2}{\cos^2 x}=c^2.$$

Вычитая изъ каждой части этого уравненія на $2a^2$, будемъ имѣть:

$$a^2\operatorname{tg}^2 x+a^2\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\omega-x\right)=c^2-2a^2.$$

Это уравненіе сохраняетъ свой видъ независимо отъ того, будетъ ли ω острый или тупой уголъ. Число его рѣшеній узнается по таблицѣ:

	$0<\omega<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<\omega<\pi$
4	$a\sqrt{2}<c\cos\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$	$a\sqrt{2}<c\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$
3	$a\sqrt{2}=c\cos\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$	$a\sqrt{2}=c\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$
2	$c\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>a\sqrt{2}>c\cos\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$	$c\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{4}\right)>a\sqrt{2}>c\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$
1	$a\sqrt{2}=c\cos\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$	$a\sqrt{2}=c\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$
0	$a\sqrt{2}>c\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$	$a\sqrt{2}>c\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

Построеніе производится, когда ω острый уголъ, при посредствѣ уравненій

$$a\operatorname{tg}x+a\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\omega-x\right)=a\operatorname{tg}\omega+\sqrt{c^2+a^2\operatorname{tg}^2\omega} \quad \text{и}$$

$$a\operatorname{tg}(\pi-x)+a\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\omega-(\pi-x)\right)=-a\operatorname{tg}\omega+\sqrt{c^2+a^2\operatorname{tg}^2\omega},$$

а когда ω тупой уголъ, при посредствѣ уравненій:

$$a\operatorname{tg}x+a\operatorname{tg}\left(\omega-\frac{\pi}{2}-x\right)=a\operatorname{tg}\omega+\sqrt{c^2+a^2\operatorname{tg}^2\omega} \quad \text{и}$$

$$a\operatorname{tg}(\pi-x)+a\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\omega-(\pi-x)\right)=-a\operatorname{tg}\omega+\sqrt{c^2+a^2\operatorname{tg}^2\omega}.$$

Задачи. Въ заключеніе предложимъ нѣсколько вопросовъ, которые въ той же мѣрѣ могутъ способствовать къ интерпретаціи изложенныхъ построеній, сколько сами нуждаются въ этихъ построеніяхъ для своего рѣшенія.

1. Черезъ одну изъ вершинъ треугольника провести прямую такъ, чтобы сумма или разность ея разстояній отъ двухъ другихъ вершинъ имѣла данную величину.

2. Черезъ двѣ вершины треугольника провести прямыя параллельныя между собою такъ, чтобы сумма или разность ихъ разстояній отъ третьей вершины треугольника имѣла данную величину.

3. По длинѣ двухъ взаимно противоположныхъ сторонъ и по углу между ними построить четыреугольникъ такъ, чтобы его діагонали были между собою перпендикулярны.

4. По углу между двумя противоположными сторонами и по длинѣ взаимно-перпендикулярныхъ діагоналей построить четыреугольникъ такъ, чтобы одна изъ діагоналей дѣлилась другой на части, находящіяся въ данномъ отношеніи.

5. По суммѣ двухъ сторонъ и углу между ними построить треугольникъ такъ, чтобы перпендикуляръ, опущенный изъ вершины этого угла на противоположную сторону, имѣлъ данную величину.

6. Черезъ точку, данную на биссектрисѣ угла ω, провести двѣ прямыя подъ угломъ Θ такъ, чтобы длина ломаной, полученной внутри угла ω, имѣла данную величину.

7. На прямой описаны два круга, одинъ какъ на хордѣ, другой какъ на діаметрѣ. Черезъ средину дуги, стягиваемой хордой, провести прямую такъ, чтобы часть ея, заключенная между кругами, имѣла данную величину.

8. Даны два пересѣкающихся круга. Провести между ними прямую данной длины такъ, чтобы изъ точки пересѣченія круговъ она была видна подъ прямымъ угломъ.

9. Построить параллелограммъ зная его углы, сумму квадратовъ діагоналей и разстояніе одной изъ нихъ отъ противолежащей вершины.

П. Флоровъ (Ст. Урюпинская).

Начало возможныхъ перемѣщеній въ элементарномъ курсѣ физики.

Законъ равновѣсія тѣлъ поставленныхъ или вовсе не доказывается въ учебникахъ физики, или въ доказательство его приводится нѣсколько соображеній, совершенно недостаточныхъ. И то, и другое одинаково плохо, особенно въ началѣ курса, потому что, сообщая изложенію неопредѣленный и неустойчивый характеръ, путаетъ понятія учащихся о томъ, какого пониманія предмета должны они добиваться при его изученіи. Наши собственныя попытки устранить этотъ недостатокъ оставались такъ-же безуспѣшными и наконецъ привели насъ къ необходимости изложенія начала возможныхъ перемѣщеній. Сначала мы даемъ нѣсколько примѣровъ, объясняющихъ смыслъ „начала" и оправдывающихъ его на тѣхъ случаяхъ, гдѣ равновѣсіе можетъ быть доказано соображеніями другого рода, потомъ примѣняемъ къ доказательству законовъ равновѣсія тѣлъ, подпертыхъ въ одной точкѣ, и тѣлъ поставленныхъ. Изложеніе въ такомъ видѣ совершенно доступно пониманію учениковъ гимназій и только незначительно удлиняетъ курсъ.

I. Начало возможныхъ перемѣщеній.

Для равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая сила образовала прямой или тупой уголъ со всякимъ перемѣщеніемъ, которое возможно для точки приложенія ея.

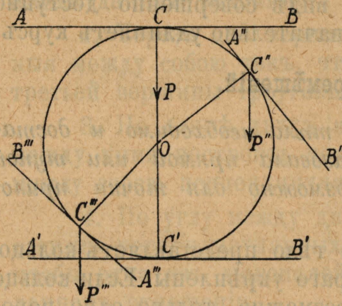
I. Положимъ, что несвободное твердое тѣло представляетъ кольцо, надѣтое на твердый стержень, концы котораго укрѣплены. Если кольцо находится у конца стержня, то для него возможно только одно перемѣщеніе по направленію самого стержня къ другому его концу. По какому бы направленію ни дѣйствовала сила,— если напр. привяжемъ къ кольцу нитку и будемъ ее натягивать въ любую сторону, — разлагая эту силу на двѣ составляющія, одну по направленію стержня, другую по направленію перпендикулярному, легко убѣдимся, что обѣ составляющія уничтожаются сопротивленіями и тѣло остается въ равновѣсіи, если дѣйствующая сила образуетъ съ направленіемъ стержня тупой уголъ; если же этотъ уголъ острый, то составляющая, направленная по длинѣ стержня, не встрѣчаетъ сопротивленія, и кольцо приходитъ въ движеніе.

2. Если кольцо находится не у конца стержня, для него возможны перемѣщенія къ тому и другому концу. Тогда всѣ направленія силы, кромѣ перпендикулярныхъ къ стержню, образуютъ либо съ однимъ, либо съ другимъ перемѣщеніемъ острый уголъ; по предыдущему убѣдимся, что равновѣсія не будетъ и кольцо станетъ двигаться по тому направленію, которое образуетъ съ силой острый уголъ. Только когда сила перпендикулярна къ стержню, она образуетъ съ обоими возможными перемѣщеніями прямые углы. Въ этомъ случаѣ сила уничтожается сопротивленіемъ стержня, и равновѣсіе сохраняется.

3. Пусть несвободное твердое тѣло представляетъ шаръ, лежащій на твердой горизонтальной плоскости. Для него возможны перемѣщенія по всевозможнымъ направленіямъ, идущимъ параллельно плоскости, или вверхъ отъ нея. Если сила направлена вертикально внизъ, то она образуетъ со всѣми возможными перемѣщеніями прямые или тупые углы. Но сила въ данномъ случаѣ уничтожается сопротивленіемъ плоскости, и тѣло останется въ равновѣсіи. При всякомъ другомъ направленіи силы, она будетъ съ нѣкоторыми изъ возможныхъ перемѣщеній образовать острые углы, и равновѣсія не будетъ. Въ этомъ легко убѣдиться, разлагая силу на слагающія, одну—перпендикулярную плоскости, другую—параллельную плоскости; послѣдняя составляющая не встрѣтитъ никакого сопротивленія.

II. Равновѣсіе тяжелаго тѣла, подпертаго въ одной точкѣ.

Для тѣла, укрѣпленнаго въ одной точкѣ, возможны только вращенія около точки опоры. Каждая точка такого тѣла, а значитъ и центръ тяжести, можетъ перемѣщаться по всевозможнымъ путямъ, какіе можно провести на поверхности шара, имѣющаго центромъ точку опоры, а радіусомъ—разстояніе отъ данной точки до точки опоры. Пусть кругъ $CC''C'C'''$ (черт. 1) представляетъ сѣченіе шара, по которому можетъ перемѣщаться центръ тяжести даннаго тѣла, вертикальной плоскостью, проходящей черезъ точку опоры и центръ тяжести.



Фиг. 1.

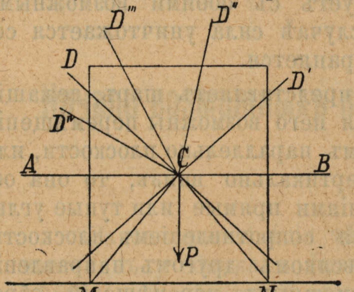
Если центръ тяжести лежитъ въ точкѣ C, на одной вертикальной линіи съ точкой O, то дуги CC'' и CC''' представляютъ два изъ возможныхъ для точки C перемѣщеній. Направленіе ихъ въ точкѣ C представляется касательной AB къ кругу $CC''C'C'''$, проведенной въ точкѣ C. Вѣсъ тѣла направленъ по радіусу круга CO и образуетъ съ обоими перемѣщеніями прямые углы. То же будетъ и для всѣхъ другихъ возможныхъ перемѣщеній, лежащихъ въ другихъ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ вертикальную линію CO. Слѣд. сила образуетъ прямые углы со всѣми возможными для точки C перемѣщеніями, и тѣло будетъ въ равновѣсіи.

То же относится и къ положенію центра тяжести въ точкѣ C'.

Во всѣхъ другихъ положеніяхъ центра тяжести, напр. въ точкѣ C'', сила тяжести образуетъ острый уголъ съ какими нибудь изъ возможныхъ перемѣщеній, напр. съ $C''B''$, въ точкѣ C''' — съ $C'''A'''$. Во всѣхъ этихъ положеніяхъ равновѣсія не будетъ.

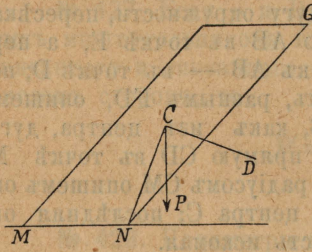
III. Равновѣсіе тяжелыхъ тѣлъ поставленныхъ.

Пусть MNPQ (черт. 2) предоставляетъ разрѣзъ какого-либо тѣла, поставленнаго на горизонтальной плоскости MN, какой нибудь вертикальной плоскостью, проходящей черезъ центръ тяжести тѣла. Пусть вертикальная линія, проходящая черезъ центръ тяжести, падаетъ внутри площади опоры MN. Всѣ возможныя для точки C перемѣщенія направлены или вверхъ отъ горизонтальной плоскости AB, проведенной черезъ центръ тяжести, или въ самой плоскости AB. Въ самомъ дѣлѣ, не отрываясь совсѣмъ отъ плоскости опоры, тѣло можетъ или скользить по ней, или вращаться около точекъ M и N, краевъ площади опоры. Въ первомъ случаѣ пути точки C лежатъ въ плоскости AB, во второмъ возможныя для точки C пере-



Фиг. 2.

мѣщенія будутъ направлены по прямымъ CD и CD′, касательнымъ въ точкѣ C къ дугамъ, описаннымъ изъ точекъ M и N радіусами MC и NC. Если бы все тѣло поднялось съ плоскости MN, то точка C стала-бы перемѣщаться по одному изъ направленій CD″, CD‴, CD^{VI}; т. е. вверхъ отъ плоскости AB. Въ первомъ случаѣ, когда точка C движется



Фиг. 3.

въ плоскости AB, сила образуетъ съ перемѣщеніемъ прямой уголъ, во всѣхъ остальныхъ случаяхъ — тупые углы. Слѣд. тѣло останется въ равновѣсіи.

Если вертикальная линія, проходящая черезъ центръ тяжести, падаетъ внѣ площади опоры (черт. 3), то одно изъ возможныхъ для точки C перемѣщеній, при вращеніи тѣла около точки N, будетъ направлено по прямой CD, касательной въ точкѣ C къ дугѣ, описанной изъ точки N радіусомъ NC. CP образуетъ съ CD острый уголъ, и равновѣсія не будетъ.

Отсюда законъ равновѣсія тѣлъ поставленныхъ: *для равновѣсія тѣла поставленнаго необходимо и достаточно, чтобы вертикальная линія, проходящая черезъ центръ тяжести тѣла, падала внутри площади опоры.*

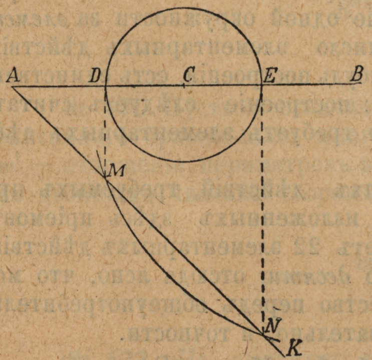
Б. Гернъ (Смоленскъ).

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

О построеніи одного геометрическаго мѣста точекъ.

Въ учебникахъ обыкновенно указываютъ слѣдующій способъ построенія *геометрическаго мѣста точекъ, для которыхъ сумма квадратовъ разстояній отъ двухъ данныхъ точекъ была бы равна квадрату даннаго отрѣзка m.* *)

Пусть данныя точки суть A и B. Строимъ при точкѣ A уголъ BAK=45°, изъ точки B, какъ изъ центра, радіусомъ *m* описываемъ дугу, которая вообще пересѣчетъ прямую AK въ двухъ точкахъ: M и N, затѣмъ изъ точекъ M и N опускаемъ перпендикуляры MD и NE на прямую AB; окужность, построенная на отрѣзкѣ DE, какъ на діаметрѣ, есть искомая. (Если дуга, описанная изъ центра B радіусомъ *m* коснется прямой AK, что имѣется только одна точка C, середина отрѣзка AB, удовлетворяющая требованію, если же дуга и прямая AK не имѣютъ общихъ точекъ, то нѣтъ ни одной точки, удовлетворяющей требова-

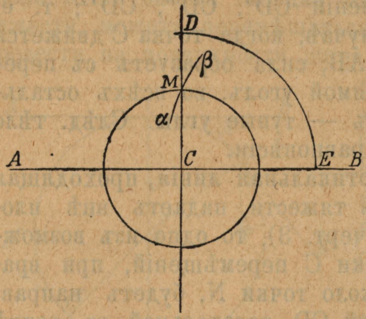


Фиг. 1

*) Доказывается сначала отдѣльно, что искомое геометрическое мѣсто есть окружность круга, центръ котораго совпадаетъ съ серединою отрѣзка, соединяющаго данныя двѣ точки.

нію задачи). Доказательство описаннаго построенія общеизвѣстно.

Вмѣсто приведеннаго рѣшенія задачи я предлагаю слѣдующее болѣе простое рѣшеніе. Въ серединѣ C отрѣзка AB возставимъ къ послѣднему перпендикуляръ, затѣмъ радіусомъ $m:2$ опишемъ изъ точки C, какъ изъ центра, дугу окружности, пересѣкающую прямую AB въ точкѣ E, а перпендикуляръ къ AB — въ точкѣ D; потомъ радіусомъ, равнымъ FD, опишемъ изъ точки B, какъ изъ центра, дугу, встрѣчающую прямую CD въ точкѣ M, и, наконецъ, радіусомъ CM опишемъ окружность изъ центра C; послѣдняя окружность и есть искомая.



Фиг. 2.

Доказательство. Достаточно доказать, что точка M принадлежитъ искомой окружности. Имѣемъ *).

$$\overline{MB}^2 + \overline{MA}^2 = 2.\ \overline{MB}^2 = 2.\ \overline{DE}^2,$$

но:

$$\overline{DE}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 = 2.\ \overline{CE}^2 = 2.\left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m^2,$$

слѣдовательно:

$$\overline{MB}^2 + \overline{MA}^2 = m^2,$$

что и требовалось доказать.

Изслѣдованіе. Въ общемъ случаѣ дуга $\alpha\beta$ пересѣкаетъ прямую DC, и тогда окружность строится, какъ было показано. Если дуга $\alpha\beta$ касается прямой DC, то точкою касанія можетъ служить только точка C, и въ этомъ случаѣ эта точка есть единственная, удовлетворяющая условію. Наконецъ, если дуга $\alpha\beta$ и прямая CD не имѣютъ общихъ точекъ, то нѣтъ совсѣмъ точекъ, удовлетворяющихъ требованію задачи.

Построеніе рѣшенія задачи тѣмъ точнѣе, чѣмъ меньше приходится при построеніи проводить окружностей и прямыхъ линій. Считая проведеніе одной прямой линіи и построеніе одной окружности за *элементарныя* дѣйствія, можно сказать, что число элементарныхъ дѣйствій, необходимыхъ для выполненія какого-нибудь построенія, есть единственное мѣрило простоты этого построенія: построеніе слѣдуетъ считать тѣмъ болѣе простымъ чѣмъ меньше оно требуетъ элементарныхъ дѣйствій.

Если сосчитать число элементарнщхъ дѣйствій, требуемыхъ при рѣшеніи нашей задачи по каждому изъ изложенныхъ здѣсь пріемовъ, то окажется, что первое рѣшеніе требуетъ 22 элементарныхъ дѣйствій, рѣшеніе же, предлагаемое мною, только *десяти*; отсюда ясно, что мое рѣшеніе имѣетъ значительное преимущество передъ общеупотребительнымъ по отношенію простоты, а, слѣдовательно, и точности.

М. Фельдблюмъ (Варшава).

*) Вспомогательныя линіи, нужныя для доказательства, на чертежѣ не отмѣчены.

ЗАДАЧИ.

Рѣшить тригонометрически слѣдующія задачи изъ собранія геометрическихъ задачъ Пржевальскаго (№№ 427—431).

№ 427. Если p и P периметры вписаннаго и описаннаго правильныхъ многоугольниковъ того же числа сторонъ и p' и P' периметры вписаннаго и описаннаго правильныхъ многоугольниковъ съ двойнымъ числомъ сторонъ, то

$$P' = \frac{2Pp}{P+p} \text{ и } p'^2 = P'.p.$$

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 428. Периметры вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ о n, $2n$ и $4n$ сторонахъ суть: p, p' и p''; показать, что

$$p''^2 = \frac{2p'^3}{p+p'}$$

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 429. Обозначимъ черезъ r и R соотвѣтственно радіусы вписанной и описанной окружности для даннаго правильнаго многоугольника, а черезъ r' и R' соотвѣтственно радіусы вписанной и описанной окружности для правильнаго многоугольника съ двойнымъ числомъ сторонъ, но имѣющаго одинаковый периметръ съ первымъ; показать, что

$$r' = \frac{R+r}{2} \text{ и } R^2 = Rr'.$$

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 430. Обозначимъ соотвѣтственно буквами R, R' и R'' радіусы описанныхъ окружностей около многоугольниковъ, имѣющихъ одинъ и тотъ же периметръ, о n, $2n$ и $4n$ сторонахъ; доказать, что

$$R''^2 = \frac{R'^2(R+R')}{2R}.$$

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 431. Пусть m означаетъ отношеніе периметровъ вписаннаго и описаннаго правильныхъ многоугольниковъ того же числа сторонъ, а m' — отношеніе периметровъ вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ съ двойнымъ числомъ сторонъ противъ первыхъ. Показать, что

$$m' = \sqrt{\frac{m+1}{2}}.$$

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 432. На выпуклую поверхность прозрачнаго полушара въ плоскости большого круга падаетъ лучъ, образующій уголъ α съ перпендикуляромъ къ плоскости, ограничивающей этотъ полушаръ. Показать, что этотъ лучъ послѣ 2 внутреннихъ отраженій выходитъ изъ полушара съ наибольшимъ отклоненіемъ, когда синусъ угла паденія равенъ

$$\sqrt{\frac{9-n^2}{8}},$$

гдѣ n есть показатель преломленія.

Кромѣ того показать, что лучъ послѣ трехъ внутреннихъ отраженій выходитъ съ наибольшимъ отклоненіемъ, когда синусъ угла паденія равенъ

$$\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

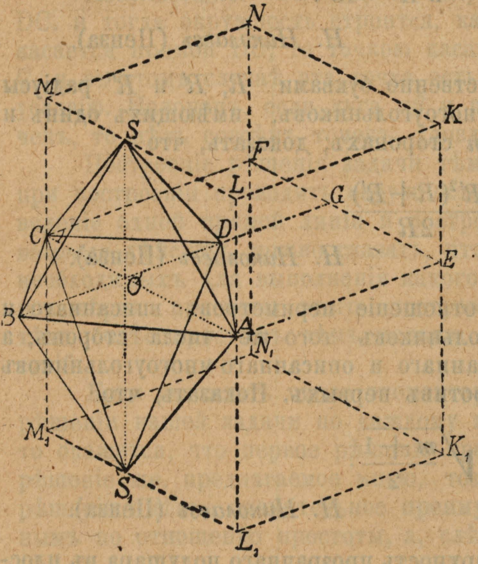
РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 53 (1 сер.). Что слѣдуетъ понимать подъ абсолютнымъ нулемъ температуры?

Отвѣтъ читатели найдутъ въ статьѣ: проф. Н. Шиллера: „Абсолютная скала температуръ" (стр. 75—79, V-го сем. В. О. Ф.).

Н. Соколовъ (Кіевъ), *Н. И.* (Тула).

№ 216 (2 сер.). Доказать теорему: если три діагонали октаэдра пересѣкаются въ одной точкѣ, то объемъ его равняется шестой части объема параллелепипеда, три ребра котораго соотвѣтственно равны тремъ діагоналямъ октаэдра, а углы между ребрами равны угламъ между діагоналями.



Фиг. 1.

Пусть діагонали AC, BD и SS_1 октаэдра $SABCDS_1$ пересѣкаются въ точкѣ O (см. черт. 1). Въ плоскости $ABCD$ строимъ параллелограммъ $ACEF$ такъ, чтобы уголъ ACF равнялся углу AOD и $CF=BD$; тогда площадь параллелограмма $ACEF$ равновелика удвоенной площади четыреугольника $ABCD$ (такъ какъ площадь $OCFG$ равна удвоенной площади BCD и площадь $AOGE$ равна удвоенной площади ABD). Строимъ теперь параллелепипедъ $KLMNK_1L_1M_1N_1$ такъ, чтобы $\angle ACM_1 = \angle AOS_1$, $CM_1 = OS_1$ и $CM = OS$; ребра этого параллелепипеда соотвѣтственно равны тремъ діагоналямъ октаэдра, а углы между ребрами равны угламъ между діагоналями.

Такъ какъ пирамида есть треть призмы, имѣющей съ ней одинаковое основанiе и высоту, то

$$\text{об.}\, S_1ABCD = \frac{\text{об.}\, ACFEK_1L_1M_1N_1}{6} \text{ и об.}\, SABCD = \frac{\text{об.}\, ACFEKLMN}{6}.$$

Сложивъ эти равенства, находимъ:

$$\text{об.}\, SABCDS_1 = \frac{\text{об.}\, KLMNK_1L_1M_1N_1}{6}.$$

К. Щиголевъ (Курскъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 253 (2 сер.). Ради упражненiй мальчику задавали вписывать мѣломъ табличку умноженiя въ клѣтки большой шахматной доски. Вскорѣ онъ испортилъ двѣ изъ этихъ клѣтокъ. При нѣкоторомъ положенiи доски передъ мальчикомъ сумма чиселъ, вписанныхъ имъ въ испорченныя клѣтки, была наименьшею; при трехъ другихъ положенiяхъ доски, получающихся при поворачиванiи ея (по направленiю часовой стрѣлки) на прямой уголъ, сумма этихъ двухъ чиселъ возрастала всякiй разъ на 9, т. е. если въ первомъ положенiи эта сумма была x, то во второмъ она получалась $x+9$, въ третьемъ — $x+2.9$ и въ четвертомъ — $x+3.9$.

Предполагая, что при всѣхъ положенiяхъ шахматной доски мальчикъ записывалъ на ней числа пиѳагоровой таблички безъ ошибокъ, опредѣлить, какiя двѣ клѣтки были испорчены.

Пусть первая изъ испорченныхъ клѣтокъ лежитъ на x-той горизонтали сверху и y-ой вертикали слѣва, а вторая—лежитъ на x_1-ой горизонтали сверху и y_1-ой вертикали слѣва; тогда, принимая во вниманiе, какъ составляется пиѳагорова таблица, сумма чиселъ, вписанныхъ въ испорченныя клѣтки при первомъ положенiи доски равна $xy+x_1y_1$.

Во второмъ положенiи первая клѣтка будетъ находиться на y-ой горизонтали сверху и $(9-x)$-ой вертикали, а вторая изъ испорченныхъ клѣтокъ будетъ находиться на y_1-й горизонтали и $(9-x_1)$-ой вертикали, и сумма чиселъ, вписанныхъ въ испорченныя клѣтки, при второмъ положенiи будетъ $(9-x)y+(9-x_1)y_1$; подобнымъ же образомъ найдемъ, что при третьемъ положенiи сумма чиселъ, вписанныхъ въ испорченныя клѣтки, равна $(9-x)(9-y)+(9-x_1)(9-y_1)$ и при четвертомъ положенiи — $(9-y)x+(9-y_1)x_1$.

Согласно условiю задачи имѣемъ:

$$(9-x)y+(9-x_1)y_1 = xy+x_1y_1+9 \quad \ldots \quad (1)$$

$$(9-x)(9-y)+(9-x_1)(9-y_1) = xy+x_1y_1+18 \quad \ldots \quad (2)$$

$$(9-y)x+(9-y_1)x_1 = xy+x_1y_1+27 \quad \ldots \quad (3)$$

Преобразовавъ ур-iе (2), получимъ:

$$x+y+x_1+y_1 = 16 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

вычитая (1) изъ (3), получимъ:

$$x-y+x_1-y_1 = 2 \quad \ldots\ldots \quad (5);$$

складывая и вычитывая (4) и (5), получимъ:

$$x+x_1=9;\ y+y_1=7.$$

Опредѣливъ изъ послѣднихъ равенствъ x_1 и y_1 и вставивъ въ (1), находимъ:

$$(9-x)y+(7-y)x=xy+(9-x)(7-y)+9,$$

откуда

$$x=\frac{9(4-y)}{7-2y}.$$

Такъ какъ x должно быть цѣлымъ положительнымъ числомъ и при томъ не больше 8, то y можетъ имѣть только одно значеніе, именно 2, откуда

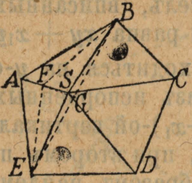
$$x=6;\ x_1=3;\ y_1=5,$$

т. е. первая клѣтка лежитъ на пересѣченіи шестой горизонтали и второй вертикали; а вторая клѣтка находится на пересѣченіи третьей горизонтали и пятой вертикали.

К. Шиголевъ (Курскъ); *В. Костинъ* (Симбирскъ).

№ 462 (2 сер.). Показать, что синусъ двуграннаго угла правильнаго икосаэдра равенъ $^2/_3$.

Пусть $SABCDE$—одинъ изъ пятигранныхъ угловъ правильнаго икосаэдра. Проведемъ плоскость BFE, перпендикулярную къ ребру AS и соединимъ средину G линіи BE съ точкой F. Очевидно, что $FG \perp BE$. Имѣемъ:



Фиг. 1.

$$\sin BFG=\frac{BG}{BF}.$$

Изъ треугольника ABG находимъ

$$\frac{BG}{AB}=\cos ABG=\cos 36^0,$$

а изъ треугольника ABF—

$$\frac{BF}{AB}=\cos ABF=\cos\ 30^0.$$

Поэтому

$$\sin BFG=\frac{\cos 36^0}{\cos 30^0}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}},$$

а

$$\sin BFE=\sin 2BFG=2\sin BFG\,.\cos BFG=\,^2/_3.$$

К. Щиголевъ (Курскъ); *С. Бабанская* (Тифлисъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 560 (2 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$ax^2 + by^2 = cxy$$
$$a_1y^2 + b_1z^2 = c_1zy$$
$$a_2z^2 + b_2x^2 = c_2zx$$

Изъ предположенія, что одно изъ неизвѣстныхъ равно нулю, вытекаетъ, что и два другія равны нулю; для доказательства этого предложенія достаточно подставить 0 вмѣсто одного изъ неизвѣстныхъ въ соотвѣтствующія уравненія данной системы. Такимъ образомъ x, y, z могутъ либо одновременно равняться нулю, — и это рѣшеніе всегда удовлетворяетъ данной системѣ, — либо одновременно должны быть отличны отъ нуля.

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ предложенная система тожественна съ системой

$$\begin{aligned} &a\left(\frac{x}{y}\right)^2 - c\left(\frac{x}{y}\right) + b = 0 \\ &a_1\left(\frac{y}{z}\right)^2 - c_1\left(\frac{y}{z}\right) + b_1 = 0 \qquad (1) \\ &a_2\left(\frac{z}{x}\right)^2 - c_2\left(\frac{z}{x}\right) + b_2 = 0, \end{aligned}$$

откуда можно найти вообще по два значенія для отношеній $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$; каждое изъ этихъ двухъ значеній мы безразлично обозначимъ соотвѣтственно черезъ A, B, C.

Такъ какъ

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x} = 1,$$

то, если никакая комбинація рѣшеній не даетъ

$$A.B.C = 1,$$

предложенная система же имѣетъ другихъ рѣшеній кромѣ $x = y = z = 0$.

Наоборотъ, каждая комбинація рѣшеній, дающая

$$A.B.C = 1,$$

доставляетъ безконечное число рѣшеній, заключенныхъ въ формулахъ

$$z = Cx,\ y, = \frac{x}{B},$$

гдѣ x, по предположенію, отлично отъ нуля, а въ прочемъ вполнѣ произвольно; но эти же формулы заключаютъ въ себѣ и общее рѣшеніе

$$x = y = z = 0;$$

стоитъ лишь въ нихъ положить

$$x = 0.$$

Примѣчаніе. Читатели безъ труда докажутъ*), что, въ зависимости отъ выбора численныхъ значеній коэффиціентовъ a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2,—можетъ имѣть мѣсто какъ равенство

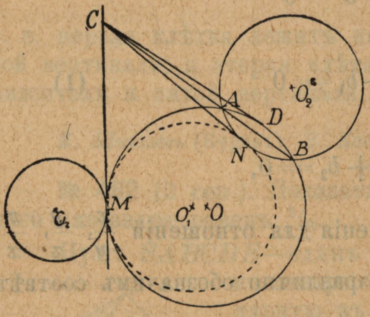
$$ABC = 1,$$

такъ и неравенства

$$ABC \gtrless 1.$$

К. и *Ѳ.* (Тамбовъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону).

№ 89 (3 сер.). Провести окружность, касательную къ данной окружности въ данной точкѣ M и пересѣкающую вторую данную окружность такъ, чтобы хорда сѣченія была равна данной прямой m.



Фиг. 1.

Проводимъ окружность O_1 (см. черт.) касательную къ даннымъ окружностямъ O_2 и O_3 соотвѣтственно въ точкахъ N и M и черезъ эти точки проводимъ касательныя. Изъ точки C, пересѣченія этихъ касательныхъ, проводимъ сѣкущую къ окружности O_2 такъ, чтобы внутренній отрѣзокъ AB равнялся m и черезъ точки A, B и M проводимъ окружность O, которая и будетъ требуемой. Дѣйствительно: касательная CD къ O равна CN (такъ какъ $CD = \sqrt{CB \cdot AC} = CN$); послѣдняя же равна CM.

С. Герасимовъ (Кременчугъ); *Уч. Кіево-Печ. гимн. Л. и Р.*; *П. Хлѣбниковъ* (Тула)

№ 111 (3 сер.). На сторонахъ BC и CA треугольника ABC отложены $BD = \frac{BC}{n}$ и $CE = \frac{AC}{n}$. Черезъ вершину C и точку O пересѣченія прямыхъ BE и AD проведена прямая CO, пересѣкающая AB въ F. Опредѣлить, какую часть AB составляетъ отрѣзокъ BF. Рѣшить эту задачу, не пользуясь извѣстной теоремой въ теоріи трансверсалей.

Проведемъ черезъ вершину C прямую параллельно AD до пересѣченія съ продолженіемъ BE въ точкѣ M.

Имѣемъ

$$\frac{MC}{OD} = n; \text{ или } MC = OD \cdot n;$$

---

*) Для этой цѣли проще всего составить систему (1) по заранѣе выбраннымъ корнямъ.

изъ подобныхъ же треугольниковъ AOE и MEC имѣемъ

$$\frac{AO}{MC}=\frac{AE}{EC}=n-1 \text{ или } AO=MC(n-1)=OD\,.\,n(n-1)$$

или

$$OD=\frac{AO}{n(n-1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Черезъ вершину B проведемъ прямую, параллельную CF, до пересѣченія съ продолженіемъ AD въ точкѣ K.

Изъ подобія треугольниковъ BKD и ODC найдемъ

$$\frac{DK}{OD}=\frac{1}{n-1}$$

или

$$\frac{OK}{OD}=\frac{n}{n-1};\quad OK=OD\,.\,\frac{n}{n-1} \text{ или изъ (1)}$$

$$OK=\frac{AO}{(n-1)^2};$$

а такъ какъ $\frac{OK}{AO}=\frac{BF}{AF}$, то $BF=\frac{AF}{(n-1)^2}$,

т. е. отрѣзокъ BF составляетъ часть AB, равную $\frac{1}{(n-1)^2+1}$.

П. Хлѣбниковъ (Тула).

№ 116 (3 сер.) Не пользуясь извѣстной теоремой въ теоріи трансверсалей, показать, что прямыя, соединяющія точки касанія внутри-вписаннаго въ треугольникъ круга съ противоположными вершинами, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пусть D и E будутъ точки касанія вписаннаго въ треугольникъ ABC круга соотвѣтственно со сторонами BC и AC. Соединимъ A съ D и B съ E и пусть точка пересѣченія прямыхъ AD и BE будетъ O. Докажемъ, что прямая CO пересѣчетъ AB въ F—точкѣ касанія круга со стороной AB. Означивъ стороны даннаго треугольника черезъ a, b и c, а полупериметръ черезъ p, будемъ имѣть

$$AE=p-a;\quad BD=p-b;\quad CE=p-c.$$

Проведя черезъ вершину C прямую параллельно AD до пересѣченія съ продолженіемъ BE въ точкѣ M, мы изъ подобныхъ треугольниковъ MBC и BOD будемъ имѣть

$$\frac{MC}{OD}=\frac{a}{p-b},\quad MC=OD\,.\,\frac{a}{p-b} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

и изъ подобія треугольниковъ AOE и MEC находимъ

$$\frac{AO}{MC}=\frac{AE}{EC}=\frac{p-a}{p-c},\quad AO=MC\,.\,\frac{p-a}{p-c},$$

или, вставляя сюда выраженіе для MC изъ (1), находимъ

$$AO = OD \cdot \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)},$$

откуда

$$OD = AO \cdot \frac{(p-b)(p-c)}{a(p-a)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Черезъ вершину B проведемъ прямую параллельно CO до пересѣченія съ продолженіемъ AD въ точкѣ K.

Изъ подобія треугольниковъ BDK и ODC находимъ

$$\frac{DK}{OD} = \frac{BD}{DC} = \frac{p-b}{p-c} \text{ или } \frac{OK}{OD} = \frac{a}{p-c};\ OK = OD \cdot \frac{a}{p-c},$$

вставляя сюда значеніе OD изъ (2), получимъ

$$OK = AO \cdot \frac{p-b}{p-a} \text{ или } \frac{OK}{AO} = \frac{p-b}{p-a},$$

а такъ какъ

$$\frac{OK}{AO} = \frac{BF}{AF}, \text{ то } \frac{BF}{AF} = \frac{p-b}{p-a},$$

а отсюда слѣдуетъ, что F есть точка касанія.

П. Бѣловъ (с. Знаменка); *П. Хлѣбниковъ* (Тула).

№ 360 (3 сер.). Изъ вершины прямого угла B треугольника ABC опущенъ на гипотенузу перпендикуляръ BD; изъ точки A, какъ изъ центра, описана окружность радіусомъ AB. Показать, что прямая, соединяющая любую точку K этой окружности съ точкой D, перпендикулярна къ проходящему черезъ точку A діаметру круга, описаннаго около треугольника AKC.

Пусть точка B' есть вторая точка встрѣчи прямой BD, а точка K'—вторая точка встрѣчи прямой DK съ окружностью A.

Имѣемъ:

$$DA \cdot DC = DB^2 = DB \cdot DB' = DK \cdot DK',$$

а потому (важно имѣть въ виду, что точка D по построенію лежитъ внутри обоихъ отрѣзковъ KK' и AC), четыре точки A, K, C, K' лежатъ на одной окружности, описанной около треугольника AKC.

Проходящій черезъ точку A діаметръ этой окружности есть прямая, соединяющая центры обѣихъ разсматриваемыхъ окружностей, а потому онъ перпендикуляренъ къ ихъ общей хордѣ KK', или, что все равно, къ прямой DK.

М. Зиминъ (Орелъ); *Лежебокъ и Г.* (Ив.-Вознес.); *Г. Леоновъ* (Курскъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 372 (3 сер.) Изъ точки D, основанія высоты AD, треугольника ABC описана радіусомъ равнымъ AD окружность, пересѣкающая AB и AC соотвѣтственно въ M и N.

Опредѣлить длину хорды MN по данному радіусу описанной около ABC окружности и данной площади треугольника ABC.

Треугольники MAN и ABC подобны; въ самомъ дѣлѣ:

$$\angle AMN = 90^0 - \angle PMN = 90^0 - \angle PAN,$$

гдѣ P — точка пересѣченія продолженнаго радіуса AD съ окружностью D; изъ треугольника ADC находимъ $\angle ACD = 90^0 - \angle DAC$, слѣдов., $\angle AMN = \angle ACD$, а потому

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AD}{R},$$

гдѣ R данный радіусъ окружности, описанной около тр-ка ABC;

$$\text{отсюда} \quad MN = \frac{BC \,.\, AD}{R} = \frac{2\Delta}{R},$$

гдѣ Δ данная площадь треугольника ABC.

Л. Магазаникъ (Бердичевъ); *М. Зиминъ* (Орелъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка)

№ 387 (3 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^{2q} - x^q - 2\sqrt{x^q} + 2 = 0.$$

Положивъ $\sqrt{x^q} = y$, откуда $x = \sqrt[q]{y^2}$, (1),

преобразуемъ данное уравненіе къ виду:

$$y^4 - y^2 - 2_y + 2 = 0, \quad \text{или}$$
$$(y-1)^2(y^2 + 2_y + 2) = 0, \text{ откуда}$$
$$y = 1 \text{ и } y = -1 \pm \sqrt{-1}.$$

Внеся эти значенія въ уравненіе (1), получимъ значенія x.

И. Величко (Могилевъ губ.), *Лежебокъ и Г.* (Ив.-Вознесенскъ); *Я. Полушкинъ* (Знаменка); *С. Фридрихъ* (Ковно); *А. Д.* (Иваново-Вознесенскъ).

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1896. — № 11.

Aires et volumes relatifs à la chainette. Par M. *C. E. Wasteels.* **Задачи** о квадратурахъ и кубатурахъ кривыхъ обыкновенно рѣшаются чрезъ интегрированіе; въ частныхъ случаяхъ подобныя задачи могутъ быть рѣшаемы по методу Архимеда, т. е. непосредственно *чрезъ отыскание предѣла суммы безконечно малыхъ*. Пользуясь этими методами, M. Wasteels находитъ квадратуры *цѣпной линіи* и *трактриссы* и объемъ и поверхность *псевдосферы*.

Le problème de la duplication du cube. Par M. *G. Longchamps.* Задача объ удвоении куба приводится къ рѣшенію ур-нія 3-й степ. и рѣшается геометрически при помощи круга и одного изъ коническихъ сѣченій. M. Longchamps указываетъ простой способъ рѣшенія этой задачи при помощи круга и параболы.

Bibliographie. Elementaer Stereometri af *C. Juel.* Copenhague. 1896.
Cours de Géometrie plane. Par *L. Jowa.* Liège. 1895.
Die Grundgebilde der ebenen Geometrie. Von *V. Eberhard.* Leipzig. 1895.
Léçons de Cosmographie. Par. M. *F. Tisserand.* Paris. 1895.
Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique. Par. M. *C. Jordan.* t. III. Paris. 1896.
Recueil de problèmes de mathématiques. Par *C. A. Laisant.* Paris. 1896.

Notes extraites de la correspondance mathématique et physique. 14. *Nouvelle discussion de l'équation générale des courbes du second degré.*

Ур-ніе

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

преобразуется въ другое, симметричное относительно x и y, причемъ осью симметріи будетъ биссектрисса угла между новыми осями координатъ.

15. *Point de Lemoine.* Историческая справка относительно задачи: найти точку, сумма квадратовъ разстояній которой отъ сторонъ многоугольника была бы minimum.

Solutions de questions proposées. №№ 505, 1006, 1007, 1008, 1010.
Questions d'examen №№ 764—767.
Questions proposées. №№ 1093—1096.

1896.—№ 12.

Propriétés des cercles de Chasles. Par M. *E. N. Barisien.* 111—153. Продолженіе перечисленія свойствъ круговъ Шаля. (См. обз. „Mathesis'a" за 1895).

Bibliographie. Hoënè Wronski. Cracovie. 1896. *S. Dickstein.*
Algebraic Analysis. Solutions and Exercises. By *G. A. Wentworth.* Boston. 1889.
Traité d'Analyse. Par *E. Picard.* t. III. Paris. 1896.
Leçons sur la théorie générale des surfaces. Par *G. Darboux.* Paris. 1887—1896.
Geometria general. Par *Garcia de Galdeano.* Zaragosa. 1895.
An Elementary Treatise on Rigid Dynamics. By *W. I. Loudon.* New-York. 1896.
Index operum Leonardi Euleri. *Hagen.* Washington.
Recueil de problèmes d'Arithmétiques. Par *E. Gelin.* Huy. 1896.
Annuaire pour l'an 1897 par Bureau des longitudes. Paris.
Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques. Paris.
Cours de géométrie descriptive. Par *Antomari.* Paris. 1897.
Petites tables de logarithmes. *Lebégue.* Bruxelles. 1896.

Note mathématique. *Sur la question* 949.
Solutions de questions proposées. №№ 1001, 1011, 1012, 1070.
Questions d'examen. №№ 768—775.
Questons proposées. №№ 1092—1100.

Д. Е.

Редакторъ В. А. Циммерманъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено цензурою. Одесса, 10-го Января 1898 г.
„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

Обложка
ищется

Обложка
ищется