

Обложка
щется

Обложка
щется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 236.

Содержаніе: Новая геометрія треугольника. (Продолженіе). Д. Е. — Математическія мелочи. Опредѣленіе площади и отношенія діагоналей вписаннаго въ кругъ четырехугольника. Н. Николаева. — Построеніе π съ точностью до 0,0001. М. Ефимова. — Опыты и приборы. — Изобрѣтенія и открытія. — Разныя извѣстія. — Задачи №№ 337—342. — Рѣшенія задачъ 2-й серіи №№ 485, 499 и 3-й серіи №№ 200, 201, 258, 259, 260, 265, 266, 272, 273, 275, 276, 278. — Полученныя рѣшенія задачъ. — Пропущенная подпись. — Обзоръ научныхъ журналовъ Д. Е. — Объявленія.

НОВАЯ ГЕОМЕТРІЯ ТРЕУГОЛЬНИКА.

(*Géométrie récente du triangle*).

(Продолженіе *).

В. Взаимныя и обратныя точки треугольника.

1. Изотомическія точки и прямая. Двѣ точки на сторонѣ треугольника, симметричныя относительно середины этой стороны, наз. *изотомическими точками* (points isotomiques).

Двѣ прямыя, соединяющія вершину треугольника съ изотомическими точками противолежащей стороны, наз. *изотомическими прямыми* (droites isotomiques).

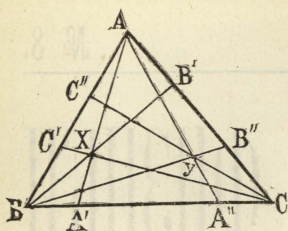
2. Пусть AA' и AA'' , BB' и BB'' , CC' и CC'' суть три пары изотомическихъ прямыхъ треугольника ABC . (Фиг. 39).

Теорема. Если три прямыя AA' , BB' , CC' пересекаются въ одной точкѣ X , то изотомическія съ ними прямыя AA'' , BB'' , CC'' также пересекаются въ одной точкѣ Y .

*) См. „Вѣстника Оп. Физики“ №№ 230, 231, 232 и 234.

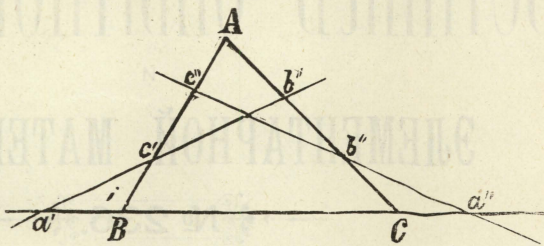
Доказательство основывается на теоремѣ Чевы и равенствѣ отрезковъ AB' и CB'' , BA' и CA'' , BC' и AC''' (I, 4).

Обратно: Если двѣ пары изотомическихъ прямыхъ AA' и AA'' , BB' и BB'' пересѣкаются въ точкахъ X и Y (фиг. 39), то прямыя CX и CY также изотомичны.



Фиг. 39.

Точки X и Y наз. *изотомически сопряженными* а также *взаимными точками* (points réciproques) треугольника ABC . (Longchamps).



Фиг. 40.

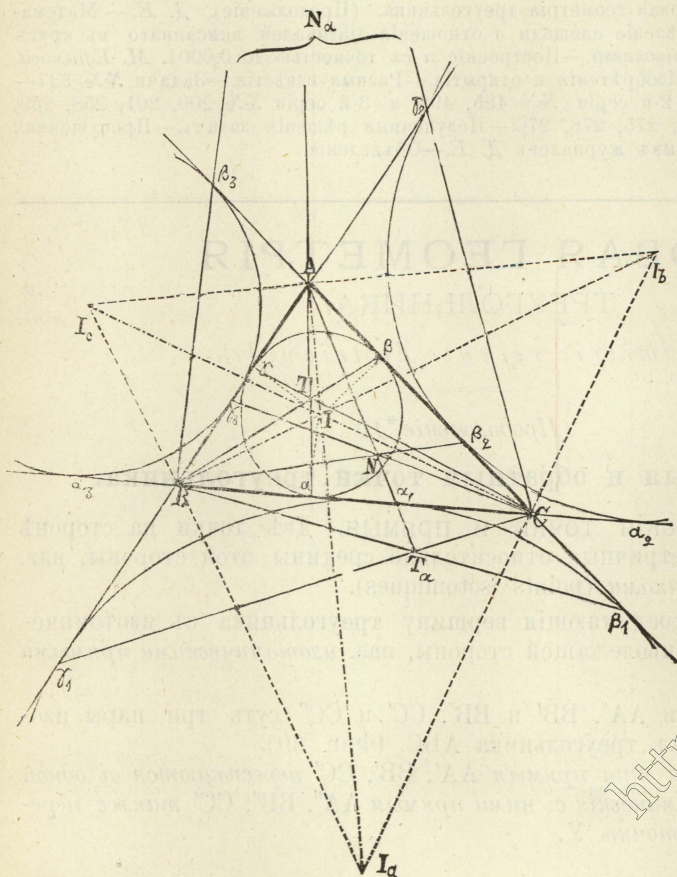
3. Пусть a' и a'' , b' и b'' , c' и c'' суть три пары изотомическихъ точекъ треугольника ABC (Ф. 40).

Теорема.

Если три точки a' , b' , c' лежатъ на одной прямой D , то три изотомическія съ ними точки a'' , b'' , c'' также лежатъ на одной прямой D' .

Доказательство основывается на теоремѣ Птолемея и опредѣленіи изотомическихъ точекъ. (I, 3).

Прямыя D и D' наз. *изотомически сопряженными* или *взаимными связующими*



Фиг. 41.

(transversales réciproques) треугольника ABC.

4. Пусть I, I_a, I_b, I_c суть центры вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ въ треугольникъ ABC, стороны котораго суть $BC = a, CA = b, AB = c$. Точки касанія этихъ круговъ съ сторонами BC, CA и AB обозначимъ соответственно черезъ $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$. (Фиг. 41). Извѣстно, что:

$$A\beta = A\gamma = B\alpha_3 = C\alpha_2 = B\gamma_3 = C\beta_2 = p - a,$$

$$B\gamma = B\alpha = A\beta_3 = C\beta_1 = A\gamma_3 = C\alpha_1 = p - b,$$

$$C\alpha = C\beta = A\gamma_2 = B\gamma_1 = A\beta_2 = B\alpha_1 = p - c,$$

$$A\beta_1 = A\gamma_1 = p,$$

$$B\gamma_2 = B\alpha_2 = p,$$

$$C\alpha_3 = C\beta_3 = p,$$

гдѣ

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c);$$

слѣдовательно

точки α, β, γ соотвѣтственно изотомичны съ $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$;

„ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

„

„

„ $\alpha, \beta_3, \gamma_2$;

и т. д.

Но прямыя $A\alpha, B\beta, C\gamma$ пересѣкаются въ одной точкѣ I , называемой *точкой Жергона* (Gergonne I, 5); а потому прямыя $A\alpha_1, B\beta_2, C\gamma_3$, какъ изотомическія съ ними, также пересѣкаются въ одной точкѣ N , называемой *точкой Нагеля* (Nagel). Итакъ: *точка Жергона и точка Нагеля суть пара взаимныхъ или изотомически сопряженныхъ точекъ треугольника.*

5. Прямыя $A\alpha_1, B\beta_1, C\gamma_1$ пересѣкаются въ одной точкѣ T_a ;

„

$A\alpha_2, B\beta_2, C\gamma_2$

„

„

„ T_b ;

„

$A\alpha_3, B\beta_3, C\gamma_3$

„

„

„ T_c ;

поэтому прямыя $A\alpha, B\beta_3, C\gamma_2$ изотомическія съ $A\alpha_1, B\beta_1, C\gamma_1$ пересѣкаются также въ одной точкѣ N_a ; и т. д.

Точки T_a, T_b, T_c наз. *добавочными точками* (adjoints) *Жергона*; точки N_a, N_b, N_c наз. *добавочными точками Нагеля*.

Слѣдовательно: *добавочныя точки Жергона съ соотвѣтственными имъ добавочными точками Нагеля составляютъ три пары взаимныхъ или изотомически сопряженныхъ точекъ треугольника.*

6. Антипараллельныя прямыя. Двѣ прямыя L и L' называются *антипараллельными* относительно сторонъ даннаго угла, если уголъ, составляемый прямой L съ одной стороной этого угла, равенъ углу, составляемому прямой L' съ другой стороной того же угла.

Если антипараллельныя прямыя L и L' пересѣкаютъ стороны угла A въ точкахъ B, C и B', C' , то треугольники ABC и $AC'B'$ по-

добны, но не одинаково расположены; четырехугольник $BCC'B'$ всегда вписывается въ кругъ.

Необходимое и достаточное условіе антипараллельности двухъ прямыхъ состоитъ въ томъ, что произведеніе отръзковъ, образуемыхъ ими на одной сторонѣ угла, равно произведенію отръзковъ, образуемыхъ ими на другой сторонѣ того же угла.

Хорды, соединяющія точки пересѣченія окружности съ двумя прямыми, антипараллельны.

7. Теорема. *Прямая, антипараллельная сторонамъ треугольника, параллельная касательнымъ въ его вершинахъ къ описанному около него кругу.*

Слѣдствіе. Прямая, соединяющія основанія высотъ треугольника, антипараллельна его сторонамъ.

8. Изогональныя прямая. *Изогональными* прямыми относительно даннаго угла (BAC) наз. двѣ прямая (AP и AQ), проходящія черезъ вершины этого угла и симметричныя относительно его биссектрисы. (Фиг. 42).

Теорема. Если P и Q суть какія нибудь точки, взятые на прямыхъ, изогональныхъ относительно угла BAC (фиг. 42), то

1) *Разстоянія точки P отъ AB и AC обратно пропорціональны разстояніямъ точки Q отъ тѣхъ же прямыхъ.*

Пусть P_1, Q_1 и P_2, Q_2 суть проэкции точекъ P и Q на AB и AC . Такъ какъ треугольники APP_1 и AQQ_2 , AQQ_1 и APP_2 попарно подобны, то

$$\frac{PP_1}{QQ_2} = \frac{AP}{AQ} \text{ и } \frac{PP_2}{QQ_1} = \frac{AP}{AQ};$$

слѣдовательно

$$\frac{PP_1}{PP_2} = \frac{QQ_2}{QQ_1}.$$

2) *Проэкции точекъ P и Q на стороны угла ABC лежатъ на одной окружности, имѣющей центръ въ серединѣ отръзка PQ .*

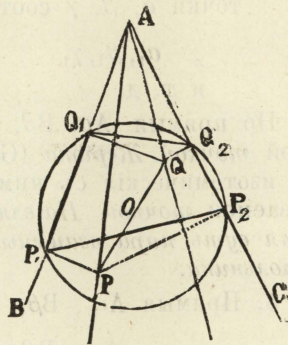
Ибо прямая P_1P_2 и Q_1Q_2 антипараллельны (6), такъ какъ

$$\frac{AP_1}{AQ_2} = \frac{AP}{AQ} \text{ и } \frac{AP_2}{AQ_1} = \frac{AP}{AQ}$$

откуда

$$\frac{AP_1}{AQ_2} = \frac{AP_2}{AQ_1}, \text{ т. е. } AP_1 \cdot AQ_1 = AP_2 \cdot AQ_2.$$

3) *Изогональная прямая AP и AQ соответственно перпендикулярны къ прямымъ Q_1Q_2 и P_1P_2 .*



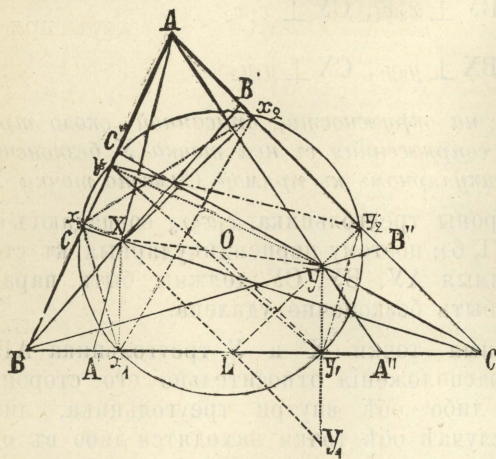
фиг. 42.

Дѣйствительно, описавъ окружность около четырехугольника AP_1PP_2 , увидимъ, что

$$\angle AP_2P_1 = \angle APP_1 = 90^\circ - \angle PAP_1 = 90^\circ - \angle QAP_2;$$

слѣдовательно $AQ \perp P_1P_2$.

9. Теорема. Если прямая AA' , BB' , CC' , проходящая через вершины треугольника ABC , пересекаются въ одной точкѣ X , то прямая AA'' , BB'' , CC'' , изогональны съ первыми, пересекаются также въ одной точкѣ Y . (Фиг. 43).



Фиг. 43.

Пусть x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 суть проеціи точки X и точки Y , въ которой пересекаются прямая AA'' и BB'' , на стороны треугольника BC, CA и AB . По свойству изогональных прямыхъ (8)

$$Xx_1 \cdot Yy_1 = Xx_3 \cdot Yy_3$$

и

$$Xx_2 \cdot Yy_2 = Xx_3 \cdot Yy_3;$$

слѣдовательно

$$Xx_1 \cdot Yy_1 = Xx_2 \cdot Yy_2,$$

а потому прямая CX и CY изогональны, т. е. прямая CC'' проходить черезъ точку Y .

Точки X и Y наз. *обратными* (inverses) или *изогонально-сопряженными точками* треугольника ABC . (Vigarié).

10. Обратныя точки треугольника совпадаютъ, если одна изъ нихъ есть центръ вписаннаго или вѣтвѣннаго круга въ треугольникъ.

Ортоцентръ треугольника H и центръ вписаннаго въ него круга O суть обратныя точки; ибо прямая $АН$ и $АО$ изогональны, такъ какъ сторона треугольника BC антипараллельна касательной въ A къ кругу, описанному около треугольника ABC .

Точки Брокера суть обратныя точки треугольника (III, 8).

11. Изъ свойствъ изогональныхъ прямыхъ (8) слѣдуетъ, что:

а) Произведенія разстояній обратныхъ точекъ треугольника отъ каждой изъ сторонъ его равны между собою, т. е. (фиг. 43).

$$Xx_1 \cdot Yy_1 = Xx_2 \cdot Yy_2 = Xx_3 \cdot Yy_3.$$

б) Проеціи x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 обратныхъ точекъ треугольника на его стороны лежатъ на одной окружности, имѣющей центръ въ серединѣ XU .

Для ортоцентра и центра описанного круга (10) это есть окружность круга девяти точекъ. (I, 12).

с) Прямая, соединяющая одну изъ обратныхъ точекъ треугольника съ его вершинами, перпендикулярна къ прямой, соединяющей проэкции другой обратной точки на его стороны, т. е. (фиг. 43).

$$AU \perp x_2x_3, \quad BU \perp x_3x_1, \quad CU \perp x_1x_2$$

и

$$AX \perp y_2y_3, \quad BX \perp y_3y_1, \quad CX \perp y_1y_2.$$

12. Если точка X взята на окружности, описанной около треугольника ABC, то изогонально сопряженная съ ней точка У безконечно удалена въ направленіи, перпендикулярномъ къ прямой Симсона точки X.

Ибо въ этомъ случаѣ стороны треугольника $x_1x_2x_3$ совпадаютъ съ прямой Симсона для точки X (I, 6); поэтому перпендикулярныя къ сторонамъ этого треугольника прямая AU, BU, CU должны быть параллельны, т. е. точка У должна быть безконечно удалена.

13. Изогонально-сопряженные точки X и У треугольника ABC могутъ имѣть три различныя расположенія относительно его сторонъ, именно: точки эти находятся либо обѣ внутри треугольника, либо обѣ—вне его; въ послѣднемъ случаѣ обѣ точки находятся либо въ одномъ углѣ треугольника, либо въ вертикальныхъ углахъ его, смотря по тому, находятся ли онѣ обѣ вне круга, описаннаго около треугольника, или одна изъ нихъ взята внутри этого круга. *)

14. Теорема. Три точки, симметричныя съ одной изъ обратныхъ точекъ треугольника относительно его сторонъ, лежатъ на окружности, описанной изъ точки, обратной съ первой, радиусомъ вдвое большимъ радиуса окружности, проходящей черезъ проэкции тѣхъ же точекъ на стороны треугольника.

Пусть U_1, U_2, U_3 суть точки, симметричныя съ У относительно сторонъ треугольника BC, CA, AB. Обозначивъ черезъ О середину ХУ, т. е. центръ круга $x_1y_1x_2y_2x_3y_3$ (фиг. 43), соединимъ О съ y_1 и Х съ U_1 . Такъ какъ $XU = 2OU$ и $UU_1 = 2Uy_1$, то $XU_1 = 2Oy_1$, что и требовалось доказать.

15. Слѣдствіе. Если прямая XU_1, XU_2, XU_3 пересѣкаютъ стороны треугольника ABC въ точкахъ L, M, N, то (фиг. 43).

$$XL \pm UL = XM \pm UM = XN \pm UN,$$

гдѣ знакъ „+“ имѣетъ мѣсто, когда точки X и У находятся въ одномъ углѣ треугольника, а знакъ „—“ когда онѣ находятся въ вертикальныхъ углахъ его.

16. Симедианы (*Symédianes*). Прямая, изогональная съ медианами треугольника, наз. симедианами этого треугольника (*M. d'Ocagne*).

*) См. „Вѣстникъ“ № 116, стран. 143.

Медианы треугольника пересекаются въ одной точкѣ—центрѣ тяжести треугольника (G); поэтому (9) и симедианы треугольника пересекаются въ одной точкѣ (K).

Точка пересѣченія симедианъ треугольника (K) наз. *точкой Лемуана** (Lemoine); слѣдовательно, точка Лемуана даннаго треугольника есть точка, изогонально сопряженная (обратная) съ центромъ тяжести этого треугольника.

17. Теорема. Разстоянія точки Лемуана (K) отъ сторонъ треугольника пропорціональны этимъ сторонамъ.

Пусть M есть середина стороны BC треугольника ABC; g_1, g_2, g_3 — проэкции его центра тяжести G на стороны BC, CA и AB; x, y, z — разстоянія точки Лемуана (K) отъ этихъ сторонъ (фиг. 44). По свойству обратныхъ точекъ (11):

$$\frac{y}{z} = \frac{Gg_3}{Gg_2} = \frac{ME}{MD};$$

но

$ME \cdot c = MD \cdot b = S$ (плоч. треугольника);

отсюда

$$\frac{ME}{MD} = \frac{b}{c};$$

поэтому

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{c};$$

слѣдовательно

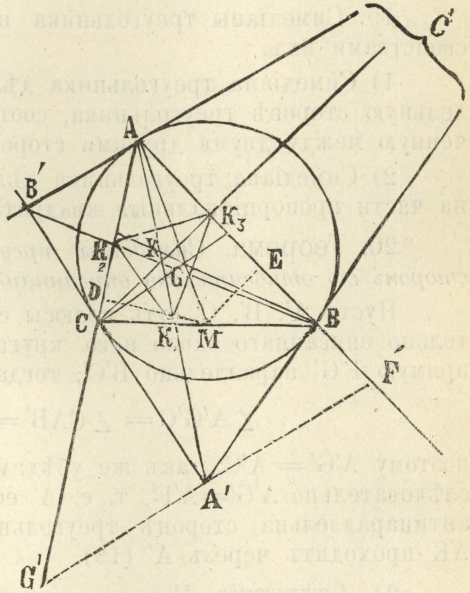
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

18. Изъ свойствъ равныхъ отношеній слѣдуетъ, что

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Изъ этихъ равенствъ опредѣляются разстоянія точки Лемуана отъ сторонъ треугольника.

Изъ тѣхъ же равенствъ слѣдуетъ, что *сумма квадратовъ разстояній точки Лемуана отъ сторонъ треугольника есть минимитъ*. Ибо, замѣнивъ въ тождествѣ



Фиг. 44.

*) Точка Лемуана наз. также центромъ симедианъ треугольника.

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (ay + by + cz)^2 = \\ = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$$

$ax + by + cz$ через $2S$, замѣтимъ, что сумма $x^2 + y^2 + z^2$ есть minimum, когда $ay - bx = 0$, $bz - cy = 0$, $cx - az = 0$, т. е. при

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

19. Симедианы треугольника вполне опредѣляются слѣдующими свойствами ихъ.

1) Симедиана треугольника дѣлитъ пополамъ прямую, антипараллельную сторонѣ треугольника, соотвѣтствующей симедианѣ, и заключенную между двумя другими сторонами его.

2) Симедиана треугольника дѣлитъ соотвѣтствующую сторону его на части пропорціональныя квадратамъ другихъ его сторонъ.

20. Теорема. Симедианы треугольника проходятъ черезъ полюсы сторонъ его относительно описаннаго около него круга.

Пусть A' , B' , C' суть полюсы сторонъ треугольника ABC относительно описаннаго около него круга (фиг. 44). Проведемъ черезъ A' прямую $F'G'$ параллельно $B'C'$; тогда

$$\angle A'G'C = \angle CAB' = \angle ACB' = \angle A'CG';$$

поэтому $A'G' = A'C$; такъ же убѣдимся, что $A'F' = A'B$. Но $A'B = A'C$; слѣдовательно $A'G' = A'F'$, т. е. A' есть середина $F'G'$; прямая же $F'G'$ антипараллельна сторонѣ треугольника BC ; слѣдовательно, симедиана AK проходитъ черезъ A' (19).

21. Слѣдствіе. Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что точка Лемуана (K) есть центръ перспективы взаимно-полярныхъ треугольниковъ ABC и $A'B'C'$; отсюда замѣчаемъ, что поляръ точки Лемуана (K) относительно круга ABC есть ось перспективы тѣхъ же треугольниковъ. (II, 1, 15).

Поляръ точки Лемуана относительно круга, описаннаго около треугольника, наз. прямою Лемуана.

По свойству поляръ, прямая Лемуана перпендикулярна къ прямой, соединяющей центръ круга O , описаннаго около треугольника, съ его точкой Лемуана K , и отстоитъ отъ O на разстояніе $= \frac{R^2}{OK}$ (II, 10).

22. Обозначимъ черезъ K_1 , K_2 , K_3 точки пересѣченія симедианъ треугольника съ сторонами его BC , CA , AB ; черезъ A' , B' , C' — точки пересѣченія касательныхъ въ A , B , C къ кругу ABC .

Точки A' , B' , C' , какъ полюсы сторонъ треугольника ABC относительно описаннаго около него круга, гармонически связаны съ точкой Лемуана K (III, 13).

Такъ какъ треугольники ABC , $A'B'C'$, $K_1K_2K_3$ попарно перспективны и имѣютъ общій центръ перспективы въ точкѣ Лемуана K , то прямая Лемуана есть общая ось перспективы этихъ треугольниковъ;

эта прямая, слѣдовательно, есть *тримнейная* полярна точки К. (II, 3; III, 14).

23. Теорема. Если x, y, z , суть разстоянія точки Лемуана треугольника ABC отъ сторонъ его a, b, c , то уголъ ω , определяющійся равенствомъ

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \omega = \frac{x}{a} \left(= \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \right),$$

есть уголъ Брокара того же треугольника.

Ибо (18)

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{2x}{a} = \frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2};$$

отсюда

$$\operatorname{cotg} \omega = \frac{2b \cos A + 2c \cos B + 2a \cos C}{4S};$$

но

$$\frac{2bc \cdot \cos A}{4S} = \frac{2bc \cdot \cos A}{2bc \cdot \sin A} = \operatorname{cotg} A, \dots$$

слѣдовательно,

$\operatorname{cotg} \omega = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C$, что и требовалось доказать (III, 8).

24. Приложенія. Точка Лемуана К треугольника ABC есть центръ тяжести треугольника, вершины котораго суть проэкціи К на стороны AB, BC, CA.

25. Для даннаго треугольника ABC всегда можно построить другой треугольникъ, стороны и медіаны котораго соотвѣтственно параллельны медіанамъ и сторонамъ треугольника ABC.

26. Прямые, соединяющія середины сторонъ треугольника со срединами соотвѣтственныхъ высотъ его, пересѣкаются въ точкѣ Лемуана.

27. Если H_1, H_2, H_3 суть основанія высотъ треугольника ABC, а X, Y, Z —проэкціи точки Лемуана К этого треугольника на его стороны, то точки, симметричныя съ X, Y, Z относительно К, суть точки Лемуана треугольниковъ $AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2$.

28. Если К и G суть точка Лемуана и центръ тяжести треугольника ABC, то 1) діаметры круговъ АКВ, ВКС, СКА обратно пропорціональны медіанамъ треугольника; 2) діаметры круговъ AGB, BGC, CGA обратно пропорціональны отрезкамъ АК, ВК, СК.

29. Теорема Нейберга (Neuberg). Если задано основаніе треугольника и уголъ Брокара, то геометрическое мѣсто вершины его есть окружность.

30. Если задано основаніе треугольника и уголъ Брокара, то геометрическое мѣсто точки Лемуана есть прямая, параллельная основанію треугольника.

Д. Е. (Иваново-Вознесенскъ).

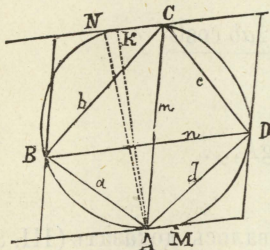
(Продолженіе слѣдуетъ).

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Определе́ніе площади и отноше́нія діагоналей вписаннаго въ кругъ четырёхугольника.

I. Площадь вписаннаго въ кругъ четырёхугольника по даннымъ сторонамъ весьма легко вычисляется слѣдующимъ образомъ.

Пусть стороны четырёхугольника $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, а діагонали $AC = m$ и $BD = n$. Проведя черезъ концы діагоналей прямыя, параллельныя діагоналямъ, образуемъ параллелограммъ, площадь котораго вдвое больше площади четырёхугольника $ABCD$. Прямая, проведенная черезъ A и C параллельно діагонали BD , встрѣчаютъ окружность въ M и N . Обозначивъ AM чрезъ x , CN чрезъ y и прилагая теорему Птолемея къ четырёхугольникамъ $BDMA$ и $BDCN$ (на чертежѣ прямыя $BM = d$ и $DM = a$ не проведены), легко найдемъ



Фиг. 45.

$$x = \frac{d^2 - a^2}{n} \text{ и } y = \frac{b^2 - c^2}{n}.$$

Четырёхугольникъ $AMCN$ есть равнобочная трапеція, которой діагональ $AC = m$, а параллельныя стороны

$$x = \frac{d^2 - a^2}{n} \text{ и } y = \frac{b^2 - c^2}{n}.$$

Проведемъ высоту AK этой трапеціи и замѣтимъ, что

$$KC = \frac{x + y}{2} = \frac{d^2 + b^2 - a^2 - c^2}{2n},$$

найдемъ

$$AK = \sqrt{m^2 - \frac{(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}{4n^2}} = \frac{\sqrt{4m^2n^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}}{2n}$$

Такъ какъ $m \cdot n = a \cdot c + b \cdot d$, то

$$AK = \frac{\sqrt{4(ac + bd)^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}}{2n} = \frac{\sqrt{(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)(b - c + d - a)}}{2n}.$$

Площадь параллелограмма равна

$$AK \cdot n = \frac{1}{2} \sqrt{(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)(b - c + d - a)}$$

Такъ какъ его площадь вдвое болѣе площади вписаннаго четырехугольника, то площадь вписаннаго четырехугольника равна

$$\frac{1}{4} \sqrt{(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)(b+c+d-a)}.$$

II. Зная, что площадь треугольника равна произведенію трехъ его сторонъ, раздѣленному на учетверенный радіусъ описанной окружности, легко найти отношеніе діагоналей вписаннаго четырехугольника.

Имѣемъ

$$\text{пл. ADC} + \text{пл. ABC} = \text{пл. BDC} + \text{пл. BDA}$$

или

$$\frac{dcm}{4R} + \frac{abm}{4R} = \frac{bcn}{4R} + \frac{adn}{4R},$$

откуда

$$\frac{m}{n} = \frac{bc + ad}{dc + ab}.$$

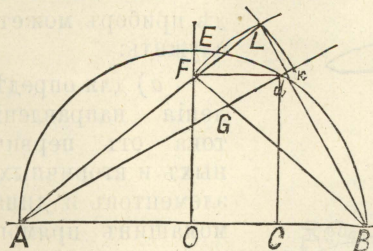
Н. Николаевъ (Пенза).

Построеніе π съ точностью до 0,0001.

Заимствуемъ изъ „Извѣстій Физико-Математическаго Общества при Императ. Казанскомъ Университетѣ“ (т. V, № 4) слѣдующій способъ построенія π , принадлежащій г. М. Ефимову.

Изъ середины С радіуса $OB = 1$ возставляемъ перпендикуляръ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ d .

Прямая Ad равна очевидно $\sqrt{3}$, а $Cd = \frac{1}{2} \sqrt{3}$. Изъ d проводимъ прямую, параллельную діаметру до пересѣченія въ точкѣ F съ радіусомъ OE , проведеннымъ изъ центра O перпендикулярно діаметру AB , и точку F соединяемъ съ B . Очевидно $Fd = \frac{1}{4} AB$ и $Gd = \frac{1}{5} Ad$. Прямую Gd дѣлимъ на четыре равныя части и отъ точки d на продолженіи Ad от-



Фиг. 46.

кладываемъ $dk = \frac{1}{4} Gd = \frac{1}{20} Ad$. Изъ точки A описываемъ окружность радіусомъ Ak , а изъ точки B — радіусомъ BF . Пусть эти окружности пересѣкаются въ точкѣ L . Ломанная ALB выражаетъ значеніе π съ точностью до 0,0001.

Дѣйствительно:

$$\overline{BF}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{OB}^2 = (\frac{1}{2} \sqrt{3})^2 + 1 = \frac{7}{4},$$

откуда

$$BL = BF = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1,322876.$$

$$AL = Ak = Ad + dk = Ad + \frac{1}{20}Ad = \frac{21}{20}\sqrt{3} = 1,818653.$$

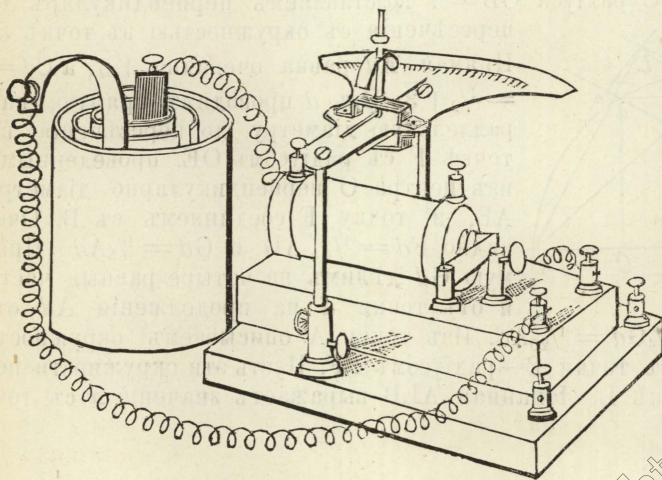
Слѣдовательно

$$ALB = AL + LB = 1,818653 + 1,322876 = 3,141529.$$

ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Примѣненіе катушки Румкорфа къ производству электрическихъ измѣреній. („Электрич.“ 1896, № 8).—Приобрѣтеніе вольтметра, амперметра и ваттметра для большинства любителей является если не непосильнымъ, то во всякомъ случаѣ обременительнымъ расходомъ. Кромѣ того во многихъ случаяхъ этихъ аппаратовъ можетъ и не оказаться на лицо. Въ виду этого предлагаемый г. *Albert* оу *Nodon* очень простой способъ преобразованія обыкновенной катушки Румкорфа въ любой изъ упомянутыхъ приборовъ заслуживаетъ полного вниманія.

Какъ видно изъ прилагаемаго рисунка, на деревянномъ пьедесталѣ катушки утверждены двѣ вертикальныя подвижныя металлическія подставки, поддерживающія горизонтальный металлическій секторъ съ произвольными дѣленіями по дугѣ его. Надъ секторомъ помѣщена довольно длинная стрѣлка-указатель изъ алюминія, къ которой прикрѣплены нѣсколько короткихъ намагнитенныхъ стрѣлокъ такъ, что ось ихъ системы параллельна стрѣлкѣ-указателю. Кромѣ того система снабжена еще направляющимъ магнитомъ, имѣющимъ форму дуги и помѣщеннымъ на любой высотѣ надъ секторомъ. Середина катушки должна по возможности совпадать съ центромъ системы магнитныхъ стрѣлокъ и стрѣлки-указателя.



Фиг. 47.

Въ такомъ видѣ приборъ можетъ служить:

а) для опредѣленія направленія тока отъ первичныхъ и вторичныхъ элементовъ и динамомашинъ прямого тока;

б) въ качествѣ гальванометра; для токовъ отъ 5 до 40 амперъ токъ пропускается прямо по металлическимъ подставкамъ; отъ 5 до

0,01 ампера—по толстой проволоцѣ катушки (прерыватель при этомъ удаляется); для токовъ до миллиампера—по тонкой проволоцѣ. Поднимая и опуская металлическій секторъ, можно установить его въ самомъ выгодномъ положеніи;

с) въ качествѣ амперметра; для этого сопротивленіе толстой проволоки катушки доводится до 2 омъ введеніемъ нейзильберовой проволоки, черезъ нее пропускается токъ въ 2 ампера отъ свинцоваго аккумулятора и приборъ градуируется. Послѣ этого онъ можетъ служить для точнаго измѣренія токовъ отъ 40 амперъ до 0,01 ампера;

d) въ качествѣ вольтметра; для градуировки черезъ тонкую проволоку пропускается токъ опредѣленнаго напряженія, уголь отклоненія стрѣлки дѣлится на любое число дѣленій и такая градуировка продолжается на весь секторъ. Тогда приборъ даетъ возможность измѣрять напряженія отъ 0,01 вольта до 500 вольтъ съ значительной точностью;

e) въ качествѣ уаттметра; располагая напряженіемъ въ 2 вольта пропускаютъ токъ одновременно черезъ обѣ проволоки катушки (сопротивленіе толстой проволоки равно по прежнему 2 омамъ). Тогда стрѣлка даетъ отклоненіе, пропорціональное двумъ уаттамъ.

Здѣсь, какъ и ранѣе, величины угловъ отклоненія, если они не велики, можно считать пропорціональными числу измѣряемыхъ уаттовъ.

ИЗОБРѢТЕНІЯ и ОТКРЫТІЯ.

Автоматическая телефонная система. — Въ настоящее время почтово-телеграфнымъ управленіемъ въ Англіи испытывается новая автоматическая телефонная система, изобрѣтенная нашимъ соотечественникомъ, г. Апостоловымъ-Бердичевскимъ. По словамъ изобрѣтателя система его представляетъ слѣдующія преимущества передъ нынѣ дѣйствующими системами:

1) Каждый подписчикъ самъ имѣетъ возможность сообщаться съ каждымъ другимъ подписчикомъ той же сѣти, или съ нѣсколькими подписчиками послѣдовательно, или, наконецъ, говорить нѣсколькимъ одновременно.

2) Каждый подписчикъ самъ можетъ сообщаться съ другой телефонной сѣтью въ другомъ городѣ; число одновременныхъ переговоровъ между городами ограничивается только числомъ проводовъ между ними.

3) Возможность подслушиванія переговоровъ между подписчиками вполне устраняется, такъ какъ съ разговаривающимъ подписчикомъ не можетъ сообщаться никто изъ прочихъ подписчиковъ, пока онъ самъ того не пожелаетъ.

4) Для автоматическаго сообщенія требуется по новой системѣ не болѣе $\frac{1}{2}$ минуты времени, тогда какъ при существующихъ системахъ иногда приходится ожидать до $\frac{1}{2}$ часа, пока телефонистка сдѣлаетъ требуемое соединеніе.

5) Система г. Апостола примѣняется ко всѣмъ существующимъ телефоннымъ сѣтямъ, причемъ для этого не требуется никакихъ добавочныхъ линий; къ аппарату подписчика прибавляется только небольшая коробка-манипуляторъ, а всѣ громоздкіе приборы на центральной

станции замѣняются однимъ столомъ, на которомъ располагаются автоматическіе „соединители“; столъ этотъ помѣщается въ небольшой комнатѣ, которая всегда остается закрытой, за исключеніемъ того времени, когда надо установить соединители для новыхъ подписчиковъ. Весь персоналъ станции сводится къ одному телефонисту.

Если всѣ эти преимущества дѣйствительно оправдаются въ дѣйствительности, то изобрѣтеніе г. Апостолова произведетъ переворотъ въ дѣлѣ телефонныхъ сообщеній и сдѣлаетъ пользованіе телефономъ вполне доступнымъ для людей съ небольшими средствами. Въ настоящее время для центральныхъ телефонныхъ станцій въ большихъ городахъ требуются громадныя помѣщенія и бывали случаи, что приходилось отказывать новымъ подписчикамъ за недостаткомъ мѣста. При новой системѣ расходы на содержаніе станцій не зависятъ отъ числа абонентовъ, т. е. стоимость телефона для каждаго отдѣльнаго подписчика значительно уменьшается при увеличеніи ихъ числа. Манипуляціи, которыя приходится производить подписчику, чтобы соединиться съ другимъ, крайне просты и повидимому не могутъ вести къ ошибкамъ.

Ящикъ-манипуляторъ, которымъ снабжается аппаратъ каждаго абонента, имѣетъ на передней стѣнкѣ три прорѣза (окна) и нѣсколько кнопокъ. Въ двухъ окнахъ появляются при соотвѣствующихъ манипуляціяхъ номера подписчиковъ (въ лѣвомъ—тысячи и сотни;—въ правомъ—десятки и единицы), а среднее окно указываетъ ходъ всей операціи сообщенія; при бездѣйствіи аппарата въ немъ видна надпись „off“ (разобщеніе). Самое соединеніе производится такъ: пусть подписчикъ *А* желаетъ разговаривать съ подписчикомъ *В*, номеръ котораго 2753. Убѣдившись, что аппаратъ разобщенъ, т. е. что въ среднемъ окнѣ стоитъ надпись „off“, *А* нажимаетъ кнопку подъ лѣвымъ окномъ, въ которомъ начинаютъ тогда появляться числа по порядку; когда появится требуемое число,—въ нашемъ примѣрѣ 27,—*А* оставляетъ лѣвую кнопку и нажимаетъ правую, пока въ правомъ окнѣ не появится число 53. Тогда линія *А* автоматически соединяется съ *В*. Затѣмъ *А* дотрагивается до кнопки съ надписью „call“ (вызовъ), и въ среднемъ окнѣ появляется слово „ring up“ (звоните), послѣ чего *А* звонитъ въ свой аппаратъ. Слыша звонокъ, *В* подходит къ своему аппарату и видитъ въ немъ слово „call“ (вызовъ). Если онъ желаетъ разговаривать, то дотрагивается до кнопки съ надписью „call“, послѣ чего въ среднихъ окнахъ обоихъ аппаратовъ появляются слова „are you there“ (тамъ ли вы). Тогда *А* и *В* снимаютъ съ коммутаторныхъ крючковъ свои телефоны и начинаютъ разговаривать. По окончаніи разговора *А* и *В* вѣшаютъ свои телефоны на крючекъ коммутатора и дотрагиваются до кнопокъ съ надписью „finish“ (конецъ); тогда въ среднихъ окнахъ обоихъ приборовъ появляется слово „off“, обозначающее, что всѣ приборы пришли въ первоначальное положеніе. Если въ окнѣ не появляются слова „are you there“, то это значитъ, что *В* не слышитъ вызова, не можетъ или не желаетъ разговаривать; тогда *А* долженъ дотронуться до кнопки „finish“, чтобы разъединить свой аппаратъ. („Электричество“).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

◆ 3/13 іюня сего года въ городѣ Глэзго торжественно отпразднованъ пятидесятилѣтній юбилей профессорской дѣятельности лорда Кельвина (Вилліама Томсона). Желая придать этому празднеству по возможности большее значеніе, представители университета и городского управленія организовали изъ своей среды комитетъ, который разослалъ приглашенія прислать къ празднеству своихъ представителей различнымъ университетамъ и ученымъ обществамъ, выдающимся научнымъ и профессиональнымъ дѣятелямъ, а также гражданамъ города Глэзго и другихъ городовъ, имѣющихъ связи съ университетомъ въ Глэзго. Кромѣ того къ юбилею была устроена выставка механическихъ, электрическихъ и другихъ приборовъ, иллюстрирующихъ изобрѣтательность гениальнаго физика.

◆ Извѣстнымъ французскимъ ученымъ Муро и профессорами Лейстомъ и Пильчиковымъ въ настоящее время производятся изслѣдованія магнитной аномаліи между Харьковомъ и Курскомъ. Г. Муро занимается абсолютными наблюденіями въ уѣздахъ, проф. Лейстъ производитъ варіаціонныя измѣренія въ Москвѣ, а проф. Пильчиковъ—въ Харьковѣ.

◆ Въ Лондонскомъ почтамтѣ введено фотографированіе всѣхъ подозрительныхъ писемъ и посылокъ по способу проф. Рентгена.

◆ Въ прошломъ году въ Австраліи былъ произведенъ опытъ телеграфированія на большое разстояніе, увѣнчавшійся полнымъ успѣхомъ. Для опыта были соединены всѣ набережныя линіи Австраліи, что дало 11650 километровъ. Конечными станціями были Дерби и Капъ-Йоркъ. Скорость передачи (при помощи аппарата Морзе) равнялась одиннадцати словамъ въ минуту. („Электр.“).

◆ Проектируется устроить прямое телефонное сообщеніе между Берлиномъ и Лондономъ.

ЗАДАЧИ.

№ 337. Показать, что во всякомъ треугольникѣ

$$a(\cos C + \cos B) + b(\cos C + \cos A) + c(\cos B + \cos A) = \frac{abc}{2Rr},$$

$$a(\cos C - \cos B) + b(\cos A - \cos C) + c(\cos B - \cos A) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2Rr},$$

гдѣ a, b, c суть стороны треугольника, R —радіусъ описаннаго, а r —вписаннаго круга.

Д. Е. (Иваново-Вознесенскъ).

№ 338. Изъ точки O внѣ плоскости проведенъ наклонный $OA=a$ и $OB=b$. Уголъ между наклонной OB и плоскостью втрое больше угла между наклонной OA и плоскостью. Определить безъ помощи тригонометріи разстояніе точки O отъ плоскости.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 339. Изъ вершинъ четырехугольника $ABCD$ опущены перпендикуляры AA' , BB' , CC' , DD' на его діагонали. Показать, что четырехугольникъ $A'B'C'D'$ подобенъ четырехугольнику $ABCD$.

С. Петрашкевичъ (Скопинъ).

№ 340. Определить число сторонъ многоугольника, если известно, что число діагоналей, проведенныхъ изъ одной его вершины, относится къ числу всѣхъ различныхъ діагоналей этого многоугольника, какъ $1 : \alpha$.

И. Хиенкинъ (Тамбовъ).

№ 341. Показать, что если раздѣлимъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника на три равныя части и соединимъ точки дѣленія съ вершиной прямого угла, то сумма квадратовъ двухъ терціанъ*), сложенная съ квадратомъ трети гипотенузы, равна двумъ третямъ квадрата гипотенузы.

Я. Полукинъ (с. Знаменка).

№ 342. Въ данный шаръ радіуса r помѣстить пять правильныхъ четырехгранниковъ такъ, чтобы одинъ изъ нихъ имѣлъ центръ общій съ центромъ даннаго шара, а каждый изъ остальныхъ имѣлъ одну сторону общую съ первымъ и одну вершину на поверхности даннаго шара.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 485 (2 сер.). Показать, что двугранный уголъ правильнаго октаэдра и двугранный уголъ правильнаго тетраэдра составляютъ вмѣстѣ два прямыхъ двугранныхъ угла.

Пусть O есть центръ правильнаго октаэдра, ABC —одна изъ его граней, M —середина ребра $AC = a$. Изъ треугольника BMO имѣемъ

$$\cos BMO = \frac{MO}{BM} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

линейный уголъ двугранныаго угла октаэдра вдвое больше угла BMO . Называя его черезъ α , получимъ:

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 BMO - 1 = -\frac{1}{3} \dots \dots (1)$$

*) Терціанами называются прямые, соединяющія вершину треугольника съ точками, въ которыхъ противоположная сторона дѣлится на три равныя части.

Опустимъ изъ вершины S правильнаго тетраэдра $SPQR$ перпендикуляръ SO_1 на грань PQR . Пусть M_1 есть середина ребра PQ , а b —ребро тетраэдра. Изъ треугольника SM_1O_1 имѣемъ:

$$\cos SM_1O_1 = \frac{M_1O_1}{SM_1} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{2}}{\frac{b\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}. \quad (2)$$

Изъ равенствъ (1) и (2) легко видѣть, что $\alpha + \angle SM_1O_1 = 180^\circ$.

П. Ивановъ (Одесса); *С. Бабанская* (Тифлисъ); *Е. Щиголевъ* (Курскъ); *Я. Полухинъ* (с. Знаменка); *А. Ръзновъ* (Спб.).

№ 499 (2 сер.). Данъ гармоническій четырёхугольникъ $ABCD$, котораго діагональ $AC = 2\sqrt{AB \cdot BC}$. Показать, что прямыя AD , BD и CD составляютъ геометрическую прогрессию и опредѣлить знаменателя этой прогрессіи.

Если четырёхугольникъ гармоническій, то $AB \cdot CD = AD \cdot BC$, откуда

$$CD = AD \cdot \frac{BC}{AB}$$

По теоремѣ Птоломея $AC \cdot BD = 2AD \cdot BC$, откуда

$$BD = \frac{2AD \cdot BC}{AC} = \frac{2AD \cdot BC}{2\sqrt{AB \cdot BC}} = AD \sqrt{\frac{BC}{AB}}$$

Слѣдовательно знаменатель прогрессіи равенъ $\sqrt{\frac{BC}{AB}}$.

Г. Легошинъ (с. Знаменка); *Л. Заржеикій* (Оболъцы); *П. Ивановъ* (Одесса); *Е. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 200 (3 сер.). Черезъ каждое ребро куба проведена плоскость, одинаково наклоненная къ сторонамъ соответствующаго двуграннаго угла и не пересѣкающая куба. Показать, что всѣ эти плоскости образуютъ своимъ взаимнымъ пересѣченіемъ ромбическій додекаэдръ.

Если возьмемъ одинъ изъ квадратовъ, ограничивающихъ кубъ, и проведемъ черезъ стороны его плоскости, наклоненныя, согласно условію задачи, подъ угломъ въ 45° къ его плоскости, то легко убѣдимся, что получится пирамида съ квадратнымъ основаніемъ и съ боковой поверхностью, состоящей изъ равныхъ равнобедренныхъ треугольниковъ; къ основанію cadaго изъ этихъ треугольниковъ въ той же плоскости приложенъ другой такой же треугольникъ, такъ же образуется ромбъ и сторона квадрата служить короткой его діагональю. Такихъ ромбовъ получится очевидно 12 и они составятъ ромбическій додекаэдръ, ибо, что не трудно доказать, плоскость, проведенная черезъ высоты двухъ противоположныхъ равнобедренныхъ треугольниковъ въ любой изъ пи-

раמידъ съ квадратнымъ основаніемъ, пересѣкаетъ поверхность образованнаго многогранника по четыремъ прямымъ, составляющимъ квадратъ.

А. Варениковъ (Шуя); ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.

№ 201 (3 сер.). Черезъ каждое ребро правильнаго октаэдра проведена плоскость, одинаково наклоненная къ сторонамъ соответствующаго двуграннаго угла и не пересѣкающая октаэдра. Показать, что всѣ эти плоскости образуютъ взаимнымъ пересѣченіемъ ромбическій додекаэдръ.

Проведя главное квадратное сѣченіе ромбическаго додекаэдра, соединимъ вершины квадрата съ концами той изъ главныхъ осей ромбическаго додекаэдра, которая перпендикулярна къ проведенному сѣченію. Получимъ, очевидно, правильный октаэдръ, причемъ плоскости всѣхъ ромбовъ додекаэдра одинаково наклонены къ сторонамъ октаэдра. Отсюда ясно и обратное построеніе.

А. Варениковъ (Шуя); ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.

№ 258 (3 сер.). Даны стороны вписаннаго въ кругъ четырехугольника $ABCD$ ($AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$). Чтобы вычислить діаметръ описанной окружности, постунаемъ такъ: черезъ D проводимъ діаметръ DN и, опредѣливъ $AN = \sqrt{x^2 - d^2}$ и $NC = \sqrt{x^2 - c^2}$, найдемъ по теоремѣ Птолемея:

$$AC = \frac{c\sqrt{x^2 - d^2} + d\sqrt{x^2 - c^2}}{x},$$

гдѣ x есть искомый діаметръ. Точно такъ же, проведя діаметръ BM и опредѣливъ $AM = \sqrt{x^2 - a^2}$ и $CM = \sqrt{x^2 - b^2}$, найдемъ

$$AC = \frac{b\sqrt{x^2 - a^2} + a\sqrt{x^2 - b^2}}{x}.$$

Такимъ образомъ имѣемъ уравненіе:

$$b\sqrt{x^2 - a^2} + a\sqrt{x^2 - b^2} = c\sqrt{x^2 - d^2} + d\sqrt{x^2 - c^2}.$$

Рѣшить это уравненіе.

Возвысивъ обѣ части даннаго уравненія въ квадратъ, найдемъ:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)x^2 - 2a^2b^2 + 2c^2d^2 + 2ab\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)} = \\ = 2cd\sqrt{(x^2 - c^2)(x^2 - d^2)}. \quad \dots (1) \end{aligned}$$

Если проведемъ діаметры AP и CQ , то составимъ уравненіе:

$$a\sqrt{x^2 - d^2} - b\sqrt{x^2 - c^2} = c\sqrt{x^2 - b^2} - d\sqrt{x^2 - a^2},$$

которое по возвышеніи въ квадратъ даетъ:

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)x^2 + 2cd\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)} = 2ab\sqrt{(x^2 - c^2)(x^2 - d^2)} \quad \dots (2)$$

Изъ этого уравненія опредѣляемъ

$$2\sqrt{(x^2-c^2)(x^2-d^2)} = \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)x^2 + 2cd\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}{ab}$$

и полученное выраженіе вставляемъ въ уравненіе (1); по упрощеніи получимъ:

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)x^2 - 2ab(ab+cd) = -2(ab+cd)\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}.$$

Возвысивъ это уравненіе въ квадратъ, получимъ:

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2x^4 - 4ab(ab+cd)(a^2+b^2-c^2-d^2)x^2 + 4a^2b^2(ab+cd)^2 - \\ - 4(ab+cd)^2(x^2-a^2)(x^2-b^2) = 0,$$

или

$$(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(a-b-c-d)x^2 = \\ = -4(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc),$$

откуда

$$x = 2\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(b+c+d-a)}}.$$

М. Зиминъ (Орель); ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.

НВ. Обыкновенно діаметръ окружности, описанной около четырехугольника, на-
ходятъ тригонометрическимъ путемъ, пользуясь выраженіемъ площади четырехуголь-
ника въ функціи его сторонъ.

№ 259 (3 сер.). Число N дѣлится на 18 и имѣетъ нечетныя
цифры, число которыхъ равно суммѣ цифръ числа N , дѣленной на 9.
Показать, что числа N и $N:2$ имѣютъ одинаковую сумму цифръ.

Обозначимъ сумму цифръ числа N черезъ S , сумму четныхъ его
цифръ—черезъ s_1 , сумму нечетныхъ—черезъ s_2 , и число нечетныхъ
цифръ—черезъ n . При дѣленіи числа N на 2 вмѣсто каждой четной
цифры получится ея половина, каждая же нечетная цифра a дастъ
при дѣленіи на два $(a-1):2$ единицъ того же разряда и 5 единицъ
нѣшаго разряда. Поэтому n нечетныхъ цифръ числа N дадутъ въ
суммѣ цифръ числа $N:2$

$$\frac{s_2-n}{2} + 5n = \frac{s_2+9n}{2}$$

единицъ, а вся сумма цифръ числа $N:2$ будетъ

$$\frac{s_1}{2} + \frac{s_2+9n}{2} = \frac{S+9n}{2};$$

но такъ какъ по условію $9n=S$, то сумма цифръ числа $N:2$ будетъ
 $(S+S):2=S$.

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.; С. Петрашкевичъ (Скопинъ).

№ 260 (3 сер.). Внутри треугольника ABC дана точка M . Построены параллелограммы AMB_1M_1 , VM_1M_2 и $СМАМ_3$. Доказать, что прямые AM_2 , BM_3 и CM_1 пересекаются в одной точке.

Так как отрезок AM_3 равен и параллелен отрезку MC , а отрезок MC равен и параллелен отрезку BM_2 , то фигура ABM_2M_3 есть параллелограмм и его диагонали AM_2 и BM_3 взаимно делятся пополам в точке K . Так как отрезок BM_1 равен и параллелен отрезку AM , а отрезок AM равен и параллелен отрезку CM_3 , то фигура BCM_3M_1 есть также параллелограмм и диагональ его CM_1 проходит через середину K диагонали BM_3 .

Очевидно, что теорема остается справедливой для всякой точки в плоскости треугольника ABC .

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.; Э. Заторскій (Вильно); Г. Легошинъ (с. Знаменка); Л. (Тамбовъ).

№ 265 (3 сер.). Определить внутренние углы ромбовъ, ограничивающихъ ромбическій додекаэдръ, и сравнить ихъ съ линейными углами двугранныхъ угловъ правильного тетраэдра и правильного октаэдра.

Обозначимъ короткую диагональ AC одного изъ ромбовъ $ABCD$, ограничивающихъ ромбическій додекаэдръ, черезъ a . Пусть M есть точка пересѣченія диагоналей AC и BD . Имѣемъ:

$$BM = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Пусть α есть тупой уголъ ромба, β — острый. Изъ треугольника ABM найдемъ:

$$\cos \alpha/2 = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos \beta/2 = \frac{BM}{AB} = \sqrt{2/3},$$

откуда

$$\cos \alpha = -1/3; \quad \alpha = 109^\circ 28' 13, (3)''$$

$$\cos \beta = 1/3; \quad \beta = 70^\circ 31' 46, (6)''.$$

Такимъ образомъ (см. рѣш. зад. 485-ой 2-ой сер.) тупой уголъ ромба, ограничивающаго ромбическій додекаэдръ, равенъ линейному углу правильного октаэдра, а острый — правильного тетраэдра.

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.; Я. Полушкинъ (Знаменка).

№ 266 (3 сер.). Имѣетъ ли цѣлыя рѣшенія неопредѣленное уравненіе

$$y(10x^2 + 21y^5 - 30z^3) = 578?$$

Представивъ данное уравненіе въ видѣ:

$$10x^2 + 21y^5 - 30z^3 = \frac{578}{y} = \frac{2.289}{y},$$

легко видѣть, что при y четномъ правая часть уравненія нечетна, а

лѣвая четна, чего, очевидно, не можетъ быть; при y же нечетномъ правая часть уравненія должна быть четной, а лѣвая нечетной, чего также не можетъ быть.

С. Петрашкевичъ (Скопинъ); *Э. Заторскій* (Вильно); *ученики Кіево - Печерской гимназіи Л. и Р.; Ю. Идельсонъ* (Одесса).

№ 272 (3 сер.). Треугольникъ $A'B'C'$ вписанъ въ треугольникъ ABC такъ, что вершина A' лежитъ на сторонѣ BC , B' —на AC и C' —на AB . Обозначимъ стороны треугольника ABC черезъ a, b, c , а отрезки AB', CB' и AC' соответственно черезъ x, y, z . Показать, что отношеніе площади треугольника $A'B'C'$ къ площади ABC равно

$$\frac{xyz + (a-x)(b-y)(c-z)}{abc}.$$

Такъ какъ площади треугольниковъ, имѣющихъ общій уголъ, относятся какъ произведенія сторонъ, заключающихъ этотъ уголъ, то

$$\frac{\text{пл. } A'BC'}{\text{пл. } ABC} = \frac{x(c-z)}{ac}, \quad \text{пл. } A'BC' = \text{пл. } ABC \frac{x(c-z)}{ac};$$

$$\frac{\text{пл. } A'B'C}{\text{пл. } ABC} = \frac{y(a-x)}{ab}, \quad \text{пл. } A'B'C = \text{пл. } ABC \frac{y(a-x)}{ab};$$

$$\frac{\text{пл. } AB'C'}{\text{пл. } ABC} = \frac{z(b-y)}{bc}; \quad \text{пл. } AB'C' = \text{пл. } ABC \frac{z(b-y)}{bc}.$$

Если вычтемъ сумму площадей $A'BC'$, $A'B'C$ и $AB'C'$ изъ площади ABC , то получимъ площадь $A'B'C'$. Поэтому

$$\frac{\text{пл. } A'B'C'}{\text{пл. } ABC} = 1 - \frac{x(c-z)}{ac} - \frac{y(a-x)}{ab} - \frac{z(b-y)}{bc} =$$

$$\frac{xyz + (a-x)(b-y)(c-z)}{abc}.$$

М. Зиминъ (Орель); *Э. Заторскій* (Вильно); *ученики Кіево - Печерской гимназіи Л. и Р.; В. Сахаровъ* (Тамбовъ).

№ 273 (3 сер.). Определить x изъ уравненія:

$$\frac{(x+a+b)^5 + (x+c+d)^5}{(x+a+c)^5 + (x+b+d)^5} = \frac{m}{n}.$$

Пусть

$$\frac{2x+a+b+c+d}{2} = y, \quad \frac{a+b-c-d}{2} = p, \quad \frac{a+c-b-d}{2} = q.$$

Тогда данное уравненіе представится въ такомъ видѣ:

$$\frac{(y+p)^5 + (y-p)^5}{(y+q)^5 + (y-q)^5} = \frac{m}{n}.$$

Сокративъ это уравненіе на $2y$, что даетъ

$$x = -\frac{a+b+c+d}{2},$$

получимъ:

$$\frac{(y+p)^4 - (y+p)^3(y-p) + (y+p)^2(y-p)^2 - (y+p)(y-p)^3 + (y-p)^4}{(y+q)^4 - (y+q)^3(y-q) + (y+q)^2(y-q)^2 - (y+q)(y-q)^3 + (y-q)^4} = \frac{m}{n}.$$

Разложивъ всё двучлены по формулѣ бинома и произведя упрощенія, получимъ биквадратное относительно y уравненіе

$$y^4(m-n) + 10(mq^2 - np^2)y + 5(mq^4 - np^4) = 0,$$

которое дастъ 4 значенія для y , а слѣдовательно и для x .

Э. Заторскій (Вильно); М. Зиминъ (Орёлъ).

№ 275 (3 сер.). Пусть μ обозначаетъ отношеніе площадей правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ, изъ которыхъ одинъ вписанъ въ кругъ, а другой описанъ около того же круга; пусть μ' обозначаетъ отношеніе площадей вписаннаго и описаннаго правильныхъ многоугольниковъ съ удвоеннымъ числомъ сторонъ. Показать, что

$$\mu' = \frac{1 + \sqrt{\mu}}{2}.$$

1. Изъ равенства

$$a_{2n}^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}},$$

выражающаго зависимость между стороной a_{2n} многоугольника о $2n$ сторонахъ, стороной a_n многоугольника о n сторонахъ и радіусомъ r круга, въ который оба эти многоугольника вписаны, получаемъ:

$$\frac{r^2}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}} = r^2 - \frac{a_{2n}^2}{4},$$

или

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}}{r}}{2} = \frac{r^2 - \frac{a_{2n}^2}{4}}{r^2} \dots \dots \dots (a)$$

Отношеніе площадей правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ, изъ которыхъ одинъ вписанъ въ кругъ, а другой описанъ около того же круга, равно отношенію квадрата апогея вписаннаго многоугольника къ квадрату радіуса круга. Слѣдовательно

$$\mu' = \frac{r^2 - \frac{a_{2n}^2}{4}}{r^2}, \quad \sqrt{\mu} = \frac{\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}}{r}.$$

Подставляя μ' и $\sqrt{\mu}$ въ равенство (α) получимъ требуемое соотношение.

М. Зиминъ (Орелъ); *Е...овъ* (Пенза); *П. Бьловъ* (с. Знаменка).

2. Такъ какъ апогема вписаннаго въ кругъ радіуса r многоугольника обѣ n сторонахъ равна $r \cos \alpha$, гдѣ $\alpha = 180^\circ : n$, то

$$\mu = \cos^2 \alpha, \quad \mu' = \cos^2 \alpha / 2.$$

Возвышая въ квадратъ выраженіе

$$\cos \alpha / 2 = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

получимъ

$$\cos^2 \alpha / 2 = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad \text{или} \quad \mu' = \frac{1 + \sqrt{\mu}}{2}.$$

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.; Э. Заторскій (Вильно); *В. Сахаровъ* (Тамбовъ).

№ 276 (3 сер.). Найти геометрическое мѣсто ортоцентровъ треугольниковъ, имѣющихъ постоянную сторону и уголъ, противолежащій этой сторонѣ.

Легко показать, что сторона a видна изъ ортоцентра подѣ угломъ $180^\circ - A$. Слѣдовательно при постоянныхъ a и A искомымъ геометрическимъ мѣстомъ будетъ дуга, описанная на сторонѣ a и вмѣщающая уголъ $180^\circ - A$.

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.; Э. Заторскій (Вильно); *Г. Леонтинъ* (с. Знаменка); *С. Циклинскій* (Пинскъ).

№ 277 (3 сер.). Показать, что если

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{a},$$

то

$$(a + b - c)^3 + 2(b + c - a)^3 + (c + a - b)^3 = 2(b + c)^3.$$

Изъ равенства

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{a}$$

имѣемъ

$$6a^2c + 6a^2b - 24abc = 0.$$

Сложивъ это равенство съ тождествомъ:

$$2a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 6ab^2 + 6ac^2 + 3bc^2 + 3b^2c - 2a^3 - b^3 - c^3 - 3a^2b - 3a^2c - 6ab^2 - 6ac^2 - 3bc^2 - 3b^2c + 2b^3 + 2c^3 + 6b^2c + 6bc^2 = 2(b + c)^3,$$

легко представимъ полученную сумму въ требуемомъ видѣ,

М. Зиминъ (Орелъ); принцъ *Хосро-Мирза*, *Винтеръ* (Симбирскъ); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.; С. Циклинскій* (Пинскъ); *Э. Заторскій* (Вильно); *П. Бьловъ* (с. Знаменка).

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *К. Чанковскаго* (Троицкъ) 227 (3 сер.); *Ю. Идельсона* (Одесса) 266, 299, 300, 302, 307 (3 сер.); *М. Зимица* (Елецъ) 273, 274, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 291, 292, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 304, 305, 306, 307, 309, 310, 312, 313, 323 (3 сер.); *А. Ярица* (Тамбовъ) 307 (3 сер.); *Э. Заторскаго* (Вильно) 69, 281, 287, 292, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 306, 307, 309, 312, 315, 316, 319, 322 (3 сер.); *С. Петрашкевича* (ст. Никитино) 249, 259, 266, 269, 278, 279, 296, 297 (3 сер.); *Лежебока* и *В.* (Ярославль) 297, 301, 302, 306, 307, 312 (3 сер.); *Лежебока* (Ярославль) 226, 227, 245, 247, 256, 257, 262, 291, 292, 296, 298, 299 (3 сер.); *учениковъ Тамбовской гимназіи С. Н-ва и И. Х-на* 288, 295, 296, 300, 302 (3 сер.); *С. Ц.* (Пинскъ) 295, 296 (3 сер.); *принца Хосро-Мирза* и *Винтера* (Симбирскъ) 237, 277 (3 сер.); *Свищова* (Сиб.) 281, 284, 286, 288, 292 (3 сер.); *С. Циклинскаго* (Пинскъ) 194, 230, 243, 276, 281, 288, 296 (3 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 64, 68 (2 сер.), 297, 300, 302, 303, 305, 308, 309, 312, 313, 314, 316, 319, 320, 322, 323 (3 сер.); *П. Блюва* (с. Знаменка) 479 (1 сер.), 296, 306 (3 сер.); *Г. Леошина* (с. Знаменка) 301 (3 сер.); *Д. Целмера* (Тамбовъ) 257, 296, 298, 299, 300 (3 сер.); *С. Зайцева* (Курскъ) 296, 297, 298, 299, 300, 301 (3 сер.).

ПРОПУЩЕНА въ спискахъ рѣшившихъ задачи 221 и 255 (3 сер.) фамилія *П. Хлыбникова* (Тула).

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHEMATICS.

1895.—№ 8 и 9.

Sur les valeurs principales des radicaux. Par M. De Tilly. Авторъ замѣчаетъ, что французскіе учебники по алгебрѣ отличаются крайне сжатымъ и потому неяснымъ изложеніемъ статьи, гдѣ трактуются о знакахъ $+$ и $-$ передъ радикалами въ формулахъ преобразованія иррациональных выраженій *). Чтобы пополнить этотъ пробѣлъ, онъ подробно разсматриваетъ преобразованіе выраженія $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}$. Результаты анализа выражены имъ слѣдующими равенствами:

$$\sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}},$$

$$\sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}},$$

$$\sqrt{a + b\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}},$$

$$\sqrt{\pm a - b\sqrt{-1}} = \pm \sqrt{\frac{\pm a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} \mp a}{2}};$$

*) То же можно замѣтить и относительно русскихъ учебниковъ.

во всѣхъ этихъ равенствахъ $b > 0$; $a > 0$ въ последнемъ; въ первыхъ же трехъ можетъ быть $>$ и < 0 .

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

при $a > 0$ и всякомъ $a^2 - b$, или при $a < 0$ и $a^2 - b < 0$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \mp \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

при $a < 0$ и $a^2 - b > 0$.

Sur les courbes algébriques. Par M. Gob. Пусть C и C' суть двѣ плоскія алгебраическія кривыя n -го порядка съ общими асимптотами. Предположимъ, что нѣкоторая прямая пересѣкаетъ эти кривыя соотвѣтственно въ точкахъ A_1, A_2, \dots, A_n и B_1, B_2, \dots, B_n ; тогда

$$\sum_1^n MA_i = \sum_1^n MB_i,$$

гдѣ M —произвольная точка сѣкущей.

Примемъ точку M за полюсъ и нѣкоторую прямую MX за ось полярныхъ координатъ. Положивъ $\angle XMA_i = \vartheta$ и обозначивъ черезъ MP_i и MQ_i полярныя сунормали кривыхъ въ точкахъ A_i и B_i получимъ

$$\frac{dMA_i}{d\vartheta} = MP_i \text{ и } \frac{dMB_i}{d\vartheta} = Q_i,$$

или, на основаніи предыдущаго равенства:

$$\sum_1^n MP_i = \sum_1^n MQ_i.$$

Предположимъ теперь, что прямая MP_i нормальна къ C въ точкѣ A , и перемѣстимъ сѣкущую параллельно самой себѣ въ положеніе касательной къ C въ точкѣ A ; тогда точки M, A_{n-1} и A_n совпадутъ съ A , а точки P_{n-1} и P_n совпадутъ съ центромъ кривизны ω кривой C въ точкѣ A ; въ этомъ предположеніи послѣднее равенство приметъ видъ

$$2A\omega + \sum_1^{n-2} AP_i = \sum_1^n AQ_i.$$

Если всѣ асимптоты дѣйствительны, то вмѣсто кривой C' удобно принять систему этихъ асимптотъ. Такимъ путемъ получается теорема:

Если касательная къ гиперболѣ въ точкѣ A пересѣкаетъ асимптоты ея въ B_1 и B_2 и если Q_1 и Q_2 суть точки пересѣченія нормали къ гиперболѣ въ A съ перпендикулярами къ асимптотамъ въ B_1 и B_2 , то центръ кривизны гиперболы въ точкѣ A есть середина отрезка Q_1Q_2 .

Если C есть эллипсъ, то C' есть также эллипсъ, гомотетичный съ C ; выберемъ эллипсъ C' такъ, чтобы пересѣченія его B_1 и B_2 съ касательной въ A къ эллипсу C были концами двухъ сопряженныхъ діаметровъ C' . Въ этомъ случаѣ изъ послѣдняго равенства получается теорема:

Пусть AB_1 и AB_2 суть два отрезка на касательной въ A къ эллипсу, равные полу-діаметру его сопряженному съ OA . Если Q_1 и Q_2 суть пересѣченія перпендикуляровъ изъ B_1 и B_2 на OB_2 и OB_1 съ нормалью къ эллипсу въ точкѣ A , то центръ кривизны эллипса въ A есть середина отрезка Q_1Q_2 .

Mathématiques et mathématiciens. La droite, le plan, l'espace d'après Cauchy.

Sur un cas remarquable des transformations centrales Par M. G. de Longchamps. Пусть (u, ω) , (U, Ω) суть полярныя координаты точекъ m и M , связанныя равенствами:

$$\omega = \Omega, f(u, U) = 0,$$

гдѣ f есть симметрическая ф-ція u и U . *Laisant* показалъ, что при такомъ преобразованіи координатъ всегда можно найти соотношеніе вида

$$g(u)du + G(U)dU = 0,$$

на основаніи котораго можно построить касательную къ кривой (M) , когда извѣстно положеніе касательной къ (m) въ соотвѣтственной точкѣ. *De Longchamps* замѣчаетъ, что существуетъ другой видъ, центрального преобразованія, имѣющій то же свойство.

Пусть формулы преобразованія суть

$$\Omega = \omega, U = t.u,$$

гдѣ t произвольная ф-ція ω . Изъ этихъ формулъ и ихъ дифференціаловъ

$$d\Omega = d\omega, dU = t.du + udt$$

получается равенство:

$$\frac{dU}{d\Omega} = \frac{du}{d\omega} + \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{d\omega},$$

или

$$\cotg V = \cotg v + \frac{t'}{t},$$

гдѣ V и v суть углы, составляемые векторомъ OMm съ кривыми (M) и (m) ; изъ этого равенства находится V по данному v .

Обозначимъ черезъ A пересѣченіе касательныхъ къ кривымъ (M) и (m) въ соотвѣтственныхъ точкахъ M и m ; черезъ H —проекцію A на векторъ OMm , тогда (фиг. 48): $MH = AH \cotg V$, $mH = AH \cdot \cotg v$ и последнее равенство принимаетъ видъ

$$Mm = AH \cdot \frac{t'}{t}; \quad (1)$$

на основаніи этого равенства легко опредѣлить AH и построить прямую, параллельную вектору OMm , на которой пересѣкаются соотвѣтственные касательныя.

Примѣръ. Пусть K есть проекція на ось OX точки m , M — проекція точки K на Om (фиг. 49). При такомъ преобразованіи m въ M формулы преобразованія суть

$$\Omega = \omega, U = u \cdot \cos^2 \omega.$$

$$\text{Такъ какъ въ этомъ случаѣ } \frac{t'}{t} = -2\operatorname{tg} \omega,$$

то (1)

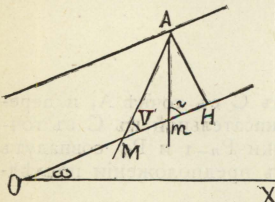
$$AH = \frac{1}{2} MK.$$

Слѣдовательно: Соотвѣтственныя касательныя въ m и M пересѣкаются на прямой, параллельной вектору точки m и проходящей черезъ середину ординаты mK этой точки.

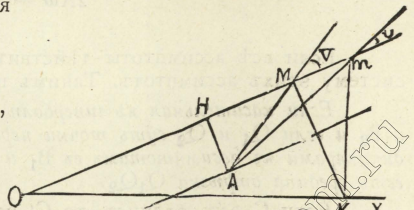
Sur une transformation centrale. Par M. L. Meurice. Пусть OX есть ось полярныхъ координатъ; P — проекція точки M на OX , m — проекція P на OM . Координаты (U, ω) и (u, ω) соотвѣтственныхъ точекъ M и m при такомъ построении преобразуются по формуламъ

$$\omega = \Omega, u = U \cos^2 \omega.$$

Meurice, на основаніи кинематическихъ соображеній, показываетъ, какъ при такомъ преобразованіи строится нормаль къ кривой (m) , когда извѣстно положеніе соотвѣтственной нормали къ кривой (M) .



Фиг. 48.



Фиг. 49.

Revue bibliographique. Essai sur le postulat d'Euclide. Par *M. Crevet*.

Traité d'algèbre. Compléments. Par *M. Laurent*. Paris 1894.

Exercices de Calcul différentiel. Par *M. L. Collette*. Liège. 1894.

Cours de Mécanique. Par *M. X. Antomari*. Paris 1895.

Deux mille quatre cent nouvelles questions mathématiques. Par *M. E. Verhelst*. Bruxelles. 1895.

Notes extraites de la correspondance mathématique et physique.

3. *Problème sur la sphère.* Определить наибольшее число равных шаровъ, касающихся одновременно данного шара того же радиуса. *Ch. Tandel* рѣшаетъ эту задачу такъ. Данный шаръ окружается шестью соприкасающимися между собой шарами того же радиуса; центры всѣхъ этихъ семи шаровъ находятся въ одной плоскости. По ту и по другую сторону этой плоскости помѣщается еще по три такихъ же шара, касающихся данного.

4. *Théorème sur des parallelogrammes.* Пусть CADE и CBFG суть два параллелограмма въ одной плоскости; обозначимъ черезъ I и K пересѣченія AD съ BF и DE съ FG. Параллелограммъ, стороны котораго равны и параллельны AB и CK, равновеликъ параллелограмму, стороны котораго равны и параллельны GE и CI; площадь каждаго изъ этихъ параллелограммовъ равна суммѣ или разности площадей параллелограммовъ CADE и CBFG.

5. *Sur les podaires de parabole.*

6. *Théorèmes sur les coniques.*

Solutions de questions proposées. №№ 635, 677, 799, 816, 872, 936, 943, CCXIII.

Questions d'examen. №№ 694—697.

Questions proposées. №№ 1031—1038.

1895. — № 10.

Sur les valeurs principales des radicaux. Par *M. De Tilly* (Suite). При извлеченіи корней изъ дѣйствительныхъ количествъ, главное (или простѣйшее) выраженіе корня определяется слѣдующими условіями:

1) Главный корень степени m изъ положительнаго количества a есть арифметическое значеніе корня со знакомъ $+$.

2) Главный корень степени m изъ отрицательнаго количества $-a$, при m нечетномъ, есть арифметическое значеніе корня изъ a , умноженное на $+\sqrt[m]{-1}$.

Обобщая эти условія для корней изъ мнимыхъ количествъ и полагая

$$\sqrt[m]{a + b\sqrt{-1}} = \sqrt[m]{a^2 + b^2} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{m} + \sqrt{-1} \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{m} \right),$$

гдѣ

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

авторъ изслѣдуетъ, при какихъ значеніяхъ переменнѣй k вторая часть этого равенства служить главнымъ выраженіемъ корня.

Bibliographie. L'Arithmétique amusante, par *Ed. Lucas*. Paris. 1895. Prix. 7 fr. 50.

Agrégation des sciences mathématiques (élémentaires. 1895) Вершины тр-ка T' суть ортогональныя проеціи точки M на стороны тр-ка T .

1) Доказать, что при перемѣщеніи точки M по нѣкоторой прямой Δ стороны тр-ка T' обвертываютъ три параболы P, P_1, P_2

2) При какомъ положеніи прямой Δ директриссы параболъ P, P_1, P_2 пересекаются въ одной точкѣ.

3) Доказать, что при вращении прямой Δ около постоянной точки k директрисы парабол P, P_1, P_2 проходят соответственно через постоянные точки I, I_1, I_2 .

4) При каком положении точки k точки I, I_1, I_2 находятся на одной прямой? $J. N.$ дает указание для элементарного решения этих вопросов.

Note sur un article de Mathesis. Par M. Droz-Farny. По поводу замечки Neuberg'a о конических сечениях в плоскости тр-ка (Math. 1895, № 3) M. Droz-Farny сообщает следующее.

I. Пусть P есть переменная точка на стороне BC тр-ка ABC ; P_1 и P_2 — ее проекции на стороны CA и AB ; A' — основание перпендикуляра из A на BC ; β и γ — проекции A' на AC и AB . При перемещении точки P по BC прямая P_1P_2 обвертывает параболу, имеющую фокус в A ; прямая $\beta\gamma$ касается этой параболы в ее вершине.

II. Пусть P есть какая-нибудь точка в плоскости тр-ка ABC ; P_1, P_2, P_3 — ее проекции на стороны BC, CA, AB . Если прямая P_2P_3 делится пополам прямой PP_1 , то AP есть симедиана тр-ка (Соллертинский). Отсюда выводятся следствия:

1) Точка Lemoine'a есть центр тяжести тр-ка, вершины которого суть проекции этой точки на стороны главного тр-ка.

2. Если из точки пересечения D симедиан угла A с описанной около тр-ка окружностью опустить перпендикуляры DD_1, DD_2, DD_3 на стороны тр-ка, то D_1 есть середина прямой D_2D_3 ($J. Van Haarst$).

Прямая $D_1D_2D_3$ обвертывает параболу, вписанную в тр-к; фокус этой параболы в точке D , а директрисой ее служит перпендикуляр из ортоцентра тр-ка на медиану его, проведенную из вершины A .

Notes mathématiques 4. Note additionnelle à la question 635 ($J. N.$). 15. Remarque relative à la question 928. (*Barbarin*).

Solutions de questions proposées. №№ 681, 890, 913, 914, 922, 941.

№ 681. Пусть A', B', C' суть пересечения окружности, описанной около тр-ка ABC с его медианами (или высотами). Прямая, соединяющая точку Tarry N с вершинами тр-ка ABC , пересекают соответственные стороны тр-ка $A'B'C'$ на прямой, проходящей через центр тяжести G (или ортоцентр) и точку Lemoine'a K тр-ка ABC . (*E. Cesaro*).

№ 941. Во всяком тр-ке ABC

$$abc + (a-b)(b-c)(c-a) = 4Rr(a \cos C + b \cos A + c \cos B),$$

$$abc - (a-b)(b-c)(c-a) = 4Rr(a \cos B + b \cos C + c \cos A).$$

(Mandart).

Из этих равенств через непрерывное преобразование относительно A (*transformation continue*) M. Lemoine выводит соотношения:

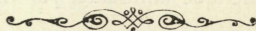
$$abc + (a+b)(a-c)(c+a) = 4Rr_a(a \cos B - b \cos A - c \cos B).$$

$$abc - (a+b)(b-c)(c+a) = 4Rr_a(a \cos B - b \cos C + c \cos B).$$

Questions d'examen. №№ 698—701.

Questions proposées. №№ 1039—1042.

Д. Е.



Редактор-Издатель Э. К. Шпачинский.

Дозволено цензурою. Одесса, 13-го Июля 1896 г.

„Центральная типо-литография“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

Обложка
щется

Обложка
щется