Обложка
ищется

Обложка
пщется

XX Сем. 20-го Февраля 1896 г. № 4.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 232.

НОВАЯ ГЕОМЕТРІЯ
ТРЕУГОЛЬНИКА.

(Géométrie récente du triangle).

(Продолженіе).*

III. О фигурахъ подобныхъ и одинаково расположенныхъ.

1. Два *подобныхъ* многоугольника въ одной плоскости (ABCD... и A′B′C′D′...) наз. *одинаково расположенными*, если двѣ сходственныя стороны ихъ (напр. BC и B′C′) отклоняются въ одну сторону (т. е. обѣ вправо, или обѣ влѣво) отъ направленія двухъ другихъ сходственныхъ сторонъ ихъ (напр. AB и A′B′).

Двѣ точки M и M′ подобныхъ и одинаково расположенныхъ многоугольниковъ наз. *соотвѣтственными* или *гомологичными* (homologues), если треугольники AMB и A′M′B′ подобны и одинаково расположены.

Если M и M′, N и N′ суть двѣ пары соотвѣтственныхъ точекъ подобныхъ многоугольниковъ, то прямыя MN и M′N′ наз. *соотвѣтственными* или гомологичными прямыми этихъ многоугольниковъ.

*) См. „Вѣстника Оп. Физики“ №№ 230 и 231.

Уголъ, составленный двумя сходственными сторонами, или вообще соотвѣтственными прямыми подобныхъ и одинаково расположенныхъ многоугольниковъ, имѣетъ одну и ту же величину для каждой пары такихъ прямыхъ.

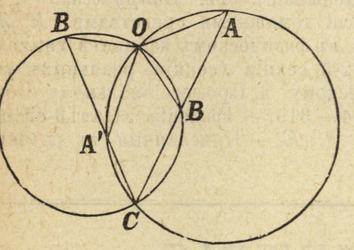
Если соотвѣтственныя прямыя двухъ подобныхъ и одинаково расположенныхъ многоугольниковъ параллельны, то многоугольники гомотетичны.

Обратно: *гомотетичные многоугольники подобны и одинаково расположены.*

2. *Двойною точкой* подобныхъ и одинаково расположенныхъ многоугольниковъ наз. точка O, съ которою совпадаютъ двѣ соотвѣтственныя точки M и M′ этихъ многоугольниковъ.

Задача. *Найти двойную точку подобныхъ и одинаково расположенныхъ многоугольниковъ F и F′.*

Пусть AB и A′B′ (фиг. 9) суть соотвѣтственныя прямыя многоугольниковъ F и F′. Обозначивъ черезъ C пересѣченіе ихъ, опишемъ окружности AA′C и BB′C; пересѣченіе ихъ O есть искомая двойная точка многоугольниковъ F и F′; ибо $\angle OAB = \angle OA'B'$ и $\angle OBA = \angle OB'A'$, слѣд., треугольники AOB и A′OB′ подобны и одинаково расположены.



Фиг. 9.

Если точка A′ совпадаетъ съ B, то и C совпадаетъ съ B; въ этомъ случаѣ двойная точка O опредѣляется пересѣченіемъ окружности, проходящей черезъ A и B и касательной къ BB′, съ окружностью, проходящею черезъ B и B′ и касательною къ AB.

Двойная точка гомотетичныхъ многоугольниковъ есть ихъ центръ гомотетіи.

3. Изъ построенія и опредѣленія двойной точки подобныхъ и одинаково расположенныхъ многоугольниковъ слѣдуетъ, что

a) Два подобныхъ и одинаково расположенныхъ многоугольника всегда имѣютъ только одну двойную точку.

b) Разстоянія двойной точки отъ соотвѣтственныхъ прямыхъ относятся какъ эти прямыя.

c) Уголъ, составленный прямыми, соединяющими двойную точку съ соотвѣтственными точками подобныхъ многоугольниковъ, равенъ углу между соотвѣтственными прямыми этихъ многоугольниковъ.

d) Два подобныхъ и одинаково расположенныхъ многоугольника становятся гомотетичными при вращеніи одного изъ нихъ около двойной точки.

4. Теорема. *Если многоугольникъ* A′B′C′..., *подобный и одинаково расположенный съ многоугольникомъ* ABC..., *при вращеніи около двойной точки* O *принимаетъ положеніе* A″B″C″..., *то треугольники* OAA″, OBB″, OCC″... *подобны и одинаково расположены.* Обратно:

Если на прямыхъ, соединяющихъ точку O *съ вершинами многоугольника* ABC..., *построить подобные и одинаково расположенные треугольники* OAA'', OBB'', OCC''..., *то многоугольникъ* $A''B''C''$... *подобенъ и одинаково расположенъ съ многоугольникомъ* ABC...

5. Двойная точка подобныхъ и одинаково расположенныхъ многоугольниковъ наз. *центромъ подобія* этихъ многоугольниковъ.

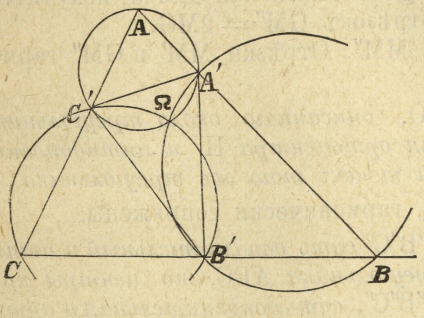
Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что двѣ соотвѣтственныя вершины подобныхъ и одинаково расположенныхъ многоугольниковъ и точки пересѣченія соотвѣтственныхъ прямыхъ, выходящихъ изъ этихъ точекъ, лежатъ на одной окружности; всѣ такія окружности проходятъ черезъ одну точку—центръ подобія многоугольниковъ.

6. Теорема. *Если треугольникъ* ABC *и вписанный въ него треугольникъ* $A'B'C'$ *подобны и одинаково расположены, при чемъ соотвѣтственныя вершины ихъ* A *и* A' *находятся на одной сторонѣ* (*напр.* AB) *треугольника* ABC, *то центръ подобія этихъ треугольниковъ есть постоянная точка* Ω. (Фиг. 10).

Центръ подобія треугольниковъ ABC и $A'B'C'$ есть общая точка Ω окружностей $AA'C'$, $BB'A'$, $CC'B'$. Соединивъ Ω съ B и C, получимъ:

$$\angle B\Omega C = \angle B\Omega B' + \angle C\Omega B' =$$
$$= \angle BA'B' + \angle CC'B' =$$
$$= (180^0 - \angle B - \angle A'B'B) +$$
$$+ (180^0 - \angle C - \angle C'B'C) =$$
$$= \angle A + \angle B' = \angle A + \angle B,$$

ибо $\angle B' = \angle B$. Такимъ образомъ



Фиг. 10.

$$\angle B\Omega C = 180^0 - C,\quad \angle C\Omega A = 180^0 - A,\quad \angle A\Omega B = 180^0 - B,$$

т. е. Ω есть пересѣченіе дугъ, описанныхъ на сторонахъ треугольника ABC и вмѣщающихъ углы 180^0—A, 180^0—B, 180^0—C.

Если вершина A' треугольника $A'B'C'$ находится на сторонѣ AC треугольника ABC, то центръ подобія этихъ треугольниковъ есть другая постоянная точка Ω'.

7. Точки Брокара (*Brocard*). Окружности $A\Omega B$, $B\Omega C$, $C\Omega A$ касаются сторонъ треугольника BC, CA, AB въ точкахъ B, C и A; подобнымъ же свойствомъ обладаютъ дуги $A\Omega'B$, $B\Omega'C$, $C\Omega'A$. Опредѣляющіяся такимъ образомъ точки Ω и Ω' наз. точками *Брокара* треугольника ABC.

8. Уголъ Брокара. Углы ΩAB, ΩBC, ΩCA и подобные же углы при Ω' равны между собою; обозначивъ общую величину ихъ черезъ ω, получимъ уравненіе

$$\sin^3\omega = \sin(A-\omega).\sin(B-\omega).\sin(C-\omega),$$

изъ котораго слѣдуетъ, что

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C.$$

Уголъ ω, опредѣляющійся этой формулой, наз. *угломъ Брокара* треугольника ABC.

9. Дополнительныя точки (*E. Hain*, *Longchamps*). Треугольникъ $A'B'C'$, вершины котораго суть средины сторонъ треугольника ABC, наз. *дополнительнымъ* (complémentaire) треугольника ABC. Треугольникъ ABC въ этомъ случаѣ наз. *антидополнительнымъ* (anticomplémentaire) треугольника $A'B'C'$.

Дополнительный ($A'B'C'$) и *антидополнительный* (ABC) треугольники *гомотетичны*; центръ гомотетіи ихъ есть пересѣченіе медіанъ треугольника ABC, т. е. центръ тяжести G этого треугольника.

Если M и M' суть соотвѣтственныя точки треугольниковъ ABC и $A'B'C'$, то M' наз. *дополнительной* точки M, а M—*антидополнительной* точки M'.

10. Прямая MM', соединяющая дополнительную и антидополнительную точки треугольниковъ ABC и $A'B'C'$, проходитъ черезъ центръ тяжести G треугольника ABC и дѣлится этой точкой такъ, что $MG:M'G=2$. На этомъ основано построеніе точки M', дополнительной для данной точки M. Точка M'', антидополнительная для M, получится, если на продолженіи MG отложить отрѣзокъ $GM''=2MG$.

Точка M' есть средина отрѣзка MM''. Отрѣзки MM' и GM'' гармонически сопряжены.

11. Теорема. *Центръ круга* O, *описаннаго около треугольника* ABC, *есть дополнительная точка для ортоцентра* H *и антидополнительная для центра* O_9 *круга девяти точекъ того же треугольника.*

Слѣдствіе. Отрѣзки HG и OO_9 гармонически сопряжены.

12. Теорема. *Если* $A'B'C'$ *и* $A''B''C''$ *суть дополнительный и антидополнительный треугольники для треугольника* ABC, *то центры круговъ* I' *и* I'', *вписанныхъ въ* $A'B'C'$ *и* $A''B''C''$, *суть дополнительная и антидополнительная точки центра* I *круга, вписаннаго въ* ABC.

13. Точки и прямыя гармонически связанныя (harmoniquement associés. *E. Lemoine*). Пусть прямыя AM, BM, CM, соединяющія вершины треугольника ABC съ точкой M, пересѣкаютъ стороны его BC, CA, AB въ точкахъ M_1, M_2, M_3 (фиг. 11).

Теорема. *Точки* m_1, m_2, m_3, *гармонически сопряженныя* (*соотвѣтственно*) *съ точками* M_1, M_2, M_3 *относительно сторонъ треугольника* BC, CA, AB, *находятся на одной прямой.*

Ибо, по теоремѣ *Чевы* (I, 4) и опредѣленію гармонически сопряженныхъ точекъ

$$\frac{M_1B.\,M_2C.\,M_3A}{M_1C.\,M_2A.\,M_3B}=-1,$$

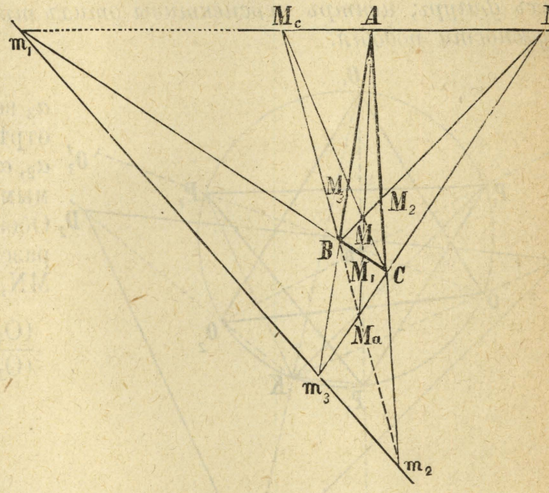
$$\frac{M_1B}{M_1C}=-\frac{m_1B}{m_1C},\ \frac{M_2C}{M_2A}=-\frac{m_2C}{m_2A},\ \frac{M_3A}{M_3B}=-\frac{m_3A}{m_3B};$$

слѣдовательно

$$\frac{m_1B.m_2C.m_3A}{m_1C.m_2A.m_3B}=1,\ \frac{m_1B.M_2C.M_3A}{m_1C.M_2A.M_3B}=1,\ \frac{M_1B.m_2C.m_3A}{M_1C.m_2A.m_3B}=-1;$$

отсюда по теоремѣ *Птоломея* (I, 3) заключаемъ, что точки m_1, m_2, m_3 лежатъ на оси перспективы треугольниковъ ABC и $M_1M_2M_3$.

Вершины треугольника $M_aM_bM_c$, составленнаго прямыми Am_1, Bm_2, Cm_3, находятся соотвѣтственно на прямыхъ AM_1, BM_2, CM_3 и суть гармонически сопряженныя точки съ M относительно этихъ отрѣзковъ.



Фиг. 11.

14. Прямая $m_1m_2m_3$ наз. *гармонически связанной* (harmoniquement associée) *съ точкой* M, *или трилинейной полярой* (polaire trilinéaire) точки M. Точка M наз. гармонически *связанной съ прямой* $m_1m_2m_3$ или *трилинейнымъ полюсомъ* (pôle trilinéaire) этой прямой.

Точки M_a, M_b, M_c наз. *гармонически связанными съ точкой* M; трилинейныя поляры этихъ точекъ, т. е. прямыя $m_1M_2M_3$, $M_1m_2M_3$, $M_1M_2m_3$, наз. *гармонически связанными съ прямой* $m_1m_2m_3$.

Изъ четырехъ точекъ M, M_a, M_b, M_c каждыя три гармонически связаны съ четвертой.

15. Слѣдствіе. Точки, гармонически связанныя съ центромъ тяжести G треугольника, суть вершины его антидополнительнаго треугольника; трилинейная поляра точки G безконечно удалена.

16. Ортоцентрическая ось. Если H_1, H_2, H_3 суть основанія высотъ треугольника ABC, то треугольникъ $H_1H_2H_3$ наз. *ортоцентрическимъ* (orthique) для треугольника ABC. Трилинейная поляра $h_1h_2h_3$ ортоцентра H, т. е. *ось перспективы* треугольниковъ ABC и $H_1H_2H_3$ наз. *ортоцентрической осью* треугольника ABC.

Ортоцентрическая ось треугольника перпендикулярна къ прямой Эйлера того же треугольника.

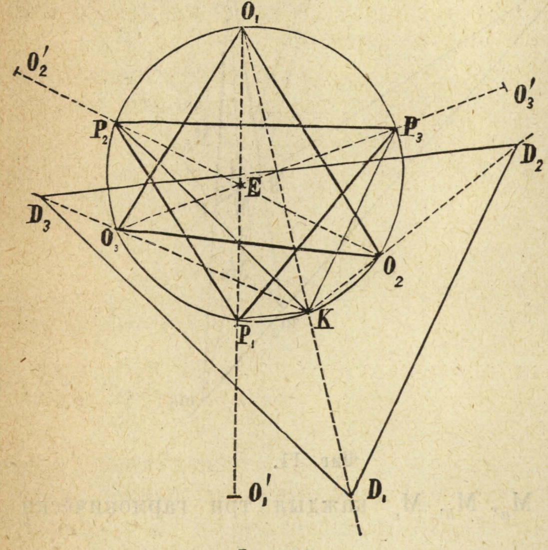
17. Центры I_a, I_b, I_c круговъ, внѣ-вписанныхъ въ треугольникъ ABC, суть точки, гармонически связанныя съ центромъ I круга, вписаннаго въ тотъ же треугольникъ. Трилинейная поляра центра I есть прямая, проходящая черезъ основанія i_1, i_2, i_3 внѣшнихъ биссекторовъ треугольника.

18. Треугольникъ и окружность подобія фигуръ. Пусть F_1, F_2, F_3 суть многоугольники (или вообще фигуры) подобные и одинаково расположенные; O_1, O_2, O_3 — двойныя точки или центры подобія многоугольниковъ F_2 и F_3, F_3 и F_1, F_1 и F_2.

Треугольникъ, вершины котораго суть центры подобія (O_1, O_2, O_3) трехъ подобныхъ и одинаково расположенныхъ многоугольниковъ

(F_1, F_2, F_3), наз. *треугольникомъ подобія* этихъ многоугольниковъ; окружность, описанная около треугольника подобія $(O_1O_2O_3)$, наз. *окружностью подобія* (*G. Tarry*).

19. Теорема. *Соотвѣтственныя прямыя* (d_1, d_2, d_3) *трехъ подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ* (F_1, F_2, F_3) *образуютъ треугольникъ* (D_1, D_2, D_3) *перспективный съ треугольникомъ подобія* $(O_1O_2O_3)$ *этихъ фигуръ; центръ перспективы этихъ треугольниковъ находится на окружности подобія.*



Фиг. 12.

Обозначимъ черезъ a_1, a_2, a_3 величины соотвѣтственныхъ отрѣзковъ d_1, d_2, d_3; черезъ α_1, α_2, α_3—углы, составленные прямыми d_2 и d_3, d_3 и d_1, d_1 и d_2. Обозначая символомъ (O, MN) разстояніе точки O отъ прямой MN, получимъ (фиг. 12):

$$\frac{(O_1 . d_2)}{(O_1, d_3)} = \frac{a_2}{a_3}, \quad \frac{(O_2, d_3)}{(O_2, d_1)} = \frac{a_3}{a_1},$$

$$\frac{(O_3, d_1)}{(O_3, d_2)} = \frac{a_1}{a_2};$$

слѣдов. прямыя O_1D_1, O_2D_2, O_3D_3 пересѣкаются въ одной точкѣ K, разстоянія которой отъ соотвѣтственныхъ прямыхъ d_1, d_2, d_3 пропорціональны ихъ отрѣзкамъ a_1, a_2, a_3. Такъ какъ углы треугольника $D_1D_2D_3$ суть дополнительные до 180^0 угловъ α_1, α_2. α_3, то углы D_1KD_2, D_2KD_3, D_3KD_1, а слѣдов. и углы O_1KO_2, O_2KO_3, O_3KO_1 имѣютъ опредѣленныя величины; значитъ точка K лежитъ на окружности подобія $O_1O_2O_3$.

Точка K наз. *центромъ перспективы* треугольника $D_1D_2D_3$.

20. Теорема. *На окружности подобія* $(O_1O_2O_3)$ *существуютъ три постоянныя точки* P_1, P_2, P_3, *черезъ которыя проходятъ соотвѣтственныя прямыя подобныхъ и одинаково расположенныхъ многоугольниковъ* F_1, F_2, F_3. (Фиг. 12).

Ибо, если черезъ центръ перспективы K треугольниковъ $D_1D_2D_3$ и $O_1O_2O_3$ провести прямыя, пересѣкающія окружность подобія въ P_1, P_2, P_3, то

$$\frac{(O_1, KP_2)}{(O_1, KP_3)} = \frac{(O_1, d_2)}{(O_1, d_3)} = \frac{a_2}{a_3}, \text{ и т. д.;}$$

слѣд. прямыя KP_1, KP_2, KP_3 суть соотвѣтственныя. Для различныхъ треугольниковъ $D_1D_2D_3$ точка K имѣетъ различныя положенія на окружности подобія; но точки P_1, P_2, P_3 остаются однѣ и тѣ же; ибо, напр., $\angle O_1KP_1$ = постоянному углу, составленному прямыми KD_1 и D_2D_3, а потому дуга O_1P_1 имѣетъ постоянную величину.

21. Неизмѣнныя точки трехъ подобныхъ фигуръ. Точки P_1, P_2, P_3 наз. *неизмѣнными точками* подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ F_1, F_2, F_3; а треугольникъ $P_1P_2P_3$ наз. *неизмѣннымъ треугольникомъ* тѣхъ же фигуръ (triangle invariable).

Неизмѣнный треугольникъ и треугольникъ, составленный тремя соотвѣтственными прямыми (d_1, d_2, d_2), подобны, но не одинаково расположены.

Неизмѣнныя точки суть точки соотвѣтственныя.

Прямыя, соединяющія неизмѣнныя точки съ какой нибудь точкой окружности подобія, суть соотвѣтственныя прямыя.

Неизмѣнный треугольникъ и треугольникъ, имѣющій вершинами соотвѣтственныя точки, перспективны; центръ перспективы ихъ лежитъ на окружности подобія.

22. Теорема. *Неизмѣнный треугольникъ и треугольникъ подобія перспективны.*

Ибо

$$\frac{a_2}{a_3}=\frac{O_1P_2}{O_1P_3}=\frac{(O_1, P_1P_2)}{(O_1, P_1P_3)},\ \frac{a_3}{a_1}=\frac{(O_2, P_2P_3)}{(O_2, P_2P_1)},\ \frac{a_1}{a_2}=\frac{(O_3, P_3P_1)}{(O_3, P_3P_2)}.$$

Центръ перспективы E неизмѣннаго треугольника ($P_1P_2P_3$) и треугольника подобія ($O_1O_2O_3$) наз. *направляющей точкой* трехъ подобныхъ фигуръ F_1, F_2, F_3.

Разстоянія направляющей точки отъ сторонъ неизмѣннаго треугольника обратно пропорціональны соотвѣтственнымъ отрѣзкамъ a_1, a_2, a_3.

23. Если точка O'_1 фигуры F_1 есть соотвѣтственная съ точкой O_1 фигуръ F_2 и F_3 и подобныя же значенія имѣютъ точки O'_2 и O'_3 относительно точекъ O_2 и O_3, то O'_1, O'_2, O'_3 наз. *добавочными точками* подобныхъ фигуръ F_1, F_2, F_3 (points adjoints).

Теорема. *Треугольники* $O'_1O'_2O'_3$, $P_1P_2P_3$ *и* $O_1O_2O_3$ *перспективны и имѣютъ общій центръ перспективы.*

24. Теорема Нейберга (*Neuberg*). *Если три соотвѣтственныя точки* C_1, C_2, C_3 *подобныхъ фигуръ* F_1, F_2, F_3 *лежатъ на одной прямой, то эта прямая проходитъ черезъ центръ перспективы* E *неизмѣннаго треугольника и треугольника подобія.*

Точки C_1, C_2, C_3 находятся соотвѣтственно на окружностяхъ O_2EO_3, O_3EO_1, O_1EO_2, которыя проходятъ также черезъ точки O'_1, O'_2, O'_3.

Прямыя C_1P_1, C_2P_2, C_3P_3 пересѣкаются въ одной точкѣ на окружности подобія.

25. Приложенія. Если сходственныя стороны подобныхъ и одинаково расположенныхъ многоугольниковъ суть высоты AH_1, AH_2, AH_3 треугольника ABC, то двойныя точки этихъ многоугольниковъ суть основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ ортоцентра этого треугольника на его медіаны.

26. Если подобные и одинаково расположенные треугольники ABC, AB'C', AB''C''... имѣютъ общую соотвѣтственную вершину A, а соотвѣтственныя вершины ихъ B, B', B'',... находятся на прямой, или на окруж-

ности, то и вершины C, C′, C″... находятся на прямой, или на окружности.

27. Теорема Бобилье (*Bobillier*). Если треугольникъ такъ перемѣщается въ своей плоскости, что двѣ стороны его касаются двухъ окружностей, то и третья сторона его касается нѣкоторой окружности.

28. Теоремы Тарри (*Tarry*). Прямыя d_1, d_2, d_3, симметричныя съ прямой d относительно сторонъ треугольника ABC, образуютъ треугольникъ $D_1D_2D_3$ подобный, но не одинаково расположенный съ треугольникомъ ABC. Треугольники ABC и $D_1D_2D_3$ перспективны; центръ перспективы ихъ совпадаетъ съ центромъ круга, вписаннаго въ треугольникъ $D_1D_2D_3$; геометрическое мѣсто центра перспективы есть окружность ABC. Если прямыя d, d', d'' проходятъ черезъ ортоцентръ H треугольника ABC, то прямыя d_1, d'_1, d''_1,... симметричныя съ d, d', d'' относительно одной стороны треугольника ABC, пересѣкаются въ одной постоянной точкѣ A′ на окружности ABC. Такія постоянныя точки A′, B′, C′ для всѣхъ сторонъ треугольника ABC, образуютъ треугольникъ A′B′C′ подобный, но не одинаково расположенный съ треугольникомъ $D_1D_2D_3$. Точки A′, B′, C′ симметричны съ ортоцентромъ треугольника ABC относительно его сторонъ. Прямыя, соединяющія точки A′, B′, C′, съ какой нибудь точкой окружности ABC, симметричны съ одной и той же прямой относительно сторонъ этого треугольника. Треугольники ABC и A′B′C′ перспективны; центръ перспективы ихъ совпадаетъ съ центромъ круга, вписаннаго въ треугольникъ A′B′C′, и съ ортоцентромъ треугольника ABC.

Д. Е.

(Продолженіе слѣдуетъ).

ИЗЪ ЗАПИСНОЙ КНИЖКИ

преподавателя математики.

(Продолженіе).*

VI.

Писаревъ — о математикѣ**).

„У насъ математика есть не что, какъ собраніе сочиненій Боско или Пинетти; это рядъ удивительныхъ фокусовъ, придуманныхъ Богъ знаетъ зачѣмъ, и Богъ знаетъ какой эквилибристикой человѣческаго мышленія. У каждаго фокуса есть свой особенный ключъ, и эту сотню ключей надо осилить памятью, той же самою памятью, которой осили-

*) См. „В. О. Ф.“ № 228.

**) Наша университетская наука.

ваются историческія и географическія имена. Доказывая геометрическую теорему, гимназистъ только притворяется, будто онъ выводитъ доказательства одно изъ другого; онъ просто отвѣчаетъ заученный урокъ; вся работа лежитъ на памяти, и тамъ, гдѣ измѣняетъ память, тамъ оказывается безсильной математическая сообразительность, которую вы, благодушный педагогъ, уже готовы были предположить въ вашемъ рѣчистомъ ученикѣ. Конечно, если вы перемѣните буквы чертежа, если вмѣсто треугольника ABC дадите треугольникъ LOR, то ученикъ докажетъ по этому треугольнику, но вы этимъ не обольщайтесь; это покажетъ вамъ только, что отрокъ заучилъ не буквы, а фигуру чертежа, потому что буквы заучиваютъ только тѣ нищіе духомъ, которые учатъ слово въ слово исторію, географію и другіе литературные предметы. Такія личности уже переводятся въ гимназіяхъ. А вы попробуйте измѣнить фигуру; предложите, напримѣръ, вмѣсто остроугольника—тупоугольникъ, или устройте такъ, чтобы заинтересованный въ доказательствѣ уголъ глядѣлъ не въ стѣну, какъ ему велѣно глядѣть по учебнику геометріи, а хоть бы въ полъ или потолокъ. Сдѣлайте такъ, и я вамъ ручаюсь, что изъ десяти бойкихъ геометровъ 5-го класса девять погрузятся въ безплодную и мрачную задумчивость. Они съ краской стыда на лицѣ сознаются вамъ, что „у нихъ этого нѣтъ", и если вы немножко психологъ, то вамъ отъ души сдѣлается жалко бѣдныхъ юношей; вы поймете, что въ эту минуту ихъ законное самолюбіе страдаетъ гораздо сильнѣе, чѣмъ если бы ихъ поймали на крупной шалости или уличили въ небрежности къ заданному уроку; имъ приходится признаться въ умственномъ безсиліи, — въ безсиліи, произведенномъ искусственными средствами, и они сами смутно чувствуютъ, что они могли бы быть сильнѣе и что ихъ мѣстная тупость находится въ какой то роковой связи съ своеобразными достоинствами системы преподаванія.

. . . .

Математика—наука великая, замѣчательнѣйшій продуктъ одной изъ благороднѣйшихъ способностей человѣческаго разума. Профанированіе математики есть преступленіе передъ разумомъ,—преступленіе, за которое несемъ наказаніе мы, невинныя жертвы своеобразныхъ достоинствъ. Если у насъ въ обществѣ нѣтъ строгихъ мыслителей, если наши критическія статьи бываютъ похожи на соображенія Кифы Мокіевича, если наши оптимисты смахиваютъ на Манилова, а добродѣтельные либералы на Ситникова, то всѣ эти привычныя намъ чудеса происходятъ между прочимъ и отъ того, что чистую и прикладную математику мы одолѣваемъ памятью, а размышлять учимся впослѣдствіи"...

Интересный вопросъ: какъ далеко ушли мы отъ всего этого?

VII.

Какъ Архимедъ суммировалъ прогрессію.

Требуется найти сумму:

$$A+B+C+D+\cdots$$

членовъ безконечной убывающей геометрической прогрессіи, знаменатель которой равенъ $^1/_4$.

Выводъ ясенъ изъ слѣдующей выкладки:

$$(B+C+D+\cdots)+\left(\frac{B}{3}+\frac{C}{3}+\frac{D}{3}+\cdots\right)=$$

$$=\left(B+\frac{B}{3}\right)+\left(C+\frac{C}{3}\right)+\left(D+\frac{D}{3}\right)={}^4/_3B+{}^4/_3C+{}^4/_3+D+\cdots=$$

$$={}^1/_3(A+B+C+D+\cdots)$$

Отсюда:

$$B+C+D+\cdots={}^1/_3A$$

и

$$A+B+C+D+\cdots={}^4/_3A.$$

По поводу этого вывода *Marie**) говоритъ объ Архимедѣ:

„Il trouve toujours des inventions merveilleuses pour tourner toutes les difficultés qui se présentent“.

VIII.

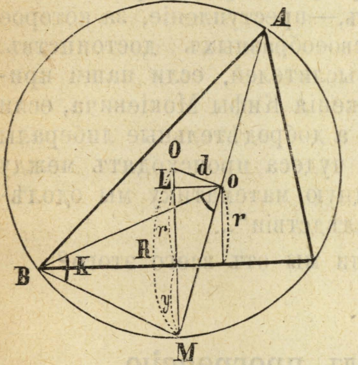
Разстояніе между центрами окружностей — описанной около треугольника, и вписанной въ него.

Пусть d — искомое разстояніе, R—радіусъ описанной окружности, r—радіусъ вписанной окружности.

Теорема: $d^2=R^2-2Rr.$

Изъ чертежа, построеніе котораго очевидно:

$$d^2=R^2+\overline{oM}^2-2R(r+y).$$



Фиг. 13.

Или:

$$d^2=R^2-2Rr+\overline{oM}^2-2Ry.$$

Слѣдовательно, *остается доказать*, что:

$$\overline{oM}^2=2Ry.$$

Но очевидно, что:

$$\overline{BM}^2=2Ry.$$

Слѣдовательно, *остается доказать*, что:

$$BM=oM.$$

А это очевидно, потому что:

*) Marie. Histoire des sciences mathématiques et physiques, стр. 110.

$$o = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \text{ (изъ треугольника } oAB)$$

$$K = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \text{ (усматривается непосредственно).}$$

Интересно, что можно пойти и „на проломъ“, вычисляя d изъ треугольника OoL, и выкладка не будетъ особенно сложною, если сумѣть ею распорядиться.

IX.

Киселевъ. Элементарная геометрія. 4-ое изданіе. 1896 г.

Привѣтствуемъ появленіе 4-го изданія этой безусловно хорошей книги, заслуживающей всячески успѣха. Въ свое время мы дали подробный отчетъ о первомъ ея изданіи*), — поэтому теперь ограничиваемся перечнемъ тѣхъ немногихъ измѣненій, которымъ подвергся учебникъ со времени его появленія:

1) прибавлено замѣчаніе объ однородности уравненій, получаемыхъ при рѣшеніи геометрическихъ задачъ.

Это очень хорошо.

2) Расширено понятіе о суммѣ угловъ на тотъ случай, когда эта сумма превосходитъ 4 d.

Расширеніе—полезное.

3) Введены нѣкоторые (не существенные) коррективы въ опредѣленія геометрическаго тѣла, поверхности и пр.

4) Увеличено число задачъ.

Статья о предѣлахъ осталась безъ измѣненія, о чемъ слѣдуетъ пожалѣть, такъ какъ она страдаетъ пробѣлами. Авторъ, напримѣръ, „принимаетъ безъ доказательства, что если въ произведеніи одинъ сомножитель постоянный, а другой стремится къ 0, то и произведеніе стремится къ 0“. Между тѣмъ истина эта непремѣнно потребуетъ разъясненій и, конечно, лучше было бы, вмѣсто приведеннаго заявленія помѣстить доказательство. На стр. 285 авторъ пользуется теоремой: „Предѣлъ произведенія двухъ перемѣнныхъ величинъ равенъ произведенію ихъ предѣловъ“, а теорема эта не доказана.

Замѣтимъ еще, что, по общему характеру учебника, теорему § 309 (Если двѣ не сливающіяся плоскости имѣютъ общую точку, то онѣ имѣютъ и общую прямую, проходящую черезъ эту точку) было бы правильнѣе принять за аксіому.

X.

Задача.

*Въ плоскости треугольника найти точку, сумма квадратовъ разстояній которой отъ сторонъ треугольника была бы minimum***).

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 149.

**) *Casey*. Géométrie élémentaire récente.

Обозначимъ соотвѣтственно черезъ x, y и z разстоянія произвольной точки (въ плоскости треугольника) отъ сторонъ его a, b и c; имѣемъ тожество:

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2.$$

Такъ какъ:

$$ax+by+cz=2S,$$

гдѣ S есть площадь даннаго треугольника, то $x^2+y^2+z^2$ будетъ *minimum*, при условіи:

$$ay-bx=0$$

$$bz-cy=0$$

$$cx-az=0,$$

т. е., когда:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

Точка, опредѣляемая этими условіями, есть точка *Lemoine'a*, и построеніе ея извѣстно,—она находится въ пересѣченіи симедіанъ треугольника.

М. Попруженко (Оренбургъ).

XI.

О курсѣ ариѳметики.

Въ предисловіи къ курсу ариѳметики академика В. Я. Буняковскаго, Спб., 1894 г. читаемъ: „Въ новое изданіе не вошли пропорціи, потому что онѣ, по утвержденнымъ программамъ, отнесены теперь къ курсу алгебры. Исключеніе этихъ статей изъ ариѳметики вполнѣ оправдывается ея сущностью: дѣйствительно, рѣшеніе вопросовъ, приводящихъ къ различнымъ видамъ тройныхъ правилъ, требуетъ составленія равенствъ; по этой причинѣ общіе пріемы, служащіе для опредѣленія неизвѣстныхъ, должны быть отнесены къ алгебрѣ, а не къ ариѳметикѣ, имѣющей предметомъ исполненіе дѣйствій, уже указанныхъ". Между тѣмъ есть уголки Россіи, гдѣ подробнѣйшимъ образомъ изучаются, не говорю геометрическія, а ариѳметическія пропорціи и даются въ качествѣ темъ при испытаніи на званіе домашней учительницы, а при рѣшеніи задачъ съ помощью пропорцій примѣняется такой способъ: пишется рядъ пропорцій вродѣ слѣдующихъ:

$$x:y=5:7$$

$$y:z=4:3$$

$$x:8=3{,}5:5$$

и потомъ, безъ предварительнаго ихъ перемноженія (права на которое не даютъ наши учебники ариѳметики), производится сокращенiе y'a и z'a, такъ что получается

$$x:8 = 5 . 4 . 3{,}5 : 7 . 3 . 5.$$

XII.

Прошло чуть ли не 200 лѣтъ съ тѣхъ поръ, какъ десятичныя дроби стали писать безъ знаменателей, а между тѣмъ и до сихъ поръ въ нѣкоторыхъ учебникахъ умноженiе десятичныхъ дробей объясняется двумя способами (излишняя роскошь), причемъ по второму способу десятичныя дроби замѣняются простыми:

$$0{,}5 . 0{,}31 = \frac{5}{10} \cdot \frac{31}{100} = \frac{155}{1000} = 0{,}155.$$

При умноженiи десятичной дроби на цѣлое число рекомендуется у дроби предварительно отбросить запятую, не смотря на то, что умноженiе 3,27 на 5 отличается отъ умноженiя 327 на 5 только тѣмъ, что въ первомъ случаѣ на 5 умножается 327 сотыхъ, а во второмъ 327 единицъ, а потому въ первомъ случаѣ должно получиться 1635 сотыхъ или 16,35, а во второмъ 1635 единицъ.

А. Воиновъ (Харьковъ).

(*Продолженiе слѣдуетъ*).

КЪ ВОПРОСУ
о полученiи свѣтильнаго газа домашними средствами.

Прочитавъ въ № 231 „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики" о полученiи свѣтильнаго газа домашними средствами, я имѣю сообщить, что въ Костромскомъ реальномъ училищѣ я уже давно пользуюсь лампой Дешевова, прiобрѣтенной отъ фирмы О. Рихтеръ въ Петербургѣ. Она состоитъ изъ двойныхъ мѣховъ (съ ножнымъ приводомъ), двухъ вульфовыхъ склянокъ, соединенныхъ съ мѣхами, и бунзеновской горѣлки. Склянка, ближайшая къ мѣхамъ, наполняется бензиномъ. Лампа выписана собственно для опытовъ со спектрами металлическихъ солей, но я съ успѣхомъ пользуюсь ею и въ качествѣ Друммондовой горѣлки, какъ сильнымъ источникомъ свѣта, для многихъ оптическихъ опытовъ; при этомъ я замѣняю мѣха большимъ резиновымъ мѣшкомъ (какой обыкновенно употребляется для водорода), помѣщая его между двумя деревянными створками, съ грузомъ на верхней. Надѣюсь, что мое сообщенiе не будетъ безполезно, въ виду того, что большинство преподавателей физики находится въ затрудненiи при выполненiи тѣхъ оптическихъ опытовъ, которые требуютъ сильныхъ источниковъ свѣта.

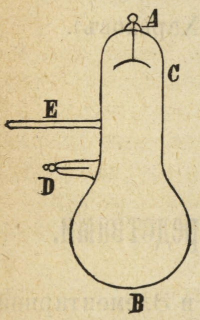
Е. Жадовскiй (Кострома).

КЪ ОТКРЫТІЮ РЁНТГЕНА.

Опыты Рёнтгена въ физическомъ кабинетѣ гимназіи.

Замѣтивъ, что трубка, съ которою я производилъ первые опыты*), недостаточно эвакуирована и что этотъ ея недостатокъ вызываетъ необходимость слишкомъ продолжительныхъ экспозицій, я выписалъ двѣ новыя трубки у фирмы „Siemens & Halske“ въ Берлинѣ, причемъ просилъ, чтобы разрѣженіе воздуха въ трубкахъ доведено было до тѣхъ предѣловъ, при которыхъ совершенно исчезаетъ потокъ слабо-фіолетовыхъ лучей и трубка даетъ только зеленую флуоресценцію. Недѣлю тому назадъ я получилъ заказанныя трубки и съ одной изъ нихъ произвелъ немедленно рядъ опытовъ. Время экспозиціи при фотографированіи мертвыхъ предметовъ составляло 8—15 минутъ (раньше 1—$1^1/_2$ часа), при фотографированіи же руки 30—40 минутъ (раньше 2-хъ часовая экспозиція дала только тѣнь самой руки такъ что не было видно костей). Негативы получились вполнѣ отчетливые.

Размѣры трубки слѣдующіе: AB = 20 центиметровъ, CD = 12 цм., ширина трубки въ верхней части 6 цм., въ нижней 8 цм. (maximum). Діаметръ алюминіеваго катода 3 цм.— Во время опыта, верхніе концы гильзъ машины Теплеръ-Гольца, были удалены**) отъ шариковъ кондукторовъ на 3 цм., разстояніе же между шариками кондукторовъ составляло 15 центиметровъ. При небольшомъ увеличеніи перваго изъ упомянутыхъ разстояній (въ 5 цм.) искра проскакивала между шариками кондукторовъ, изъ чего и можно было судить о сопротивленіи трубки.



Фиг. 14.

Во время послѣдней (одиннадцатой) экспзиціи, когда я производилъ фотографированіе локтя руки взрослаго человѣка, проскочила искра между D (анодомъ) и E, укрѣпленномъ въ штативѣ, а спустя нѣсколько секундъ, стала замѣтно ослабѣвать флуоресценція стекла, затѣмъ тотчасъ же появилась струя слабо-фіолетоваго цвѣта, доходящая до дна трубки, которая опять черезъ 3—4 секунды сдѣлалась ярче, приняла красновато-синій оттѣнокъ и, измѣнивъ направленіе, потекла отъ катода къ аноду.

Не подлежало сомнѣнію, что въ трубку медленно проникалъ воздухъ. Пріостановивъ вращеніе круга машины и отдѣливъ трубку отъ кондукторовъ, я тщательно ее разсмотрѣлъ, и къ большому своему удивленію, даже при помощи лупы не могъ найти какихъ бы то ни было поврежденій. Трубка оказалась цѣлою, латунные же капсюли A и D съ кольцами для укрѣпленія проводящихъ проволокъ крѣпко держались

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 231.

**) Оказалось болѣе удобнымъ оставлять 2 перерыва въ цѣпи при большомъ сопротивленіи трубки.

стѣнокъ трубки.—Для разъясненія вопроса и починки трубки я отослалъ ее въ Варшаву въ мастерскую г. Трусевича*).

Для иллюстраціи сказаннаго мною выше объ отчетливости полученныхъ негативовъ, прилагаю при семъ двѣ фотографіи (позитивы). Первая представляетъ лупу въ металлической оправѣ съ деревяной ручкой и два оптическія стекла: выпуклое и вогнутое. Фотографія лупы прекрасно указываетъ различную способность поглощать рёнтгеновскіе лучи, какою обладаютъ металлы, стекло и дерево. Свѣтлое кольцо, отдѣляющее металлическую оправу отъ средней части стекла, указываетъ на то, что стекло выпуклое. Вторая фотографія представляетъ руку взрослаго человѣка (вслѣдствіе недостаточной величины клише не помѣстились на ней всѣ пальцы) съ подложенною подъ нею иголкой. Различная способность поглощенія лучей, со стороны тѣла и костей бросается въ глаза, а любопытно при томъ то, что при непродолжительной сравнительно экспозиціи (35 минутъ) хорошо вышли и тѣ части иголки, которыя оказались подъ косточками 2-го и 3-го пальца.

Въ № 1 „Вѣстника“ (XX сем.) г. *В. К.*, сообщая о лекціи проф. Боргмана объ опытахъ Рёнтгена въ педагогическомъ музеѣ военно-учебныхъ заведеній, говоритъ, что для повторенія этихъ опытовъ надо имѣть круксову трубку, спираль и какой нибудь источникъ электричества, а тогда опыты не могутъ не удасться... если экспериментаторъ будетъ имѣть *немного* терпѣнія приспособиться къ тѣмъ приборамъ, которыми онъ располагаетъ. На основаніи собственнаго опыта я съ этимъ вполнѣ согласиться не могу, хотя бы по той причинѣ, что имѣлъ возможность убѣдиться, что хорошо эвакуированныя трубки при слабыхъ разрядахъ почти совсѣмъ не флуоризируютъ, а если и пропускаютъ разрядъ при соотвѣтственно уменьшенной степени разряженія воздуха, то 2-хъ часовая даже экспозиція**) не дастъ надлежащей фотографіи руки хотя бы и 8-милѣтняго мальчика.

Плохія трубки при сильныхъ даже разрядахъ (катушки или электрофорной машины) или же хорошія трубки при недостаточныхъ разрядахъ, удаляютъ время экспозиціи за предѣлы всякаго терпѣнія***), если экспериментаторъ не захочетъ ограничиться фотографированіемъ мертвыхъ предметовъ.

К. Служевскій (Лодзь).

---

*) А. А. Трусевичъ, лаборантъ при каѳедрѣ физики Императорскаго Варшавскаго университета, открылъ въ февралѣ прошлаго года мастерскую физическихъ приборовъ.

**) Требующая *не малаго* терпѣнія.

***) Машина Гольца приспособленная для медицинскихъ цѣлей и дающая искру въ 5 цм., при содѣйствіи двухъ обыкновенныхъ небольшихъ конденсаторовъ Франклина, при употребленіи небольшой, но хорошей круксовой трубки, дала на очень чувствительной пластинкѣ только едва замѣтную тѣнь руки (безъ слѣда костей), послѣ 2-хъ часовой экспозиціи.

Краткій отчетъ

о дѣятельности 2-й секціи (секціи реальныхъ училищъ) 2-го Съѣзда Русскихъ Дѣятелей по Техническому и Профессіональному Образованію въ Москвѣ *).

Милостивые Государи!

Большинство изъ присутствующихъ знакомо, вѣроятно, съ постановленіями 2-го Съѣзда Русскихъ Дѣятелей по Техническому и Профессіональному Образованію въ Москвѣ по газетамъ; но свѣдѣнія эти появлялись въ разное время и по разнымъ секціямъ; поэтому я считаю не лишнимъ предложить вашему вниманію краткій отчетъ о дѣятельности II секціи Съѣзда (секціи реальныхъ училищъ), тѣмъ болѣе, что намъ, одесситамъ, придется, вѣроятно, на будущемъ съѣздѣ играть роль активныхъ хозяевъ, такъ какъ 3-й съѣздъ предположено созвать именно въ Одессѣ.

Иниціатива устройства Съѣзда принадлежитъ Совѣту Императорскаго Русскаго Техническаго Общества, который возбудилъ надлежащее ходатайство, и въ 8-ой день декабря 1893 года воспослѣдовало Высочайшее соизволеніе на созваніе въ 1895 году въ Москвѣ 2-го Съѣзда. Въ мартѣ 1894 г. былъ организованъ Комитетъ Съѣзда подъ предсѣдательствомъ бывшаго попечителя Московскаго Учебнаго Округа, графа Капниста. Для раздѣленія подготовительныхъ работъ по спеціальностямъ Комитетъ образовалъ 17 секцій и выработалъ болѣе 1500 вопросовъ и темъ для выясненія современнаго состоянія и потребностей техническаго и промышленнаго образованія. Вопросы и темы были разосланы въ учебныя заведенія и различныя учрежденія въ числѣ болѣе 35000 вопросныхъ листовъ, и собранный матеріалъ представленъ на обсужденіе Съѣзда. Вопросы, выработанные секціей реальныхъ училищъ, помѣщены въ „Трудахъ Комитета Съѣзда“ по секціи реальныхъ училищъ.

Торжественное открытіе Съѣзда послѣдовало 28 декабря 1895 г. въ залѣ Россійскаго Благороднаго Собранія подъ предсѣдательствомъ Его Императорскаго Высочества Великаго Князя Константина Константиновича, Почетнаго Предсѣдателя Съѣзда. Предсѣдателемъ II секціи былъ избранъ, нынѣ покойный, Як. Игн. Вейнбергъ, товарищами его—директоръ Ярославскаго реальнаго училища С. М. Зегеръ и директоръ Комиссаровскаго техническаго училища А. Ѳ. Леоновичъ.

Въ первомъ засѣданіи секціи, 28 декабря, были заслушаны рефераты: *Н. Н. Захарьина*, *Г. Ѳ. Маркова* и *К. Г. Щетинина-Какуева*: „О коммерческихъ отдѣленіяхъ въ реальныхъ училищахъ“. По этимъ рефератамъ собраніемъ была принята слѣдующая резолюція: Принимая во вниманіе, что коммерческія отдѣленія при реальныхъ училищахъ въ современной своей организаціи не достигаютъ своей цѣли и нарушаютъ собой обще-образовательный характеръ реальныхъ училищъ, секція полагаетъ сохраненіе этихъ отдѣленій при реальныхъ училищахъ нежелательнымъ.

Въ засѣданіи 29 декабря были прочитаны рефераты:

I. *К. П. Яновскаго*: 1) Насколько реальныя училища нынѣшняго характера удовлетворяютъ потребностямъ общаго образованія;

2) Не было ли бы полезнѣе дополнительный классъ связать органически съ шестью классами и выдавать аттестатъ только по окончаніи курса VII класса.

***) Докладъ, читанный въ Математическомъ Отдѣленіи Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей по вопросамъ Элементарной Математики и Физики.**

II. *Г. Ѳ. Маркова*: по тѣмъ же двумъ вопросамъ и 3) Какія вообще измѣненія въ обоихъ отдѣленіяхъ реальныхъ училищъ признаются желательными относительно *a*) программъ, *b*) распредѣленія учебнаго матеріала по классамъ и пр.

III. *Э. О. Миттельштейнера*: О восьмилѣтнемъ курсѣ реальныхъ училищъ.

IV. Сводъ мнѣній Педагогическихъ Совѣтовъ по предыдущимъ вопросамъ.

Собраніемъ были приняты слѣдующія резолюціи:

1) Разрѣшеніе вопроса объ утреннихъ и послѣполуденныхъ урокахъ желательно предоставить Педагогическому Совѣту каждаго реальнаго училища въ зависимости отъ мѣстныхъ условій *).

2) Улучшенія въ гигіеническомъ отношеніи школьной обстановки необходимы.

3) Желательно, чтобы реальныя училища имѣли возможность обращать болѣе вниманія, чѣмъ въ настоящее время, на индивидуальныя особенности учениковъ.

4) Наказанія, назначаемыя ученикамъ, должны *а*) соотвѣтствовать не только проступкамъ, но и причинамъ; *б*) отличаться справедливостью и скорѣе снисходительностью, чѣмъ строгостью; *в*) вытекать изъ желанія ученику добра и стремленія къ искорененію его дурныхъ наклонностей; *г*) наказанія должны соотвѣтствовать индивидуальнымъ тѣлеснымъ и душевнымъ качествамъ ученика; *д*) наказанія не должны служить причиною вреда учащимся не только нравственнаго, но и тѣлеснаго.

5) Желательно, чтобы учителя реальныхъ училищъ получали особую педагогическую подготовку для своей дѣятельности.

6) Такъ какъ правильная постановка педагогическаго дѣла находится въ тѣсной связи съ матеріальнымъ положеніемъ учителя, то необходимо улучшить это матеріальное положеніе его въ смыслѣ предложенія, сдѣланнаго въ рефератѣ К. П. Яновскаго **).

7) Въ связи съ предыдущимъ вопросомъ постановлено: ходатайствовать передъ Правительствомъ объ учрежденіи эмеритальной кассы для лицъ педагогическаго званія при Министерствѣ Народнаго Просвѣщенія.

8) Въ виду улучшенія постановки учебнаго дѣла въ реальныхъ училищахъ органически связать VII дополнительный классъ съ шестью остальными крайне необходимо.

9) Мысль о прибавленіи къ курсу реальныхъ училищъ еще восьмого класса заслуживаетъ полнаго вниманія, но требуетъ еще дальнѣйшей разработки.

Въ засѣданіи 30 декабря были прочитаны рефераты:

1) *К. П. Яновскаго*: По вопросу объ экзаменахъ.

2) *Г. Ѳ. Маркова*, о томъ же.

3) *В. Д. Дейнеке*, о томъ же.

К. П. Яновскій выставляетъ въ своемъ рефератѣ слѣдующія положенія:

Какъ переводныя, такъ и окончательныя испытанія учениковъ реальныхъ училищъ въ нынѣ практикуемой формѣ вредны въ воспитательномъ отношеніи.

Испытанія, служащія для опредѣленія способности ученика слѣдовать за курсомъ, въ высшемъ классѣ не имѣютъ смысла, ибо нельзя допустить, что учитель

---

*) Предлагалось вмѣсто непрерывныхъ 5-и часовыхъ занятій ввести 3 утреннихъ урока и 2 послѣобѣденныхъ.

**) Назначить 1200 р. въ годъ независимо отъ числа уроковъ и увеличивать это жалованіе на 10% черезъ каждые два года.

можетъ въ 5, 10 или 15 минутъ опредѣлить вѣрнѣе степень познаній своихъ учениковъ, чѣмъ въ теченіе цѣлаго года. Полезны лишь такія испытанія, которыя тѣсно связаны въ теченіе года съ занятіями учащихся и служатъ какъ къ улучшенію способовъ преподаванія, такъ и занятій учениковъ.

Окончательныя испытанія не опредѣляютъ достоинства учащихся и разстраиваютъ ихъ здоровье.

Поэтому предлагается руководствоваться слѣдующими правилами при выпускѣ учениковъ:

а) Ученики, получившие не меньше 4 въ среднемъ выводѣ изъ четвертныхъ отмѣтокъ по какому либо предмету въ теченіе послѣдняго года, совершенно освобождаются отъ испытаній по этому предмету, за исключеніемъ тѣхъ случаевъ, когда ученикъ самъ желалъ бы экзаменоваться для полученія отмѣтки 5, или же когда начальство заведенія находило бы необходимымъ испытаніе.

б) Ученики, не имѣющіе права на освобожденіе отъ испытанія по какому либо предмету, подвергаются сперва письменному испытанію на темы, предложенныя классными комиссіями подъ непремѣннымъ предсѣдательствомъ начальника заведенія.

в) Письменныя испытанія могутъ быть назначаемы по разнымъ предметамъ: по Закону Божію, исторіи, географіи, математикѣ и проч.

г) Послѣ письменныхъ назначаются устныя испытанія, при чемъ экзаменующіеся дѣлятся на группы такъ, чтобы каждая группа была проэкзаменована въ теченіе одного дня (даже и по нѣсколькимъ предметамъ).

д) Оцѣнка знаній ученика для внесенія ея въ аттестатъ опредѣляется предметными комиссіями на основаніи достоинства письменныхъ и устныхъ отвѣтовъ ученика.

е) Опредѣленіе же степени достоинства знаній экзаменовавшихся и выдача имъ аттестатовъ лежитъ на обязанности всего Педагогическаго Совѣта, отъ котораго зависитъ удостоеніе аттестатовъ и такихъ учениковъ, которые обнаружатъ отличныя знанія по нѣкоторымъ главнымъ предметамъ и наклонность къ ихъ дальнѣйшему изученію, хотя бы они обнаружили и не вполнѣ хорошія знанія по другимъ предметамъ.

Повѣрочныя испытанія, производимыя въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ молодымъ людямъ, окончившимъ реальныя училища и другія среднія учебныя заведенія, не могутъ быть вѣрными по своей поспѣшности и, кромѣ того, несправедливы, такъ какъ побуждаютъ многихъ изъ окончившихъ курсъ среднихъ заведеній, даже съ посредственными успѣхами, совершать переѣзды въ столицы, что вызываетъ значительныя и очень часто совершенно напрасныя издержки. Всего справедливѣе было бы замѣнить эти испытанія конкурсомъ между аттестатами, которые должны быть присылаемы въ то заведеніе, куда предполагаютъ поступить ученики, окончившіе среднее заведеніе.

Г. Ѳ. Марковъ выставилъ въ своемъ рефератѣ слѣдующіе тезисы:

1) Экзамены имѣютъ троякую цѣль: *а*) контроль познаній учениковъ; *б*) контроль оцѣнки этихъ познаній гг. преподавателями, *в*) контроль объема и качества преподаннаго.

2) Экзамены необходимы: *а*) вообще, для предупрежденія всякихъ недоразумѣній, могущихъ возникнуть между школой и родителями учащихся; *б*) для опредѣленія степени развитія учащихся; *в*) для опредѣленія степени усвоенія учащимся того или другого предмета; *г*) чтобы исключить случайныя ошибки преподавателей при оцѣнкѣ познаній учениковъ; *д*) чтобы дать однообразную оцѣнку (въ смыслѣ

требовательности) познаній по различнымъ предметамъ, что необходимо при сравненіи успѣшности учащихся.

3) Экзамены не должны и, въ большинствѣ случаевъ, не могутъ оказывать вреднаго вліянія на здоровье учащихся.

4) Правильно поставленные экзамены имѣютъ важное педагогическое значеніе: во время экзаменовъ ученики, занимаясь тѣмъ или другимъ предметомъ, сосредоточиваясь на немъ одномъ, получаютъ объективное представленіе о цѣломъ предметѣ, познаютъ его значеніе и вмѣстѣ съ тѣмъ лучше его усваиваютъ.

5) Правильная постановка экзаменовъ обусловливается: *a*) характеромъ ихъ; *b*) формой; *c*) содержаніемъ; *d*) способомъ производства; *e*) временемъ ихъ производства.

6) Къ экзаменамъ должны быть допускаемы всѣ ученики. Экзаменоваться есть право ученика и не слѣдуетъ лишать его этого права, чтобы: *а*) предоставить возможность каждому ученику загладить свои промахи въ году; *б*) исключить возможность оставленія ученика на второй годъ вслѣдствіе неправильной оцѣнки его познаній; *в*) не дать возможности лѣнивому ученику пользоваться большимъ количествомъ свободнаго времени.

7) Отъ экзаменовъ могутъ быть освобождаемы хорошіе ученики. *а*) Для старательнаго ученика освобожденіе отъ экзаменовъ есть награда. *б*) Старательный ученикъ въ году требуетъ большого количества времени для отдыха. *в*) Освобожденіе отъ экзаменовъ лучшихъ учениковъ будетъ служить побудительнымъ средствомъ и другимъ стать въ ряды лучшихъ.

8) Два вида экзаменовъ: письменные и устные.

9) Письменные экзамены не должны быть практикуемы въ младшихъ классахъ, гдѣ слѣдуетъ ограничиваться устными. *а*) Письменные экзамены, какъ испытаніе въ относительной умственной зрѣлости учащихся, очень трудны для младшаго возраста. *б*) Производство письменныхъ экзаменовъ трудно такъ обставить, чтобы работы учениковъ могли быть признаны самостоятельными. *в*) Устные экзамены даютъ больше способовъ провѣрить количество и качество познаній, пріобрѣтенныхъ учениками, и легче для учениковъ.

10) Темы для письменныхъ испытаній должны быть назначаемы начальникомъ учебнаго заведенія.

Послѣ преній подавляющимъ большинствомъ голосовъ была принята слѣдующая резолюція:

„Придя къ убѣжденію, что переводные экзамены не имѣютъ значенія педагогическаго, а равно не удовлетворяютъ требованіямъ контроля, какъ въ отношеніи преподавателей, такъ и въ отношеніи знаній учениковъ, секція постановила ходатайствовать объ отмѣнѣ ихъ и о предоставленіи Педагогическимъ Совѣтамъ права переводить учениковъ изъ класса въ классъ по ихъ годовой успѣшности“.

Въ засѣданіи 31 декабря были прочитаны рефераты:

Н. Д. Кодряна и *И. Л. Бутова*: По поводу нынѣ существующей системы отмѣтокъ въ средне-учебныхъ заведеніяхъ.

По поводу этихъ рефератовъ секція приняла слѣдующую резолюцію:

„Желательно, чтобы Педагогическимъ Совѣтамъ было предоставлено право дѣлать выводы по четвертямъ или полугодіямъ, смотря по мѣстнымъ условіямъ, а также предоставлять бóльшую свободу преподавателямъ ставить урочныя отмѣтки болѣе часто или болѣе рѣдко“.

Затѣмъ были прочитаны рефераты: 1) *К. П. Яновскаго*: По вопросу о съѣздахъ учителей, и 2) сводъ мнѣній педагогическихъ совѣтовъ реальныхъ училищъ по тому же вопросу. Единогласно была принята слѣдующая резолюція:

„Секція, считая необходимымъ и весьма желательнымъ для оживленія педагогическаго дѣла обмѣномъ мыслей преподавателей устраивать съѣзды учителей реальныхъ училищъ какъ окружные, такъ и всероссійскіе, постановила ходатайствовать о скорѣйшемъ установленіи таковыхъ“.

Послѣднимъ былъ прочитанъ рефератъ *Н. Я. Ушакова*: Объ изданіи учебниковъ и педагогическаго журнала. Секція значительнымъ большинствомъ голосовъ отвѣтила отрицательно на вопросъ: желательно ли изданіе Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія учебниковъ, обязательныхъ для всѣхъ учебныхъ заведеній,—и приняла слѣдующую резолюцію:

„Желательно, чтобы при Журналѣ Министерства Народнаго Просвѣщенія былъ прибавленъ отдѣлъ, посвященный разработкѣ педагогическихъ вопросовъ.

Въ вечернемъ засѣданіи были прочитаны доклады: 1) *Э. О. Миттельштейнера*: Въ чемъ состоятъ цѣли преподаванія новыхъ языковъ въ реальныхъ училищахъ, 2) мнѣніе *К. П. Яновскаго* о преподаваніи новыхъ языковъ и 3) сводный рефератъ о преподаваніи новыхъ языковъ, составленный *К. К. Мазингомъ*.

Въ засѣданіи 2-го января прочитанъ докладъ *В. В. Михайловскаго*: О приготовленіи учителей географіи для реальныхъ училищъ и имъ же составленный сводъ мнѣній педагогическихъ совѣтовъ о преподаваніи исторіи, а также рефератъ *И. Я. Акинфіева:* О преподаваніи географіи.

Въ утреннемъ засѣданіи 3 января выслушанъ былъ рефератъ *І. А. Щепанскаго*: О желательныхъ улучшеніяхъ въ программѣ черченія реальныхъ училищъ Министерства Народнаго Просвѣщенія. Въ этомъ рефератѣ проводятся слѣдующія мысли.

Черченіе, развивая 1) активное вниманіе, 2) память образовъ внѣшняго міра и 3) практическую продуктивность воображенія, заслуживаетъ самостоятельнаго мѣста въ ряду учебныхъ предметовъ. Показателемъ достаточной степени развитія отмѣченныхъ трехъ способностей является „графическая грамотность“, т. е. умѣніе переносить на бумагу при помощи точнаго чертежа предметы и группы предметовъ внѣшняго міра, и обратно—умѣніе читать чертежъ. Нынѣ дѣйствующая программа не удовлетворяетъ этимъ положеніямъ, ибо черченіе не является нынѣ самостоятельнымъ предметомъ, и графическая грамотность учащимися не достигается. Въ IV, V и VI классахъ черченіе является нынѣ лишь вспомогательнымъ средствомъ для геометріи, а въ III и VII классахъ — самостоятельнымъ предметомъ. Эта двойственность цѣли парализуетъ успѣхи черченія. Кромѣ того нынѣшняя программа страдаетъ сухостью и монотонностью.

Для улучшенія учебнаго плана какъ по черченію, такъ и по геометріи, черченію должна быть возвращена его самостоятельность, а связь между черченіемъ и геометріей выразится въ томъ, что черченіе должно практически подготовлять учащимся тотъ запасъ геометрическихъ представленій, который находитъ себѣ теоретическое освѣщеніе въ геометріи; эта же послѣдняя, доставляя раціональное обоснованіе черченію, должна возвести его на степень строго научной отрасли знанія, обладающей логически стройными методами. Черченіе не должно ограничиваться изученіемъ правилъ и теорій, а всегда должно сопровождаться приложеніемъ чертежныхъ работъ къ практикѣ. Оно должно отличаться постепенностью, разнообразіемъ, полнотой и интересомъ содержанія. Продолжительность исполнительнаго урока черченія должна быть не менѣе $1^1/_2$ часа. Выполнить весь этотъ планъ можно при незначительномъ измѣненіи нынѣшней программы, требующемъ лишь прибавки по получасу въ недѣлю къ курсамъ IV и V классовъ.

Затѣмъ былъ выслушанъ рефератъ *А. И. Жилинскаго*: Значеніе геометрическаго черченія въ ряду геометрическихъ предметовъ, въ которомъ между прочимъ рекомендуется выдѣленіе изъ геометріи задачъ на построеніе, примѣненіе къ нимъ графическаго искусства и образованіе изъ этихъ двухъ частей самостоятельнаго предмета.

Секціей принята слѣдующая резолюція:

„Курсу черченія въ реальныхъ училищахъ желательно придать вполнѣ самостоятельное значеніе, причемъ при непрерывномъ преподаваніи не должно довольствоваться однимъ изученіемъ правилъ и теорій, а должно обращать вниманіе и на практику чертежныхъ работъ, не нарушая однако гармонической связи черченія съ геометріей".

К. В. Май (Одесса).

(Окончаніе слѣдуетъ).

ЗАДАЧИ.

№ 314. Доказать, что если a есть простое число вида $4m+1$, то a^2 можетъ быть представлено въ видѣ $24n+1$.

Н. Крестовоздвиженскій (Орелъ).

№ 315. Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (изъ „Собранія стереометрическихъ задачъ, требующихъ примѣненія тригонометріи" Рыбкина, стр. 36, № 145):

„Круговой секторъ вращается около діаметра, параллельнаго его хордѣ. Поверхность, образованная вращеніемъ хорды, дѣлитъ объемъ, полученный отъ вращенія сектора, пополамъ. Опредѣлить центральный уголъ сектора".

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 316. Въ треугольникѣ ABC точка O есть центръ вписаннаго круга. Доказать, что центръ круга, описаннаго около треугольника AOC, лежитъ на биссекторѣ угла B.

М. Зиминъ (Орелъ).

№ 317. Внутри треугольника ABC опредѣлить геометрическое мѣсто такихъ точекъ m, чтобы изъ перпендикуляровъ mp, mq, mr опущенныхъ на стороны BC, AB, AC треугольника ABC можно было составить треугольникъ.

А. Варенцовъ (Шуя).

№ 318. Стороны AB, BC, CD, DA вписаннаго въ кругъ четыреугольника составляютъ геометрическую прогрессію, а углы его D, A, C, B составляютъ ариѳметическую прогрессію. Вычислить углы этого четыреугольника и отношеніе противоположныхъ сторонъ.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 319. Показать, что предѣлъ суммы членовъ ряда

$$\frac{3}{(1.2)^2}+\frac{5}{(2.3)^2}+\frac{7}{(3.4)^2}\cdots$$

равенъ единицѣ.

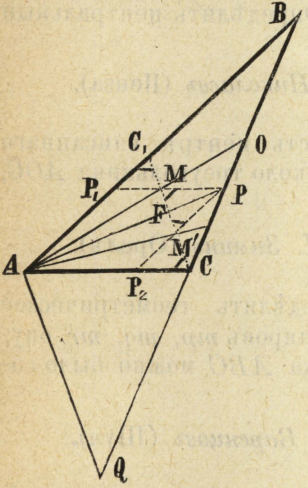
А. Бачинскій (Холмъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 248 (3 сер.). Въ треугольникѣ ABC проведенъ внутренній биссекторъ угла A, пересѣкающій сторону BC въ точкѣ P. Изъ точки P проведена прямая, параллельная сторонѣ AC, а изъ вершины C опущенъ на биссекторъ AP перпендикуляръ, пересѣкающій прямую, параллельную сторонѣ AC, въ точкѣ M. Показать, что AM есть медіана треугольника ABC.

Черезъ точку P проведена прямая, параллельная AB, которая пересѣкается съ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ C на AP, въ точкѣ M'. Показать, что AM' есть симедіана треугольника ABC.

Продолжимъ линію AM до пересѣченія съ BC въ точкѣ O и докажемъ, что $OC=BC:2$. Проведя внѣшній биссекторъ AQ угла A, перпендикулярный къ внутреннему AP, изъ подобныхъ треугольниковъ OMC и OAQ получимъ:



Фиг. 15.

$$\frac{OM}{OA}=\frac{OC}{OQ}; \quad \ldots\ldots (1)$$

подобные треугольники OMP и OAC даютъ:

$$\frac{OM}{OA}=\frac{OP}{OC}. \quad \ldots\ldots (2)$$

Изъ (1) и (2) имѣемъ

$$\overline{OC}^2=OP.OQ,$$

а такъ какъ кромѣ того точки B, C, P и Q суть точки гармоническаго дѣленія, то точка O есть середина линіи BC, т. е. прямая AO есть медіана треугольника ABC.

Такъ какъ прямая $PP_2 \parallel AB$, то $\angle PMM = \angle MCP_2 = \angle CC_1A = \angle P_2M'C = \angle MM'P$, т. е. треугольникъ PMM' равнобедренный, $FM=FM'$, треугольники AMF и $AM'F$ равны и линія AM' есть симедіана.

М. Зиминъ (Орелъ); *Э. Заторскій* (Вильно); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.*

№ 252 (3 сер.). Сумма четырехъ послѣдовательныхъ членовъ ряда треугольныхъ чиселъ равна суммѣ двухъ слѣдующихъ членовъ. Найти эти числа.

Обозначивъ меньшее изъ искомыхъ чиселъ черезъ $\frac{(x-1)x}{2}$, получимъ уравненіе:

$$\frac{x(x-1)}{2}+\frac{x(x+1)}{2}+\frac{(x+1)(x+2)}{2}+\frac{(x+2)(x+3)}{2}=$$

$$=\frac{(x+3)(x+4)}{2}+\frac{(x+4)(x+5)}{2},$$

которое приводится къ виду:

$$x^2-14x-12=0.$$

Положительный корень этого уравненія есть 6, а потому искомыя числа суть:

15, 21, 28, 36; 45, 55.

М. Зиминъ (Орелъ); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка); *Э. Заторскій* (Вильно); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.*

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

JOURNAL

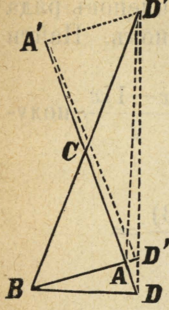
de mathématiques élémentaires.

1895.—№ 7.

Simples remarques sur les centres de gravité du triangle et du tétraèdre. Par M. *E. Brand*. Предполагая, что тр-къ ABC не однороденъ въ различныхъ своихъ точкахъ, обозначимъ черезъ M. пересѣченіе его медіанъ и черезъ G — его центръ тяжести. Раздѣливъ каждую изъ сторонъ тр-ка на n равныхъ частей и соединивъ прямыми точки дѣленія, разобьемъ тр-къ ABC на n^2 равныхъ тр-въ, подобныхъ тр-ку ABC. *M. Brand* предполагаетъ, что при наложеніи этихъ тр-въ одинъ на другой совпадающія точки ихъ однородны, т. е. имѣютъ одну и ту же плотность. Въ этомъ предположеніи доказывается, что $MG \parallel mg$ и $MG=\frac{mg}{n}$, гдѣ m и g суть пересѣченіе медіанъ и центръ тяжести одного изъ тр-въ, на которые раздѣленъ тр-къ ABC

Теорема эта обобщается затѣмъ для тетраэдра.

Demonstration géométrique de la formule $\frac{\operatorname{tg} {}^1/_2(A+B)}{\operatorname{tg} {}^1/_2(A-B)}=\frac{a+b}{a-b}$. Par M. *E. Brand*. На сторонѣ CA и на продолженіи стороны BC тр-ка ABC отложимъ отрѣзки $CD=CD'=CB=a$ (фиг. 16); отложивъ затѣмъ на продолженіи AC отрѣзокъ $CA'=CA$, получимъ $\angle CBD={}^1/_2(A+B)$, $\angle ABD=\frac{A-B}{2}$, $A'D=a+b$,



Фиг. 16.

$AD = a - b$. Тр-ки $A'D'A$ и $A'D'D''$ равновелики; поэтому и тр-ки $A'D''D$ и $D'AD$ равновелики; поэтому $A'D.DD'' = AD.DD'$, или

$$(a + b)\operatorname{tg}\frac{A - B}{2} = (a - b)\operatorname{tg}\frac{A + B}{2}.$$

Notice historique sur la trigonométrie. Par M. *Aubry*.

Exercices divers. Par M. *A. Boutin.* № 394. Положивъ

$$S_n = x^2 + (x + r)^2 + (x + 2r)^2 + \ldots + [x + (n - 1)r]^2,$$

авторъ предлагаетъ доказать тождества для различныхъ значеній n, представляющія S_n въ видѣ суммы трехъ или четырехъ квадратовъ.

№ 395. Если

$$S = 1 + 1 + 2 + 4 + 7 + \ldots + u_n,$$

гдѣ

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3},$$

то

$$S = \frac{u_{n+2} + u_n - 1}{2}.$$

№ 396. При всякомъ n можно найти n^2 такихъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію, что сумма ихъ квадратовъ есть также полный квадратъ.

Concours de 1895.

Baccalauréats.

Question 546.

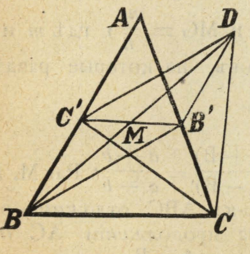
Questions proposées. №№ 650—655.

Д. Е.

1895. — № 8.

Sur un théorème indépendant du postulatum d'Euclide. Par M. *G. Tarry*. Если діагонали чет-ка взаимно дѣлятся пополамъ, то четыр-къ—параллелограммъ. Въ этомъ можно убѣдиться независимо отъ постулата Евклида (о паралл. линіяхъ). На основаніи этой леммы *Tarry* доказываетъ, что *если два биссектора тр-ка равны, то тр-къ равнобедренный.*

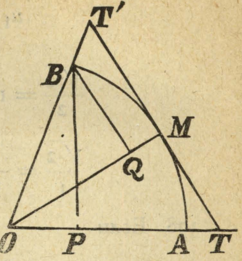
Пусть въ тр-кѣ ABC (фиг. 17) биссекторы BB' и CC' равны. Обозначимъ черезъ M средину $B'C'$ и на продолженіи BM отложимъ $MD = BM$; получится параллелограммъ $BB'DC'$, вершина котораго B' находится внутри тр-ка $CC'D$. Если $AB < AC$, то $\angle B > \angle C$ и $\angle C'DB' > \angle C'CB'$; но въ тр-хъ BCB' и BCC' сторона BC общая и $BB' = CC'$; поэтому $B'C > BC'$ или $B'C > B'D$, а потому въ тр-кѣ $B'DC$ уг. $\angle B'DC > \angle B'CD$. Такъ какъ $\angle C'DB' > \angle C'CB'$ и $\angle B'DC > \angle B'CD$, точка же B' лежитъ внутри тр-ка $C'CD$, то $\angle C'DC > \angle C'CD$, т. е. $CC' > C'D$, или $CC' > BB'$, что противно предположенію; значитъ AB и AC не могутъ быть неравны.



Фиг. 17.

Démonstrations géométriques de quelques formules de trigonometrie rectiligne. Par M. *Brand*. 1. Пусть дуга $AB = AM + MB = a + b$ (фиг. 18). Проведемъ черезъ M касательную и обозначимъ черезъ T и T' пересѣченія ея съ OA и OB. Такъ какъ $\triangle OBT = \triangle OTT' - \triangle BTT'$, то $OT.BP = TT'.OM - TT'.QM$, или $OT.BP = TT'.OQ$; отсюда, принимая $OA = 1$, получимъ

$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a.$$



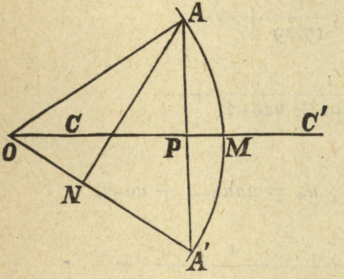
Фиг. 18.

2. Если точку M взять такъ, что $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AM} - \overset{\frown}{BM}$, то такимъ же путемъ получимъ формулу:

$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a.$$

3. Пусть $\overset{\frown}{AA'} = 2.\overset{\frown}{AM} = 2a$ (фиг. 19). Такъ какъ $\triangle AOA' = OA'.AN = AA'.OP$, то $OA'.AN = 2AP.OP$; отсюда (при $OA = 1$) находимъ:

$$\sin 2a = 2.\sin a.\cos a.$$



Фиг. 19.

4. Если окружность ANA' пересѣкается съ OM въ C и C', то $OA'.ON = OC'.OC$, или

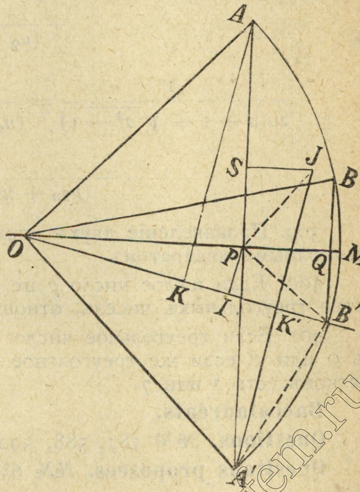
$$OA'ON = (OP + PC')(OP - PC);$$

отсюда:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

5. Пусть $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MA'} = a$, $\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{MB'} = b$, (фиг. 20). Такъ какъ чет-къ $AOA'B' = \triangle OAB' + \triangle OA'B' = \triangle OAA' + \triangle AA'B'$, то, опустивъ перпендикуляры AK и A'K' на OB', получимъ $OB'(AK + A'K') = AA'(OP + PQ)$; отсюда (при $AO = 1$):

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a.\cos b.$$



Фиг. 20.

6. Опустивъ изъ P перпендикуляръ PI на OB', изъ $\triangle OPB'$ получимъ:

$$OP.B'Q = OB'.PI;$$

подставивъ сюда $PI = \frac{1}{2}(AK - A'K')$, найдемъ $OP.B'Q = OB'.\frac{1}{2}(AK - A'K')$,

откуда

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a.\sin b.$$

7. Если на продолженіи A'K' отложить K'J такъ, чтобы $A'J = OA = 1$, то перпендикуляръ JS на $AA' = \sin b$, ибо $\angle PA'K' = b$. Но изъ $\triangle PJA'$ имѣемъ: $PA'.JS = A'J.IK'$; подставивъ сюда $IK' = \frac{1}{2}(OK' - OK)$, получимъ $A'J.\frac{1}{2}(OK' - OK) = PA'.JS$; отсюда

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2.\sin a.\sin b.$$

8. Такъ какъ чт-къ PIB'Q вписывается въ кругъ, то $OB'.OI = OP.OQ$, т. е.

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a.\cos b.$$

Notice historique sur la trigonométrie. Par M. *Aubry.*

Exercices divers. Par *Aug. Boutin.* №№ 397—401.

397. Если

$$u_1 = 1,\ u_2 = 3, \ldots,\ u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2},$$

то

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.7} - \frac{1}{7.17} + \cdots \pm \frac{1}{u_n u_{n-1}} \mp \cdots,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.17} + \frac{1}{17.99} + \cdots + \frac{1}{u_{2n} u_{2n+2}} + \cdots$$

398. Если

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2, \ldots,\ u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2},$$

то

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.17} + \frac{1}{17.29} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{u_{2n+1}(u_{2n} + u_{2n-1})} + \frac{1}{u_{2n+1}(u_{2n+1} + u_{2n+2})} + \cdots$$

Если

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2a,\ u_3 = 4a^2 + 1, \ldots,\ u_n = 2au_{n-1} + u_{n-2},$$

то

$$\frac{1}{a + 1 + \sqrt{a^2 + 1}} = \frac{1}{(u_0 + u_1)(u_1 + u_2)} - \frac{1}{(u_1 + u_2)(u_2 + u_3)} +$$

$$+ \frac{1}{(u_2 + u_3)(u_3 + u_4)} - \cdots,$$

$$\frac{1}{2a(a + 1 + \sqrt{a^2 + 1})} = \frac{1}{(n_0 + u_1)(u_2 + u_3)} + \frac{1}{(u_2 + u_3)(u_4 + u_5)} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(u_{2n} + u_{2n+1})(u_{2n+2} + u_{2n+3})} + \cdots$$

399. Произведенiе двухъ послѣдовательныхъ треугольныхъ чиселъ не можетъ быть полнымъ квадратомъ.

400. Если цѣлое число p не есть квадратъ, то существуетъ безчисленное множество треугольныхъ чиселъ, отношенiе которыхъ $= p$.

401. Если треугольное число оканчивается цифрой 3, то цифра его десятковъ есть 0 или 5; если же треугольное число оканчивается цифрой 8, то цифра его десятковъ есть 2 или 7.

Baccalauréats.

Questions. №№ 587, 588, 590, 593, 595, 598, 603.

Questions proposées. №№ 656—667.

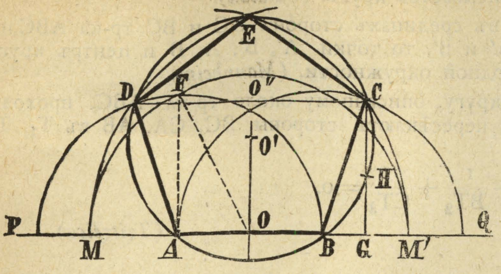
Д. Е.

1895. — № 9.

Notes sur le pentagone régulier. Par M. *A. Droz-Farny.* Предлагается слѣдующее построенiе правильнаго 5-тиугольника по данной сторонѣ его a, основанное на формулѣ дiагонали этой фигуры:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

На прямой PQ (фиг. 21) откладывается отрѣзокъ $AB = a$ и около точекъ A и B описываются окружности радіусомъ a; пусть F есть пересѣченіе первой изъ этихъ окружностей съ перпендикуляромъ въ A къ прямой PQ. Около средины O отрѣзка AB описываемъ окружность радіусомъ OF, которая пересѣчетъ PQ въ M и M′. Окружности, описанныя около A и B радіусами AM′ и BM, въ пересѣченіи съ окружностями, описанными около тѣхъ же точекъ радіусомъ a, опредѣляютъ вершины 5-тиугольника C и D; тѣ же двѣ окружности, пересѣкаясь между собою, даютъ и пятую вершины E 5-тиугольника.



Фиг. 21.

Опустимъ перпендикуляръ CG изъ вершины C на продолженіе AB и обозначимъ черезъ H пересѣченіе его съ окружностью, описанною около 5-тиугольника. Легко убѣдиться, что CH есть сторона правильнаго 10-тиугольника, вписаннаго въ ту же окружность, а HG равенъ половинѣ радіуса R этой окружности. Замѣтивъ кромѣ того, что CD есть сторона правильнаго звѣздчатаго 5-тиугольника, получимъ слѣдующія теоремы:

I. *Апоѳема правильнаго звѣздчатаго 5-тиугольника равна половинѣ стороны правильнаго 10-тиугольника, вписаннаго въ тотъ же кругъ.*

II. *Апоѳема правильнаго обыкновеннаго 5-тиугольника равна полусуммѣ радіуса описаннаго круга и стороны правильнаго 10-тиугольника вписаннаго въ тотъ же кругъ.*

Détermination du centre de similitude de deux figures directement semblables ABC, A′B′C′. *F. J.* Авторъ разсматриваетъ случай, когда гомологичныя стороны AB и A′B′ подобныхъ и одинаково расположенныхъ фигуръ служатъ противоположными сторонами выпуклаго 4-угольника ABB′A′, и указываетъ 4 способа для построенія двойной точки S этихъ фигуръ.

1) Если D′ есть пересѣченіе AB и A′B′, то окружности AA′D′ и BB′D′ пересѣкаются въ двойной точкѣ S (*точка Miquel*’я чет-ка ABB′A′). Черезъ ту же точку S проходятъ окружности ABD и A′B′D, гдѣ D есть пересѣченіе AA′ и BB′.

Четыре окружности AA′D, BB′D′, ABD и A′B′D авторъ предлагаетъ называть *окружностями Miquel*’я для чет-ка ABB′A′.

2) Пусть M, M′ суть точки гармонически сопряженныя съ A и A′, такъ что

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{M'A}{M'A'} = \frac{AB}{A'B'};$$

если N, N′ суть точки, подобнымъ же образомъ гармонически сопряженныя съ B и B′, то окружности, имѣющія діаметрами MM′ и NN′ проходятъ черезъ двойную точку S. Черезъ ту же точку S проходятъ окружности, имѣющія діаметрами отрѣзки PQ, P′Q′ подобно предыдущему гармонически сопряженные съ AB и A′B′.

Четыре круга, имѣющихъ діаметрами отрѣзки MM′, NN′, PQ и P′Q′ авторъ предлагаетъ называть *кругами Аполлонія* для чт-ка ABB′A′.

Остальные два способа построенія точки S не представляютъ особаго интереса.

Démonstration d’une relation connue. Par un *Anonyme.* Если R и r суть радіусы круговъ, описаннаго около тр-ка и вписаннаго въ него, а d есть разстояніе между ихъ центрами, то

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Неизвѣстный авторъ даетъ общеизвѣстное доказательство этого равенства. (См. напр. геометрію Давидова).

Exercices divers. Par M. *Aug. Boutin.* №№ 402 — 404. Указаны нѣкоторыя предложенія относительно тр-ка и прямой *Simson*’a.

Questions. №№ 283, 389, 568, 604—615, 617, 619, 620.

Изъ доказанныхъ здѣсь теоремъ обратимъ вниманіе на слѣдующія:

№ 283. Четыреугольникъ, периметръ и углы котораго заданы, имѣетъ наибольшую площадь, когда въ него вписывается кругъ. (*Catalan*).

№ 605. Если перпендикуляры въ срединахъ сторонъ AC и BC тр-ка ABC пересѣкаютъ стороны BC и AC въ A′ и B′, то точки A′, B′, A, B и центръ круга, описаннаго около тр-ка, лежатъ на одной окружности. (*Mannheim*).

№ 610. Если касательныя къ кругу, описанному около тр-ка ABC, проходящія черезъ вершины тр-ка A, B, C, пересѣкаютъ стороны BC, CA, AB въ T_1, T_2, T_3, то

$$\frac{1}{AT_1}+\frac{1}{BT_2}+\frac{1}{CT_3}=0.$$

(*Tzitzéica*).

Baccalauréats.

Questions proposées. №№ 668—672. *Д. Е.*

ПРИСЛАНЫ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ и БРОШЮРЫ:

31. **Лѣтописи метеорологической обсерваторіи Императорскаго Новороссійскаго Университета въ Одессѣ.** *А. Клоссовскаго.* Годъ 2-й. 1895. Одесса. 1896.

32. **Теорія трохоидальныхъ волнъ или волнъ Герстнера.** Изложилъ студентъ С.-Петербургскаго Университета *А. Фанъ-деръ-Флитъ.* С.-Петербургъ. 1894.

33. **Къ вопросу о теоріи волнъ.** I Точная теорія толчеи. II Замѣчанія математическаго характера. III Волны въ жидкости конечной глубины. *А. Фанъ-деръ-Флитъ.* С.-Петербургъ. 1896.

34. **Микроскопъ. Руководство для научной микроскопіи** Д-ра *А. Циммермана*, профессора Тюбингенскаго университета. Переводъ съ нѣмецкаго сочиненія: „Das Mikroskop. Ein Leitfaden der wissenschaftlichen Mikroskopie vor Dr. A. Zimmermann" съ дополненіями по рукописи автора Д-ра *А. Р. Ильиша.* Съ 241 рисунками. С.-Петербургъ. Изданіе К. Л. Риккера. Невскій проспектъ, 14. 1896. Цѣна 3 р. 50 к.

35. **О свойствахъ мельчайшихъ частицъ матеріи.** Читано въ публичномъ засѣданіи Императорской Академіи Наукъ 29-го декабря 1895 г. Адъюнктомъ кн. *Б. Голицинымъ.* Спб. 1896.

36. **Ueber die Ausgangspunkte und Polarisation der x- Strahlen.** Von Fürst *B. Galitzin* und *A. v. Karnojitzky.* (Vorgelegt der Akademie am 6. März 1896) (Mit 14 phototypischen, Tafeln) [Записки Императорской Академіи Наукъ. По физико-математическому отдѣленію. Томъ III, № 6]. Спб. 1896. Цѣна 1 р. 20 к.

37. **Лучи Рёнтгена.** Публичная лекція проф. *О. Д. Хвольсона.* Стенографирована и издана въ пользу слушательницъ Высшихъ Женскихъ Курсовъ Б. П. Вейнбергомъ. Съ 5-ю рисунками въ текстѣ. Спб. Изданіе К. Л. Риккера, Невскій просп. 14. 1896. Цѣна 40 коп.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 30-го Апрѣля 1896 г.
„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

Обложка
ищется

Обложка
ищется