Обложка
ищется

Обложка
пщется

XVIII Сем. 5-го марта 1895 г. № 6.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 210.

ПРИЗНАКИ НЕСОКРАТИМОСТИ СУММЫ ДРОБЕЙ и примѣненіе ихъ къ рѣшенію ДРОБНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

§ 1. Положимъ, что имѣемъ нѣсколько ариѳметическихъ или алгебраическихъ дробей; обозначимъ числителей этихъ дробей черезъ $a_1, a_2,..., a_n$ и соотвѣтствующихъ знаменателей черезъ $b_1, b_2,..., b_n$ и постараемся узнать, въ какихъ случаяхъ дробь, равная суммѣ дробей: $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}$, и имѣющая знаменателемъ наименьшее общее кратное знаменателей этихъ дробей, будетъ дробь несократимая.

Обозначимъ чрезъ B наименьшее общее кратное знаменателей: $b_1, b_2,... b_n$; пусть

$$B=d_1^{m_1} d_2^{m_2} ... d_i^{m_i} ... d_k^{m_k},$$

гдѣ $d_1, d_2,..., d_k$ простые множители, и пусть

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{A_1}{B}, \frac{a_2}{b_2}=\frac{A_2}{B}, ..., \frac{a_n}{b_n}=\frac{A_n}{B},$$

тогда

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}=\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{B}=\frac{A}{B},$$

гдѣ

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

Посмотримъ, когда полученная въ суммѣ дробь $\frac{A}{B}$ не можетъ быть сокращена на какого нибудь простого множителя d_i, входящаго въ разложеніе на простыхъ множителей ея знаменателя B. Очевидно, что сокращеніе дроби $\frac{A}{B}$ на множителя d_i не возможно только въ томъ случаѣ, когда сумма

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

не дѣлится нацѣло на d_i; но легко доказать слѣдующія четыре теоремы относительно дѣлимости суммы на какое нибудь количество:

1) *Если каждое слагаемое дѣлится нацѣло на какое нибудь количество, то и сумма раздѣлится на то же количество.*

2) *Если одно изъ слагаемыхъ не дѣлится нацѣло на какое нибудь количество, а всѣ остальныя слагаемыя дѣлятся порознь на то же количество, то сумма всѣхъ слагаемыхъ не раздѣлится на это количество.*

3) *Если нѣсколько изъ слагаемыхъ порознь дѣлятся нацѣло на какое нибудь количество и сумма остальныхъ слагаемыхъ дѣлится на то же количество, то и сумма всѣхъ слагаемыхъ раздѣлится на это количество.*

4) *Если нѣсколько изъ слагаемыхъ порознь дѣлятся нацѣло на какое нибудь количество, а сумма остальныхъ слагаемыхъ не дѣлится на то же количество, то и сумма всѣхъ слагаемыхъ не раздѣлится на это количество.*

Слѣдовательно для рѣшенія нашего вопроса надо изслѣдовать, сколько изъ числителей: A_1, A_2,..., A_n не дѣлятся на d_i. Но очевидно, что на множителя d_i не будутъ дѣлиться между числителями: A_1, A_2,..., A_n, числители всѣхъ тѣхъ и только тѣхъ изъ дробей: $\frac{A_1}{B}, \frac{A_2}{B}, \ldots, \frac{A_n}{B}$, которымъ между дробями: $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ соотвѣтствуютъ дроби, несократимыя на d_i и содержащія въ то же время въ разложеніяхъ своихъ знаменателей на простыхъ множителей высшую степень множителя d_i, т. е. $d_i^{m_i}$. Поэтому, если между дробями: $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, нѣтъ ни одной дроби, несократимой на d_i и содержащей въ то же время въ разложеніи своего знаменателя множителемъ $d_i^{m_i}$, или если есть нѣсколько такихъ дробей, то нельзя заранѣе сказать, будетъ ли сумма всѣхъ данныхъ дробей, т. е. дробь $\frac{A}{B}$, сократима или не сократима на d, ибо въ суммѣ числителей $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ будетъ нѣсколько слагаемыхъ, не дѣлящихся на d_i; сумма же, нѣсколько изъ слагаемыхъ которой не дѣлятся нацѣло на какое нибудь количество, иногда дѣлится, а иногда и не дѣлится на это количество. Если же между дробями: $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$, есть только одна дробь, несократимая на d_i и содержащая въ то же время въ разложенiи своего знаменателя множителемъ $d_i^{m_i}$, то дробь $\frac{A}{B}$ будетъ не сократима на d_i, ибо въ суммѣ $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ только одно слагаемое не будетъ дѣлиться на d_i, а слѣдовательно и сумма A не будетъ дѣлиться на d_i.

Итакъ получаемъ слѣдующiе **два признака частной несократимости суммы какихъ угодно дробей:**

Дробь, равная суммѣ какихъ угодно дробей и имѣющая знаменателемъ наименьшее общее кратное знаменателей этихъ дробей, не сокращается:

1) *ни на какого простого множителя, который, входя въ разложенiе на простыхъ множителей знаменателя только одной изъ данныхъ дробей, въ разложенiе числителя ея не входитъ вовсе;*

2) *ни на кокого простого множителя, который, входя въ разложенiя на простыхъ множителей знаменателей нѣсколькихъ изъ данныхъ дробей, вовсе не входитъ въ разложенiе числителя по крайней мѣрѣ одной изъ этихъ дробей, но въ томъ числѣ обязательно одной и только одной изъ тѣхъ дробей, въ разложенiя знаменателей которыхъ онъ входитъ въ своей высшей степени.*

Эти признаки нѣсколько упрощаются, если имѣемъ дѣло съ несократимыми дробями; именно тогда примѣняемъ слѣдующiе **два признака частной несократимости суммы несократимыхъ дробей:**

Дробь, равная суммѣ несократимыхъ дробей и имѣющая знаменателемъ наименьшее общее кратное знаменателей этихъ дробей, не сокращается:

1) *ни на какого простого множителя, который входитъ въ разложенiе на простыхъ множителей знаменателя только одной изъ данныхъ дробей;*

2) *ни на какого простого множителя, который, входя въ разложенiя на простыхъ множителей знаменателей нѣсколькихъ изъ данныхъ дробей, входитъ въ своей высшей степени въ разложенiе знаменателя только одной изъ этихъ дробей.*

Изъ четырехъ предыдущихъ признаковъ частной несократимости вытекаютъ слѣдующiе **три признака полной несократимости суммы дробей:**

1) *Дробь, равная суммѣ какихъ угодно дробей и имѣющая знаменателемъ наименьшее общее кратное знаменателей этихъ дробей, будетъ дробь несократимая, если каждый простой множитель, который входитъ въ разложенiе на простыхъ множителей знаменателя только одной изъ данныхъ дробей, въ разложенiе ея числителя не входитъ вовсе, и если каждый простой множитель, который входитъ въ разложенiя знаменателей нѣсколькихъ изъ данныхъ дробей, не входитъ вовсе въ разложенiе числителя по крайней мѣрѣ одной изъ этихъ дробей, но въ томъ числѣ обязательно одной и только одной изъ тѣхъ дробей, въ разложенiя знаменателей которыхъ онъ входитъ въ своей высшей степени.*

2) *Дробь, равная суммѣ несократимыхъ дробей съ какими угодно знаменателями и имѣющая знаменателемъ наименьшее общее кратное знаменателей этихъ дробей, будетъ дробь несократимая, если каждый простой множитель, который входитъ въ разложенія на простыхъ множителей знаменателей нѣсколькихъ изъ данныхъ дробей, входитъ въ своей высшей степени въ разложеніе знаменателя только одной изъ этихъ дробей.*

3) *Дробь, равная суммѣ несократимыхъ дробей, между знаменателями которыхъ нѣтъ равныхъ, и имѣющая знаменателемъ наименьшее общее кратное знаменателей этихъ дробей, будетъ дробь несократимая, если всѣ знаменатели данныхъ дробей попарно взаимно простые между собой.*

§ 2. Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ. Замѣтимъ, что если требуется сложить нѣсколько дробей, то прежде приведенія ихъ къ наименьшему общему знаменателю всегда возможно предвательно сократить всѣ дроби, допускающія сокращеніе, и соединить въ одну всѣ дроби, имѣющія одинаковыхъ знаменателей. Поэтому можно ограничиться разсмотрѣніемъ суммы только несократимыхъ дробей, между знаменателями которыхъ нѣтъ равныхъ.

Примѣръ I. Пусть

$$\frac{2}{3.5.7}+\frac{3}{2.5.11}+\frac{5}{2.3.13}=\frac{A}{B},$$

гдѣ

$$B=2.3.5.7.11.13.$$

Такъ какъ дробь $\frac{A}{B}$ представляетъ сумму несократимыхъ дробей, то на основаніи перваго признака частной несократимости суммы несократимыхъ дробей, не вычисляя A, можно заранѣе сказать, что дробь $\frac{A}{B}$ не сокращается на 7, 11 и 13, ибо каждый изъ этихъ простыхъ множителей входитъ въ разложеніе знаменателя только одной изъ данныхъ дробей; относительно же несократимости дроби $\frac{A}{B}$ на 2, 3 и 5 заранѣе ничего нельзя сказать, ибо каждый изъ этихъ простыхъ множителей входитъ въ разложенія знаменателей двухъ изъ данныхъ дробей.

Сдѣлаемъ повѣрку. Вычисляя A и B, получаемъ:

$$A=3316,\ B=30030.$$

Легко убѣдиться, что дробь $\frac{3316}{30030}$ можетъ быть сокращена только на 2, что не противорѣчитъ вышесказанному.

Примѣръ II. Пусть

$$\frac{1}{a(a-b)(c-a)}+\frac{1}{b(b-c)(a-b)}+\frac{1}{c(c-a)(b-c)}=\frac{A}{B},$$

гдѣ

$$B=abc(a-b)(b-c)(c-a).$$

Разсуждая, какъ въ примѣрѣ I-омъ, можно заранѣе сказать, что дробь $\frac{A}{B}$ не можетъ быть сокращена на a, b и c; относительно же несократимости этой дроби на $a-b$, $b-c$ и $c-a$ нельзя сдѣлать никакого заключенія, не вычисливъ предварительно A. Вычисляя же A и разлагая на простыхъ множителей, получаемъ, что

$$A=-(a-b)(b-c)(c-a),$$

и слѣдовательно

$$\frac{A}{B}=-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Очевидно, что дробь $\frac{A}{B}$ не сократима на a, b и c, но сократима на $a-b$, $b-c$ и $c-a$, что не противорѣчитъ вышесказанному.

Примѣръ III. Пусть

$$\frac{15}{x-2}-\frac{16}{x-3}+\frac{2}{x-5}=\frac{A}{B},$$

гдѣ

$$B=(x-2)(x-3)(x-5).$$

Такъ какъ дробь $\frac{A}{B}$ представляетъ алгебраическую сумму несократимыхъ дробей съ знаменателями, попарно взаимно-простыми между собою, то, не вычисляя A, на основаніи третьяго признака полной несократимости заключаемъ, что $\frac{A}{B}$ есть дробь несократимая. Дѣйствительно

$$A=x^2-18x+77=(x-7)(x-11),$$

$$\frac{A}{B}=\frac{(x-7)(x-11)}{(x-2)(x-3)(x-5)},$$

откуда ясно видна несократимость дроби $\frac{A}{B}$.

Примѣръ IV. Пусть

$$\frac{5}{(x-2)(x-7)}+\frac{7}{(x-5)(x-7)}+\frac{3}{(x-2)(x-5)}=\frac{A}{B},$$

гдѣ

$$B=(x-2)(x-5)(x-7).$$

О несократимости дроби $\frac{A}{B}$ заранѣе ничего нельзя сказать, ибо каждый изъ множителей $x-2$, $x-5$, $x-7$ входитъ въ разложенія знаменателей двухъ изъ данныхъ дробей. Вычисляя же A, находимъ, что

$$A=15x-60=15(x-4),$$

$$\frac{A}{B}=\frac{15(x-4)}{(x-2)(x-5)(x-7)};$$

слѣдовательно $\frac{A}{B}$ есть дробь несократимая, что не противорѣчитъ вышесказанному.

Примѣръ V. Пусть

$$\frac{5}{(x-2)(x-7)}+\frac{7}{(x-5)(x-7)}-\frac{3}{(x-2)(x-5)}=\frac{A}{B},$$

гдѣ

$$B=(x-2)(x-5)(x-7).$$

О несократимости дроби $\frac{A}{B}$ заранѣе ничего нельзя сказать, какъ и въ примѣрѣ IV-мъ. Вычисляя же A, находимъ, что

$$A=9x-18=9(x-2),$$

$$\frac{A}{B}=\frac{9(x-2)}{(x-2)(x-5)(x-7)};$$

слѣдовательно дробь $\frac{A}{B}$ можетъ быть сокращена на $x-2$, что не противорѣчитъ вышесказанному.

Примѣръ VI. Пусть

$$\frac{1}{a^2bc}+\frac{1}{b^2ca}+\frac{1}{c^2ab}=\frac{A}{B},$$

гдѣ

$$B=a^2b^2c^2.$$

На основанiи второго признака полной несократимости заключаемъ, что $\frac{A}{B}$ есть дробь несократимая, ибо хотя каждый изъ простыхъ множителей a, b и c входитъ въ разложенiя знаменателей всѣхъ данныхъ дробей, но въ своей высшей степени, въ данномъ случаѣ во второй, каждый изъ этихъ множителей входитъ въ разложенiе знаменателя только одной изъ данныхъ дробей. Вычисляя A, находимъ, что

$$A=bc+ca+ab,$$

$$\frac{A}{B}=\frac{bc+ca+ab}{a^2b^2c^2},$$

откуда ясно видна несократимость дроби $\frac{A}{B}$.

§ 3. Выведенные въ § 1 признаки несократимости суммы дробей показали, а разсмотрѣнные въ § 2 примѣры подтвердили, что сумма не только какихъ угодно дробей, но даже несократимыхъ дробей съ неравными знаменателями не всегда бываетъ дробью несократимою. Это обстоятельство весьма важно, ибо въ большинствѣ учебниковъ алгебры утверждается совершенно противное, т. е. что сумма не только несократимыхъ, съ неравными знаменателями, а даже какихъ угодно дробей всегда есть дробь несократимая, откуда выводится ложное заключеніе, что при умноженіи обѣихъ частей уравненія, содержащаго неизвѣстныя въ знаменателяхъ дробей, на наименьшее общее кратное знаменателей получается уравненіе, равносильное первоначальному.

Такъ напримѣръ проф. Давидовъ, доказавъ, что отъ умноженія обѣихъ частей уравненія на количество, содержащее неизвѣстныя, получается уравненіе, вообще нетождественное съ первымъ, говоритъ далѣе въ § 120 своей „Начальной алгебры“.

„Есть впрочемъ случай, когда умноженіе обѣихъ частей уравненія „на множитель, содержащій неизвѣстныя, приводитъ къ уравненію тож- „дественному съ первымъ; именно когда количество, на которое мно- „жимъ, есть наименьшее кратное выраженіе всѣхъ знаменателей. Пусть „будетъ

$$A = B \ldots (1)$$

„данное уравненіе, гдѣ A и B означаютъ какія нибудь выраженія, со- „держащія неизвѣстныя, и положимъ что m есть наименьшее кратное „выраженіе всѣхъ знаменателей. Помноживъ обѣ части на m, находимъ „уравненіе

$$mA = mB \ldots (2).$$

„Требуется доказать, что уравненія (1) и (2) тождественны“.

„Для этого, приводя всѣ члены уравненія (1) къ общему знаме- „нателю m, положимъ, что находимъ $A = \frac{A_1}{m}$ и $B = \frac{B_1}{m}$, такъ что урав- „неніе (1) приметъ видъ $\frac{A_1}{m} = \frac{B_1}{m}$ или, означивъ разность $A_1 - B_1$ че- „резъ P, будемъ имѣть

$$\frac{P}{m} = 0$$

„и такъ какъ $mA = A_1$ и $mB = B_1$, то уравненіе (2) представится въ „видѣ $A_1 = B_1$, или въ видѣ

$$P = 0“.$$

„Вслѣдствіе свойства наименьшаго кратнаго знаменателя m выра- „женіе $\frac{P}{m}$ представитъ несократимую дробь, т. е. числитель и знамена- „тель ея не будутъ имѣть общихъ множителей“[1]). На основаніи этого далѣе доказывается, что „тѣ величины неизвѣстныхъ, которыя обра- „щаютъ въ нуль знаменатель m, не могутъ обращать въ нуль числи- „тель P“[2]); отсюда выводится, наконецъ, заключеніе о тождественности уравненія (1) со (2).

---

[1]) А. Давидовъ. Начальная алгебра. Изданіе 12-е. М. 1892. § 120. Стран.: 109—110.

[2]) Тамъ же, стран.: 110.

Итакъ все разсужденіе проф. Давидова основано на нѣкоторомъ невысказанномъ и недоказанномъ имъ свойствѣ наименьшаго кратнаго знаменателей, свойствѣ, которое, очевидно, состоитъ въ томъ, что сумма какихъ угодно дробей всегда есть дробь несократимая; но мы видѣли выше, что это не вѣрно, слѣдовательно и заключеніе о тождественности уравненія (1) со (2) не вѣрно.

Подобно проф. Давидову разсуждаетъ также г. Покатиловъ, хотя впрочемъ и пытается дать доказательство недоказываемаго проф. Давидовымъ свойства наименьшаго кратнаго знаменателей. Именно, желая доказать, что уравненія

$$A=B \qquad (1)$$

и

$$An=Bn \qquad (2)$$

„однозначущи", если n означаетъ наименьшее кратное знаменателей всѣхъ дробей въ уравненіи (1), г. Покатиловъ представляетъ эти уравненія въ такомъ видѣ:

$$\frac{A'-B'}{n}=0 \qquad (1)$$

и

$$A'-B'=0, \qquad (2)$$

гдѣ $\frac{A'}{n}=A$ и $\frac{B'}{n}=B$, и далѣе разсуждаетъ, между прочимъ, такъ:

„Такъ какъ, при приведеніи членовъ уравненія (1) къ общему „наименьшему кратному знаменателю, каждаго изъ нихъ приходится „умножать на разныхъ производителей наименьшаго кратнаго знаменателя n, то числитель и знаменатель дроби $\frac{A'-B'}{n}$ не будутъ имѣть, *го-„воря вообще,* общихъ множителей"[3]).

Слова „*говоря вообще*" указываютъ, что г. Покатиловъ не былъ увѣренъ, что сумма *всякихъ* дробей есть дробь несократимая.

Болѣе опредѣленно на этотъ счетъ высказывается г. Блюмбергъ; онъ говоритъ слѣдующее:

„Уравненіе не пріобрѣтетъ новыхъ корней, когда обѣ его части „умножимъ на наименьшее кратное знаменателей его дробныхъ членовъ „(предполагая, что всѣ дроби съ одинаковымъ знаменателемъ соединены „въ одну несократимую дробь), потому что это наименьшее кратное „войдетъ множителемъ цѣликомъ только въ цѣлыхъ членахъ даннаго „уравненія, а въ остальныхъ, послѣ сокращенія, войдутъ только нѣкоторые изъ его множителей, такъ что члены получаемаго уравненія не „пріобрѣтутъ общаго множителя; слѣд., тѣ значенія неизвѣстныхъ, которыя обращаютъ въ нуль наименьшее кратное знаменателей, не могутъ уже обращать данное уравненіе въ тождество, а потому это уравненіе не пріобрѣтетъ новыхъ корней"[4]).

---

[3]) Ф. Покатиловъ. Алгебра. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Выпускъ I. Уравненія. СПБ. 1884. Стран.: 66—67.

[4]) Я. Блюмбергъ. Дополнительныя статьи алгебры съ предшествующею статьею „Приложеніе алгебры къ геометріи". Курсъ VII (дополнительнаго) класса реальныхъ училищъ. 4-е изданіе. СПБ. 1890. Дополнит. статьи алгебры: § 22, стран. 50.

Очевидно, что у г. Блюмберга идетъ рѣчь только о дробяхъ несократимыхъ съ неравными знаменателями, но и его разсужденіе не вѣрно, ибо, какъ было показано мною въ §§ 1 и 2 этой статьи, сумма и несократимыхъ дробей съ неравными знаменателями не всегда бываетъ дробью несократимою.

Учит. Варш. реальн. учил. *С. Гирманъ.*

(Окончаніе слѣдуетъ).

О САМОСТОЯТЕЛЬНЫХЪ РАБОТАХЪ
УЧЕНИКОВЪ ГИМНАЗІЙ
по физико-математическимъ наукамъ.

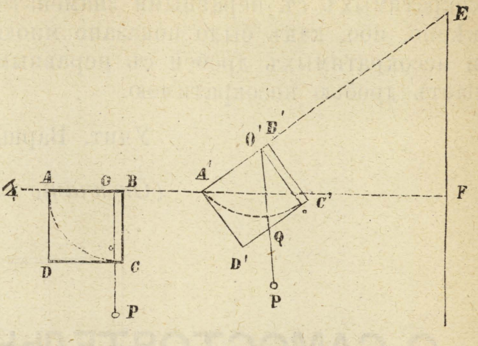
(Продолженіе).*

Легкость наблюденія главнѣйшихъ астрономическихъ явленій, полная независимость явленія отъ случайныхъ обстоятельствъ, интересъ, который всегда возбуждала и продолжаетъ возбуждать астрономія въ людяхъ—вотъ обстоятельства, по которымъ я выбралъ предыдущіе примѣры изъ ея области. Но если бы кто счелъ неудобнымъ останавливать вниманіе учениковъ на этой наукѣ ранѣе, чѣмъ она начнетъ изучаться, тому можно предложить работы по геометріи и другимъ предметамъ. Геометрія даетъ возможность разработки вопросовъ какъ теоріи, такъ и практики, и при занятіяхъ приложеніями геометріи можно обойтись безъ громоздкихъ приборовъ. Есть одинъ инструментъ, хорошо извѣстный въ лѣсохозяйственной и очень мало въ педагогической практикѣ—это „измѣритель Пресслера". Его очень легко сдѣлать изъ картона; онъ очень удобоносимъ и простъ въ употребленіи. Гимназистъ, идя изъ гимназіи, почти на ходу, можетъ съ его помощью измѣрить колокольню, спускаясь подъ гору, можетъ опредѣлить степень ея уклона, высоту ея и длину проекціи дороги по ней на горизонтальную плоскость, можетъ, при случаѣ, легко опредѣлять углы на мѣстности (но не на небѣ), а также вычислять въ умѣ безъ сложныхъ разсчетовъ площади круговъ и объемы круглыхъ тѣлъ. Инструментъ этотъ по его портативности, удобству приготовленія и употребленія, а также разнообразію вопросовъ, рѣшаемыхъ имъ, можно считать образцомъ, къ которому должны стремиться приборы, назначенные для самостоятельныхъ работъ учащихся, а потому я опишу его подробно.

Существенную часть его представляетъ прямоугольникъ ABCD (фиг. 32) изъ картона. Къ нему въ точкѣ O прикрѣплена нить съ гру-

*) См. „В. О. Ф." №№ 205 и 208.

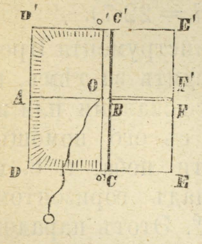
зомъ P на концѣ. Пусть плоскость прямоугольника приведена въ вертикальное, а ребро AB въ горизонтальное положенiе, нить OP проходитъ черезъ линiю Oo⊥AB. Если теперь AB отклонится отъ горизонтальнаго положенiя на уголъ EA′F, плоскость же прямоугольника останется вертикальною, то нить груза отклонится отъ линiи O′o′, съ которой совпадала прежде, на уголъ o′O′P′, равный EA′F. Поэтому, если построить четверть окружности Ao изъ центра O и



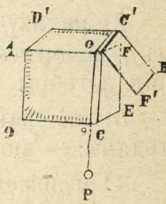
Фиг. 32.

раздѣлить ее на градусы, исходя изъ точки o, какъ нулевой, то получимъ инструментъ для измѣренiя угловыхъ высотъ. Вмѣсто скалы на дугѣ, можно помѣстить ее на ломанной CDA вдоль края прибора, какъ это и дѣлаетъ Пресслеръ; при этомъ дѣленiя, конечно, будутъ не равны между собою. Назовемъ эту скалу „скалой угловъ“. На ряду съ нею Пресслеръ помѣщаетъ другую, болѣе важную по практическимъ приложенiямъ; она строится на слѣдующихъ соображенiяхъ. Если EF есть измѣряемая вертикальная высота, то изъ подобiя треугольниковъ A′EF и o′O′Q слѣдуетъ, что o′Q:o′O′ = EF:A′F, т. е. отрѣзокъ o′Q, опредѣляемый положенiемъ нити, составляетъ такую же часть линiи O′o′, какую измѣряемая высота составляетъ относительно разстоянiя наблюдателя отъ измѣряемаго предмета, другими словами, отрѣзокъ o′Q, измѣряетъ непосредственно линейную высоту EF въ доляхъ разстоянiя наблюдателя отъ предмета; поэтому вдоль ребра o′D′ можно отложить *равныя* доли (напр. 10-я съ подраздѣленiями) линiи O′o′ и пользоваться этою скалою для измѣренiя линейныхъ высотъ съ бо́льшимъ удобствомъ, чѣмъ „скалою угловъ“; назовемъ эту скалу „скалою высотъ“. Если при измѣренiи отходить отъ предмета на 10 саженъ (при дѣленiи O′o′ на 10 частей), то показанiе нити на скалѣ высотъ прямо дастъ высоту предмета въ саженяхъ. Если желаемъ ограничиться построенiемъ только этой скалы, то достаточно будетъ наклеить на картонъ страницу изъ ученической тетради, разлинованной на мелкiя клѣтки, какiя употребляются для рисованiя, и бортъ прибора будетъ раздѣленъ на равныя части безъ всякаго труда со стороны приготовляющаго его. Продолжаясь по борту D′A′ „скала высотъ“ теряетъ равномѣрность своихъ дѣленiй, но построить ее не трудно. Къ этимъ двумъ скаламъ Пресслеръ присоединяетъ еще одну, дающую проекцiю наклонной линiи въ доляхъ этой линiи. Пусть A′E склонъ горы или линiя, параллельная ему; наблюдатель направляетъ „визирное“ ребро A′B′ прибора по этой линiи (визируя на какую-нибудь мѣтку на высотѣ своего глаза, напр. голову своего товарища, ушедшаго впередъ, если ростъ послѣдняго одинаковъ съ ростомъ наблюдателя), и на третьей скалѣ читаетъ искомое число, выражающее проекцiю. На построенiи этой скалы, которую назовемъ „скалой проекцiй“, не будемъ останавливаться. Можно было бы прибавить еще „скалу вертикальныхъ проекцiй“, т. е. скалу, дающую высоту горы по длинѣ ея склона, но такой Пресслеръ не помѣщаетъ на приборѣ.

Главную особенность измѣрителя составляетъ его конструкція, къ описанію которой и приступимъ. Беругъ квадратный кусокъ картона DED′E′ около 10 × 10 сант. (фиг. 33) и параллельно сторонамъ его проводятъ линіи: AF, дѣлящую квадратъ пополамъ, и CC′, которая нѣсколько ближе къ правому боку EE′, чѣмъ къ лѣвому DD′; прикрѣпляютъ въ центрѣ O нить съ грузомъ, проводятъ o′Oo ⊥ AF и на квадратѣ oOAD, вдоль его боковъ oD и DA, а, коли угодно, и на квадратѣ OAD′o′ вдоль боковъ AD′ и D′o′ вычерчиваютъ три или четыре описанныя выше скалы, затѣмъ дѣлаютъ надрѣзъ по линіямъ CC′ и AB до половины толщины картона, а по линіи BF насквозь (почему линія эта на чертежѣ изображена двойною и имѣетъ на концѣ двѣ буквы F и F′). Теперь приборъ готовъ. При измѣреніи его сгибаютъ, какъ показано на фиг. 33), причемъ онъ является похожимъ на кубъ съ отодранными 3-мя гранями, сходящимися въ одной его вершинѣ. Его берутъ рукою за пластинки BC′E′F′ и BCEF, положенныя другъ на друга, и приводятъ въ такое положеніе, чтобы нить, натянутая грузомъ, едва касалась грани, на которой нанесены дѣленія, а ребро AB лежало на лучѣ, идущемъ отъ глаза наблюдателя къ визируемой точкѣ. При этомъ, если эта послѣдняя точка лежитъ выше глаза наблюдателя, то наблюдатель визируетъ по направленію отъ A къ B, а если ниже, то наоборотъ.



Фиг. 33.



Фиг. 33.

Даже при отсутствіи навыка при измѣреніи колокольни саж. около 20 получится погрѣшность не болѣе $^1/_2$ сажени.

Приборъ наклеивается на коленкоръ, въ которомъ прорѣзывается кармашекъ для груза. Свернутый пополамъ, приборъ очень удобоносимъ въ карманѣ.

За построеніемъ скалъ поверхность измѣрителя остается чистою. Изобрѣтатель прибора занимаетъ ее двумя главными таблицами: таблицею хордъ и таблицею площадей круговъ. Первая позволяетъ измѣрять углы на мѣстности; откладывая на сторонахъ даннаго угла равныя длины, считая отъ вершины (радіусъ) и измѣряя прямую, соединяющую концы этихъ двухъ отрѣзковъ (хорду), мы по этимъ двумъ величинамъ (радіусу и хордѣ), пользуясь таблицей, легко найдемъ и уголъ. Легко воспользоваться тѣмъ же пріемомъ и для построенія угловъ. Топографы пользуются такою таблицею при съемкѣ небольшихъ участковъ земли на планъ. Таблица площадей круговъ въ зависимости отъ ихъ діаметровъ даетъ возможность опредѣлять объемы цилиндровъ (такъ какъ объемъ цилиндра съ высотою, равною единицѣ, выражается тѣмъ же числомъ, какъ и его основаніе, а объемы другихъ цилиндровъ относятся къ первому, какъ ихъ высота къ 1-цѣ), конусовъ (ихъ объемъ $^1/_3$ объема цилиндра), шаровъ и тѣлъ, близкихъ по формѣ къ этимъ.

Дополненіемъ къ послѣдней таблицѣ можетъ служить лента, на одной сторонѣ которой нанесены обыкновенныя дѣленія для измѣренія длинъ (напр. сантиметры), а на другой такія, что 22 дѣленіямъ 1-го рода здѣсь соотвѣтствуютъ 7 дѣленій; огибая этой лентой стволъ дерева, церковную колонну и т. п. круглый предметъ, можно на первой скалѣ прочитать длину окружности сѣченія этого цилиндра, а на оборотной сторонѣ величину его діаметра (такъ какъ $\pi : d = 22:7$).

Ночныя астрономическія измѣренія съ помощью инструмента Пресслера невозможны, потому что въ темнотѣ нельзя слѣдить за тѣмъ, не слишкомъ ли отклоняется нить отвѣса отъ плоскости со скалами или же не приподнята ли нить этой плоскостью. Днемъ же съ его помощью легко убѣдиться въ явленіи кажущейся приплюснутости неба, т. е. въ томъ, что точка неба, *повидимому* имѣющая высоту надъ горизонтомъ въ 45^0, въ дѣйствительности поднимается лишь на 23^0. Этотъ парадоксальный результатъ можетъ помочь распространенію инструмента между учащимися.

Изъ занятій по геометріи чисто книжнаго характера можно указать:

1) на тему, предложенную на страницахъ этого журнала, кажется г. Гольденбергомъ, для лицъ, знакомыхъ лишь съ начальными понятіями по геометріи;

2) на изученіе геометрическаго черченія (курсъ графическихъ задачъ), начертательной геометріи, теоріи перспективы и тѣней, приложенія алгебры къ геометріи и началъ аналитической геометріи;

3) на сравненіе доказательствъ одной и той же теоремы по тремъ методамъ: — анализу, синтезу и приведенію къ нелѣпости;

4) изложеніе коротенькихъ сочиненій Архимеда объ измѣреніи круга и числѣ песчинокъ (въ послѣднемъ зачатки теоріи логариѳмовъ); эта работа можетъ служить интереснымъ дополненіемъ къ біографіи Архимеда;

5) знаменитыя неразрѣшимыя задачи древнихъ и мн. др.

По алгебрѣ отмѣтимъ темы:

1) изслѣдованіе вопросовъ, относящихся къ счисленіямъ по недесятичнымъ системамъ; здѣсь могутъ быть захвачены элементы теоріи сравненій;

2) теорія опредѣлителей, по скольку она нужна для рѣшенія линейныхъ уравненій; здѣсь можетъ представить интересъ, между прочимъ, способъ представленія опредѣлителей подъ символическимъ видомъ:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1, \ldots, & k_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, \ldots, & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n, & b_n, & c_n, & d_n, \ldots, & k_n \end{vmatrix} = abcd\ldots k(b-a)(c-b)(c-a)(d-c)(d-b)(d-a)\ldots(k-a);$$

чтобы получить выраженіе въ развернутомъ видѣ, надо въ правой части раскрыть всѣ скобки и степени буквъ сдѣлать указателями при тѣхъ же буквахъ (т. е. вмѣсто a^m написать a_m); при этомъ получится знакомство съ символическими формулами и методомъ перехода отъ n къ $n+1$; формула взята изъ алгебры Лобачевскаго;

3) православная пасхалія и вопросы, связанные съ ней; здѣсь можно познакомиться съ элементами теоріи чиселъ и астрономіи;

4) общее понятіе о теоріи вѣроятностей; между прочимъ этой работой выяснится болѣе серьезное значеніе теоріи сочетаній, чѣмъ рѣ-

шеніе вопроса, сколькими способами нѣсколько пріятелей могутъ разсаживаться вокругъ обѣденнаго стола, или сколько безсмысленныхъ словъ можно составить изъ буквъ слова Mississipi;

5) общее правило извлеченія корней на основаніи формулы бинома Ньютона для цѣлыхъ положительныхъ показателей, сравнительно съ другими способами рѣшенія вопроса;

6) семь алгебраическихъ дѣйствій, ихъ законы; различные роды чиселъ и дѣйствія надъ ними; сюда могутъ войти не только комплексныя числа, но, при особенной способности лица, выбравшаго такую тему, даже нѣкоторое понятіе о кватерніонахъ, что возможно сдѣлать элементарнымъ путемъ, какъ показываютъ книжки г. Перебаскина;

7) произведеніе членовъ геометрической прогрессіи; рядъ, выводимый изъ этой прогрессіи аналогично выводу ея изъ ариѳметической $(a, a^{q}, a^{q^2}, a^{q^3}, \ldots)$, произведеніе его членовъ; произведеніе членовъ рядовъ другого типа; здѣсь получаются элементы теоріи безконечныхъ произведеній, подобно тому, какъ зародышъ теоріи рядовъ лежитъ въ теоріи прогрессій; съ этой темой можно связать краткое замѣчаніе объ алгориѳмахъ, употребляемыхъ въ анализѣ для представленія трансцедентныхъ количествъ—(строки, непрерывныя дроби, факультеты и безконечныя произведенія);

8) методъ предѣловъ; особенно просто и интересно этотъ вопросъ изложенъ у Дюгамеля въ его исчисленіи безконечно малыхъ;

9) разборъ основаній нѣкоторыхъ математическихъ софизмовъ;

10) три главные метода математики (анализъ, синтезъ и доказат. отъ противнаго);

11) понятіе о функціяхъ и обзоръ главнѣйшихъ изъ нихъ (степенныя, показательныя, логариѳмическія, тригонометрическія и круговыя);

12) приближенныя вычисленія;

13) коммерческія вычисленія, основанныя на сложныхъ процентахъ; такого рода работы выяснятъ значеніе этого отдѣла алгебры въ практической жизни.

Конечно перечисленныя темы не исчерпываютъ всѣхъ возможныхъ.

Сверхъ перечисленныхъ темъ, требующихъ усиленной работы, при изученіи курса обыкновенно представляется довольно много интересныхъ задачъ, софизмовъ, относящихся къ проходимому отдѣлу, новыхъ пріемовъ доказательствъ изучаемыхъ теоремъ, описаній вычислительныхъ и измѣрительныхъ приборовъ, мелкихъ замѣчаній, иногда интереснымъ образомъ освѣщающихъ то или другое положеніе. Въ качествѣ примѣра приведу толкованіе неравенствъ въ родѣ $\pm 2 > -5$ въ *обыденномъ* смыслѣ слова *болѣе;* обыкновенно считаютъ такое неравенство условнымъ, не согласнымъ съ принятой въ жизни рѣчью; въ дѣйствительности же нѣтъ ничего обыкновеннѣе выраженій: 2^0 тепла или холода *теплѣе* (*болѣе* теплы), чѣмъ -5^0; 2 рубля прибыли или убытка *выгоднѣе* (*болѣе* выгодны), чѣмъ 5 р. убытка; если одинъ шаръ находится на 2 фута вправо или влѣво, а другой на 5 фут. влѣво отъ пункта, откуда ведется измѣреніе, то первый *правѣе* (*болѣе* вправо), чѣмъ второй; словомъ, стоитъ только читать подобныя неравенства такъ, чтобы выражалось въ „большемъ“ числѣ преобладаніе *качества*, принятаго за положительное (градусы тепла, прибыль, разстояніе вправо), а не сравнивать число абсолютныхъ единицъ въ данныхъ числахъ, какъ пытаются дѣлать обыкновенно и приходятъ къ заключенію объ условности понятія „больше“ въ этомъ случаѣ (кажется, такое чтеніе предложено или данъ намекъ на него въ брошюрѣ г. Годнева объ отрицательныхъ числахъ).

Въ качествѣ другихъ примѣровъ укажемъ на *логариѳмическую линейку*, помощью которой механически производятся умноженіе и дѣленіе чиселъ съ точностью до трехъ первыхъ цифръ (впрочемъ точность зависитъ отъ размѣровъ прибора); приборъ этотъ и видоизмѣненіе его въ видѣ круга могутъ дать поводъ къ уясненію многихъ пунктовъ теоріи логариѳмовъ; затѣмъ на планиметръ (или агрометръ) Бибикова, который состоитъ изъ линейки, по одному ребру которой нанесенъ линейный масштабъ; приборъ можетъ быть изготовленъ изъ дерева, картона или вычерченъ на листѣ почтовой бумаги; онъ употребляется для механическаго опредѣленія площадей треугольниковъ и основывается на преобразованіи данныхъ треугольниковъ въ равномѣрные треугольники съ высотою, равною 2 единицамъ масштаба; тогда площадь послѣдняго треугольника выразится числомъ квадратныхъ единицъ, равнымъ числу линейныхъ единицъ въ его основаніи, которое измѣряется масштабомъ линейки; наконецъ упомянемъ еще приборъ для дѣленія круга на произвольное число частей, состоящій изъ стержня, раздѣленнаго на равныя части и кружка, который можетъ быть установленъ на любомъ дѣленіи, при оси вращенія, параллельной стержню; одинъ конецъ стержня укрѣпляется неподвижно, а другой можетъ описать полный кругъ, при этомъ кружекъ поворачивается нѣсколько разъ, сообразно съ тѣмъ номеромъ на стержнѣ, противъ котораго онъ установленъ; это позволяетъ отмѣчать произвольную часть отъ 360^0.

С. Полянскій (Симбирскъ).

(*Окончаніе слѣдуетъ*).

АРИѲМОМЕТРЪ ЧЕБЫШЕВА.

(*Окончаніе**).

Употребленіе ариѳмометра Чебышева.

1. Сложеніе и вычитаніе.

Для дѣйствій сложенія и вычитанія употребляется только приборъ для сложенія, который вынимается изъ машины (дѣлается это простымъ выдвиганіемъ его изъ подъ ариѳмометра) и ставится такъ, чтобы наблюдающій могъ читать цыфры, какъ на ободкахъ цилиндрической крышки, такъ и въ окнахъ.

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ №№ 205 и 207.

Прежде всего приборъ *ставятъ на нуль,* для чего:

1) Кнопку замка, находящагося на лѣвой сторонѣ прибора, двигаютъ въ ея прорѣзѣ къ концу, отмѣченному буквою F (fermé).

2) Начиная съ перваго праваго колеса прибора и постепенно переходя къ лѣвой сторонѣ, поворачиваютъ каждое движущее колесо R (фиг. 4) за зубцы, до тѣхъ поръ, пока оно не остановится само собою. При этомъ во всѣхъ окнахъ появятся нули.

3) Механизмъ дѣлаютъ свободнымъ, передвигая кнопку замка на лѣвой сторонѣ прибора къ концу, отмѣченному буквою L (libre).

Если это послѣднее дѣйствіе не исполнено, то, при помѣщеніи слагателя подъ общій приборъ, его нельзя плотно вдвинуть на свое мѣсто.

Сложеніе. Чтобы отложить какое-нибудь число на слагателѣ, принимаютъ крайнее правое цыфровое колесо для отложенія на немъ единицъ низшаго разряда, второе колесо для слѣдующаго разряда, и т. д., затѣмъ на каждомъ разрядѣ откладываютъ то число единицъ, которое находится въ этомъ разрядѣ. Для этого берутъ въ руку тотъ зубецъ движущаго колеса R (находящійся съ правой стороны цыфрового колеса), который находится на цыфрѣ, какую желаютъ отложить, и ведутъ его впередъ къ знаку 0.

Чтобы къ отложенному числу *приложить* другое слагаемое, прибавляютъ на каждомъ разрядѣ цыфровыхъ колесъ тѣ цыфры, какія находятся въ соотвѣтствующихъ разрядахъ второго слагаемаго.

Примѣръ. Требуется сложить

$$78352+5467.$$

1. Кнопку замка ставятъ на F, приводятъ движущія колеса къ концу; въ окнахъ получаются нули, затѣмъ кнопку двигаютъ на L.

2. На 5-мъ справа колесѣ зубецъ 7 двигаютъ къ 0; въ 5-мъ окнѣ получимъ число 7.

3. Такимъ-же образомъ на 4-мъ колесѣ цыфру 8 ведутъ къ нулю, въ соотвѣтствующемъ окнѣ получимъ 8.

4. Въ третьемъ окнѣ ставятъ цыфру 3.

5. Во 2-мъ окнѣ—цыфру 5.

6. Въ 1-мъ окнѣ—2.

Въ окнахъ получимъ общее число 78352.

7. Въ 1-мъ правомъ колесѣ снова зубецъ 7 двигаютъ къ нулю, получимъ въ окнѣ число 9 (т. е. 2+7).

8. На 2-мъ колесѣ двигаемъ къ 0 зубецъ 6, въ окнѣ получимъ 1 (т. е. 5+6=11), а единица высшаго разряда перейдетъ въ 3-е окно, гдѣ вмѣсто 3 получимъ 4.

9. Въ третьемъ колесѣ двигаемъ къ 0 зубецъ 4, въ окнѣ получимъ 8 (т. е. 4+4).

10. Въ 4-мъ колесѣ двигаемъ къ 0 зубецъ 5; въ окнѣ будетъ 3 (т. е. 8+5=13); а 1 перейдетъ на 5-е окно, гдѣ вмѣсто 7 получимъ 8.

Этимъ оканчивается сложеніе и въ окнахъ получится сумма:

$$78352+5467=83819.$$

Вычитаніе. Чтобы вычесть одно число изъ другого, надо сперва отложить на приборѣ уменьшаемое, точно такъ же, какъ мы поступали при отложеніи перваго слагаемаго, затѣмъ вычесть вычитаемое, а для этого сначала на разрядѣ единицъ, потомъ на разрядѣ десятковъ и т. д.

берутъ зубецъ, отмѣченный знакомъ 0, и ведутъ его назадъ къ той цыфрѣ, которую мы вычитаемъ.

Примѣръ. Найти разность

76835—4753.

1. Кнопку замка ставятъ на F, поворачиваютъ цыфровыя колеса на 0 и кнопку замка ставятъ опять на L.

2. Откладываютъ на приборѣ уменьшаемое; въ окнахъ получимъ число 76835.

3. На первомъ справа колесѣ зубецъ 0 ведутъ вверхъ къ числу 3; въ окнѣ вмѣсто 5 получимъ 2 (т. е. 5—3).

4. На второмъ колесѣ зубецъ 0 ставятъ противъ цыфры 5; въ окнѣ получимъ 8, а въ третьемъ окнѣ вмѣсто 8 останется 7.

5. На 3-емъ колесѣ зубецъ 0 ставятъ на 7; въ окнѣ будетъ 0.

6. На 4-мъ колесѣ зубецъ 0 ставятъ на 4; получится въ окнѣ 2.

Въ 5-мъ окнѣ остается прежняя цыфра 7. Во всѣхъ окнахъ получится разность:

76835—4753=72082.

Умноженіе и дѣленіе.

Установка на нуль.—Приборъ для умноженія ставится передъ производящимъ дѣйствіе такъ, чтобы цыфры пришлись противъ него въ нормальномъ положеніи. При этомъ рукоятка будетъ находиться съ правой стороны; и ее вынимаютъ изъ углубленія, въ которомъ она обыкновенно помѣщается.

Чтобы поставить приборъ въ *первоначальное положеніе*, т. е. заставить подвижную раму плотно подойти къ неподвижной части, слѣдуетъ:

1. Кнопку замка на правой сторонѣ прибора подвинуть къ заднему концу прорѣза, отмѣченному буквою R (retour).

2. Вращать рукоятку въ сторону движенія часовыхъ стрѣлокъ, что впрочемъ на приборѣ указано особою стрѣлкою съ буквою R.

3. Когда рамка придетъ вплотную къ неподвижной части, снова подвинуть кнопку замка къ началу прорѣза, отмѣченному буквою A (aller).

Отложеніе числа на индикаторъ.—*Индикаторомъ* называется цилиндрическій кожухъ или крышка I (фиг. 20) съ зубчатыми прорѣзами, вдоль которыхъ двигаются кнопки. При употребленіи прибора индикаторъ долженъ находиться съ правой стороны наблюдателя.

Нажавъ пальцемъ внизъ на кнопку *j*, утвержденную на самомъ переднемъ краѣ кожуха, даютъ этому кожуху небольшое вращеніе впередъ, черезъ что всѣ кнопки, служащія для того, чтобы отмѣчать ими цыфры на прорѣзахъ, выйдутъ изъ своихъ зубчатыхъ углубленій и могутъ свободно двигаться по прорѣзамъ.

Противъ каждой зубчатой впадины прорѣза написаны цыфры въ слѣдующемъ порядкѣ, читая слѣва направо: 0,1,2....9. Самые прорѣзы также перенумерованы; на переднемъ прорѣзѣ стоитъ $n^0$1, на заднемъ находится $n^0$9.

На кожухѣ отмѣчаютъ данное число такимъ образомъ: цыфру единицъ высшаго разряда отмѣчаютъ кнопкою на прорѣзѣ $n^0$1, передвинувъ кнопку противъ требуемой цыфры; цыфру слѣдующаго разряда—

на прорѣзѣ $n^{0}2$ и т. д., такъ что отмѣченныя на прорѣзахъ цыфры дадутъ данное число, написанное въ обыкновенномъ порядкѣ, если встать сбоку прибора, противъ рукоятки.

Всѣ тѣ кнопки, которыя не пришлось сдвинуть съ мѣста, передвигаютъ на 0.

Затѣмъ двигаютъ кожухъ на свое мѣсто, надавивъ на кнопку j въ обратную сторону (т. е. вверхъ), отчего всѣ кнопки снова западутъ въ зубчатыя впадины.

Отложенiе числа на счетчикѣ.—*Счетчикомъ* называется цилиндрическая крышка D съ семью круговыми прорѣзами. Подъ счетчикомъ видна *задвижка* G, скользящая вправо и влѣво

Задвижку передвигаютъ вправо до конца, на счетчикѣ отмѣчаютъ число, для чего двигаютъ кнопки d по прорѣзамъ, помѣщая ихъ противъ соотвѣтствующихъ цыфръ; первый лѣвый прорѣзъ соотвѣтствуетъ наивысшему разряду единицъ, второй слѣдующему и т. д.

Затѣмъ, наклоняютъ задвижку впередъ, надавливая на имѣющiйся на ней выступъ, и тщательно *приводятъ задвижку* G *къ лѣвому концу ея хода.* Такое передвиженiе задвижки при началѣ умноженiя выражается словомъ *подчеркиванiе*, по аналогiи съ проведенiемъ черты подъ множителемъ, которое мы дѣлаемъ, приступая къ умноженiю.

Умноженiе.—Какъ приборъ для сложенiя, такъ и часть, назначенную для умноженiя, ставятъ въ *первоначальное положенiе*, т. е. на нули, и первый приборъ вставляютъ вплотную подъ второй.

Множимое число отмѣчаютъ кнопками на кожухѣ индикатора, а множителя отмѣчаютъ на счетчикѣ и тщательно *подчеркиваютъ*, т. е. двигаютъ задвижку влѣво до конца ея хода, наклоняя ея выступъ; тогда палецъ ея упрется на первое слѣва направляющее колесо счетчика.

Убѣдившись, что кнопка съ правой стороны подвинута совершенно къ концу хода А, поворачиваютъ рукоятку въ сторону противоположную движенiю часовыхъ стрѣлокъ (это направленiе отмѣчено стрѣлкою и буквою А) до тѣхъ поръ, пока *всѣ кнопки кожуха* (*индикатора*) *не придутъ въ первоначальное положенiе и винты подвижной рамы придутъ въ вращенiе.*

Произведенiе получается въ окнахъ прибора для сложенiя.

Примѣръ. Умножить два числа:

$$75238 \times 529.$$

1. Приводятъ приборъ въ *первоначальное положенiе.*
2. Число 75238 отмѣчаютъ кнопками на кожухѣ индикатора.
3. Задвижку двигаютъ вправо до конца.
4 На крышкѣ счетчика отмѣчаютъ множителя 529.
5. *Подчеркиваютъ* задвижкою, т. е., наклонивъ ее за выступъ, подвигаютъ влѣво *до конца.*
6. Рукоятку вращаютъ по направленiю стрѣлки А до тѣхъ поръ, пока всѣ три кнопки счетчика не придутъ на 0, и когда послѣ этого винты станутъ вращаться,—прекращаютъ вращенiе.
7. Выдвинувъ приборъ для сложенiя, читаютъ въ окнахъ произведенiе: 39800902.

Дѣленiе.—Для раздѣленiя одного числа на другое поступаютъ такимъ образомъ: въ окнахъ прибора для сложенiя откладываютъ число, составляющее *ариѳметическое дополненіе дѣлимаго*, т. е. число, получаемое отъ вычитанія каждой цыфры дѣлимаго изъ девяти (а крайней правой изъ 10). При отложеніи этого *дополненія* надо оставить на первомъ слѣва цыфровомъ колесѣ нуль и единицы высшаго разряда помѣстить на второмъ колесѣ.

Послѣ этого приборъ для сложенія вставляютъ вплотную подъ приборъ для умноженія, поставленный на нулѣ. Дѣлитель отмѣчается кнопками на кожухѣ индикатора, а всѣ кнопки на крышкѣ счетчика передвигаютъ на 9, и тщательно *подчеркиваютъ* задвижкой.

Затѣмъ вращаютъ рукоятку, какъ и при умноженіи, по направленію стрѣлки А, прекращая вращеніе для каждаго разряда единицъ въ тотъ моментъ, когда на приборѣ для сложенія получится результатъ, послѣ котораго еще одинъ оборотъ (т. е. еще новое приложеніе отмѣченнаго па кожухѣ индикатора числа) сдѣлаетъ сумму больше 1000000000, Если этотъ моментъ былъ пропущенъ, то достаточно сдѣлать одинъ оборотъ рукояткою въ обратную сторону.

Потомъ надавливаютъ рукою выступъ задвижки, наклоняютъ ее впередъ, такъ чтобы палецъ задвижки перешелъ то колесо счетчика, съ которымъ онъ былъ въ прикосновеніи, и въ то же время вращаютъ рукоятку, чтобы подвинуть посредствомъ винтовъ влѣво подвижную раму, а вправо задвижку. Какъ только задвижка перешла первое колесо, ставятъ ее въ нормальное положеніе, чтобы палецъ уперся въ бокъ слѣдующаго колеса, съ которымъ поступаютъ такъ же, какъ и съ первымъ колесомъ, т. е. вращаютъ рукоятку, останавливаясь послѣ каждаго оборота, для наблюденія за полученнымъ въ окнахъ результатомъ, и такъ поступаютъ далѣе.

Цыфры, противъ которыхъ къ концу дѣйствія остановились кнопки на крышкѣ счетчика, будутъ дополненіями до 9-ти всѣхъ цыфръ остатка.

Запятую слѣдуетъ поставить послѣ цыфры того разряда, взятаго на счетчикѣ съ лѣвой стороны, какую даетъ разность между числомъ цыфръ дѣлимаго и числомъ цыфръ дѣлителя, увеличеннаго единицей.

Чтобы лучше уяснить себѣ эту операцію, приведемъ численный примѣръ.

Примѣръ. Раздѣлить 236548 на 3141.

1. На приборѣ для сложенія откладывается *ариѳметическое дополненіе* дѣлимаго, оставляя свободнымъ первое слѣва окно, т. е. въ окнахъ будетъ отложено слѣдующее число.

0763452000.

2. Приборъ для сложенія вставляютъ вплотную подъ приборъ для умноженія, поставленный на нулѣ.

3. На кожухѣ индикатора отмѣчаютъ дѣлителя: 3141.

4. На счетчикѣ всѣ кнопки передвигаютъ на 9 и *подчеркиваютъ* задвижкой.

5. Одинъ оборотъ зубчатаго вала по направленію буквы А, сдѣланный тогда, когда задвижка находится въ прикосновеніи съ первымъ колесомъ, дастъ число большее 1.000.000.000, потому что при одномъ оборотѣ вала число 3141 будетъ приложено къ 7634), поэтому надо пропустить первое колесо и заставить задвижку придти въ прикосновеніе со вторымъ колесомъ; для этой цѣли, отогнувъ задвижку за вы-

ступъ, передвигаютъ подвижную раму и задвижку вращеніемъ рукоятки на одно мѣсто.

6. Когда задвижка подойдетъ ко второму колесу, ставятъ ее въ нормальное положеніе, чтобы палецъ прикасался ко второму колесу; продолжаютъ вращать рукоятку до тѣхъ поръ, пока въ окнахъ, отъ приданія къ слѣдующей части даннаго числа (т. е. къ части 6345) нѣсколько разъ числа 3141, не получится въ общемъ число, хотя и меньше 1.000.000.000, но ближайшее къ нему (большее). Послѣ трехъ оборотовъ рукоятки въ окнахъ получимъ:

0983322000;

если бы мы сдѣлали четвертый оборотъ, то, отъ приданія 3141 къ части 8332, получилось бы общее число больше 1.000.000.000.

7. Отогнувъ задвижку, передвинувъ ее и раму еще на одно мѣсто, и, приведя задвижку въ прикосновеніе съ третьимъ колесомъ, вращаютъ рукоятки. Теперь происходитъ при каждомъ оборотѣ рукоятки сложеніе числа 3141 съ частью 3322 написаннаго выше числа. Послѣ пяти оборотовъ рукоятки все число въ окнахъ будетъ;

0999027000.

Больше нельзя придавать къ этому числу число 3141, такъ какъ получится сумма выше 1000000000.

8. Передвигаемъ раму и задвижку еще на одно мѣсто, такъ чтобы задвижка прикасалась къ четвертому колесу. При дальнѣйшемъ вращеніи рукоятки мы дѣлаемъ столько разъ сложеніе числа 3141 съ частью выше написаннаго числа 0270, сколько дадимъ оборотовъ рукояткою. Послѣ трехъ оборотовъ, получимъ въ окнахъ число;

0999969300.

Положимъ, что на этомъ мы прекратили дѣйствіе. Тогда *остатокъ* будетъ дополненіе до 9-ти всѣхъ цыфръ послѣдняго числа, т. е. 307, а на счетчикѣ читаемъ число:

9246999,

вычитая которое изъ 999999999, получимъ *частное*, т. е.:

0753000.

Такъ какъ въ дѣлимомъ двумя цыфрами больше, чѣмъ въ дѣлителѣ, то надо поставить запятую послѣ третьей цыфры, слѣдовательно частное будетъ: 75,3.

Укладка рукоятки.—Чтобы рукоятка не мѣшала закрывать приборъ крышкою, надо отогнуть ее; для этого нажимаютъ пальцемъ на пружину Q (фиг. 19), конецъ которой виденъ на дискѣ, вращающемся вмѣстѣ съ рукояткою, и отгибаютъ рукоятку въ гнѣздо, находящееся съ боку ея.

Разсмотрѣвъ подробно устройство и примѣненіе ариѳмометра Чебышева, мы находимъ въ немъ слѣдующія достоинства.

1) Оригинальное устройство, совершенно отличающее приборъ отъ его прототипа — ариѳмометра Лейбница, къ которому подходятъ всѣ остальные ариѳмометры (за исключеніемъ ариѳмометра Зеллинга).

2) Особенное устройство для перенесенія десятковъ настолько совершенное, что *приборъ безусловно никогда не можетъ дать отказа или ошибки,* которыя во всѣхъ остальныхъ машинахъ (кромѣ машины

Зеллинга) легко могутъ произойти, такъ какъ эта часть машины вездѣ имѣетъ спиральныя пружины, легко ломающіяся и ослабѣвающія (точно такъ же и во всѣхъ другихъ частяхъ прибора нѣтъ вовсе спиральныхъ пружинъ). Поэтому, ариѳмометръ Чебышева *представляетъ* собой *безусловно точную ариѳметическую машину.*

3) Конструкція машины представляетъ замѣчательное механическое устройство, при которомъ остроумно примѣняются одни и тѣ же пріемы для исполненія разнообразныхъ дѣйствій.

4) *Часть машины, назначенная для сложенія*, будучи взятая отдѣльно, *представляетъ собою лучшую изъ всѣхъ машинъ по своей простотѣ, точности и скорости исполненія на ней дѣйствій сложенія и вычитанія.*

Къ недостаткамъ машины слѣдуетъ отнести: сложность устройства, а вслѣдствіе этого высокую стоимость той части машины, которая назначена для умноженія и дѣленія, и сложное примѣненіе машины для дѣйствія дѣленія.

Въ заключеніе замѣтимъ, что другая оригинальная машина — Зеллинга, въ устройствѣ механизма для перенесенія десятковъ составляетъ простую копію съ механизма Чебышева.

Для составленія предыдущей статьи кромѣ указанныхъ въ ней печатныхъ сочиненій послужили еще слѣдующія дополнительныя разъясненія, присланныя академикомъ П. Л. Чебышевымъ автору статьи вмѣстѣ съ фотографіями прибора.

Дополнительныя разъясненія объ устройствѣ ариѳмометра.

Первыя двѣ фотографіи (№ 1, 2) даютъ вполнѣ ясное изображеніе фигуръ 4, 5.

Фотографія № 3 представляетъ видъ того же съ боку.

Фотографія № 4 представляетъ *ящикъ*, въ которомъ помѣщается механизмъ, изображенный на фигурѣ 5. Здѣсь видны: *arrets de ressors*, о которыхъ говорится въ концѣ страницы 3-й въ статьѣ д'Окань. 2) механизмъ, служащій для приближенія и удаленія *грабли*, о чемъ говорится тамъ же въ началѣ страницы 4.

На фотографіи № 5 изображена эта *грабля.* № 6 даетъ ясное изображеніе того, что не ясно на фигурѣ 18.

№ 7 (фиг. 19) видъ того же при наклонномъ положеніи. На фотографіи № 8 видна система зубчатыхъ колесъ, при помощи которой вращеніе одной и той же рукоятки производитъ или вращеніе *барабана* вмѣстѣ съ зубчатымъ цилиндромъ, или вращеніе *винтовъ*, которые видны на фотографіи № 7 и о которыхъ говорится на страницѣ 6 статьи д'Окань.

Фотографія № 9 представляетъ *крышку*, о которой говорится въ выноскѣ на стран. 4 (см. фиг. 4) Эта крышка обращена кверху внутреннею стороною, гдѣ видны *вилки*, служащія для передвиженія колесъ P, о которыхъ говорится на стр. 4 и 5.

На послѣдней фотографіи (№ 10) находится изображеніе *покрышки счетчика* D (фиг. 20).

Эта покрышка обращена кверху внутреннею стороною, гдѣ видны *roues directrices,* о которыхъ говорится на стр. 6 и за которыя цѣпляется своимъ пальцемъ задвижка (curseur), когда она не должна двигаться по сказанному на стран. 8.

Такъ какъ эта задвижка при выполненіи умноженія подвигается направо, то при началѣ этого дѣйствія ее нужно отодвинуть налѣво до конца ея хода, гдѣ она своимъ пальцемъ цѣпляется за послѣднее лѣвое колесо счетчика. Такое передвиженіе *задвижки* при началѣ умноженія и выражается словомъ *souligner* по аналогіи съ проведеніемъ черты подъ *множителемъ*, которое мы дѣлаемъ, приступая къ умноженію.

Относительно *второй рукоятки*, о которой говорится на стр. 9 *), я долженъ сказать, что она оказалась излишнею, такъ какъ по исправленіи задвижки (curseur) машина стала дѣйствовать вполнѣ удовлетворительно съ одною рукояткою.

ПИСЬМО ВЪ РЕДАКЦІЮ.

Многоуважаемый

Г. Редакторъ!

Не найдете ли возможнымъ дать мѣсто въ издаваемомъ Вами журналѣ нижеслѣдующимъ строкамъ относительно погрѣшностей, вкравшихся нечаяннымъ образомъ въ составленный мною „Сборникъ стереометрическихъ задачъ для учениковъ VIII класса гимназій“:

напечатано:	*слѣдуетъ*:
въ зад. № 6—пропущенъ отвѣтъ	$V=\frac{a^2b.\sin C}{12\sin A}$, гдѣ C и A опредѣл. рѣш-мъ $\triangle$-ка.
въ зад. № 18—отвѣтъ вѣренъ, но можетъ быть и въ друг. видѣ:	или $S=\frac{3k^2\operatorname{tg}^2 2\psi.\sin 60^0}{2\cos\varphi_1}$, гдѣ $\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{\operatorname{cotg}\psi}{\sin 30^0}$
въ зад. № 22 $x=30^0 24'$	$x=31^0 24'$
въ зад. № 28—отвѣтъ вѣренъ	или $S=\frac{4\pi b^2.\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}}$
въ зад. 33—(не упрощ.) $\varrho=\frac{a.\operatorname{tg}\beta.\sin\varphi}{4\sin 45^0\cos^2\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)}$	$\varrho=\frac{a.\cos\varphi}{4\cos^2\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)}$

*) Д'Оканъ въ своемъ описаніи (стр. 9) говоритъ, что слѣдовало бы вмѣсто одной рукоятки сдѣлать двѣ: одну для производства дѣйствія умноженія, другую для отодвиганія механизма на одно мѣсто, прибавляя, что самъ П. Л. Чебышевъ согласился съ его взглядомъ. Объ этой то рукояткѣ и говоритъ уважаемый академикъ. *В. ф. Б.*

въ зад. № 96—отв. $S = 7{,}5\pi R^2 . \sin^2 \frac{\alpha}{4} = 158{,}318$ кв. д.—ошибочный; слѣдуетъ быть:

$$S = 12\pi R^2 . \sin^2 \frac{\alpha}{4} \cdot \cos^2\varphi = 241{,}156 \text{ кв. д. гдѣ } \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{4}.$$

въ зад. № 124 (по недосмотру отв. помѣщ. изъ друг. зад.) $y = \frac{\mathrm{tg}A . \sin(A+\varphi)}{\cos(A-\varphi)}$, гдѣ $\mathrm{tg}\varphi = 2$	$y = \mathrm{tg}A$
въ зад. № 135 $V = \pi m^2 n \cos \frac{\delta}{4} \cos^4\varphi = 1866{,}04$	$V = \pi m^2 n \cos \frac{\delta}{4} \cos^2\varphi = 2416{,}5$

въ зад. № 138 отвѣтъ вѣренъ, но при болѣе удачномъ преобразованiи можетъ быть и такой: $S = 8\pi a^2 \cos^3 18^0$.

Примите и проч.

Преподаватель Марiампольской гимназiи

Ив. Бѣляевъ.

ЗАДАЧИ.

№ 182. Даны двѣ прямыя, на нихъ по точкѣ *A* и *B*, и еще внѣшняя точка *C*. Найти на прямыхъ по точкѣ *X* и *У* такъ, чтобъ отношенiя *AX:BУ* и *CX:CУ* были данной величины.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 183. Даны двѣ окружности, на нихъ по точкѣ *A* и *B*, и еще внѣшняя точка *C*. Провести черезъ точку *C* новую окружность, встрѣчающую данныя окружности въ *X* и *У* такъ, чтобъ дуги *AX* и *BУ* были подобны и чтобъ отношенiе хордъ *CX:CУ* было данное.

NB. Подобныя дуги содержатъ одинаковое число градусовъ.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 184. Найти углы треугольника *ABC* по даннымъ отношенiямъ:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n} \text{ и } \frac{BC}{AE} = \frac{p}{q},$$

гдѣ *CD* и *AE* суть высоты, опущенныя соотвѣтственно на стороны *AB* и *BC*.

А. Бачинскiй (Холмъ).

№ 185. Построить треугольникъ по данной сторонѣ b, по суммѣ двухъ другихъ сторонъ $a + c$ и по суммѣ $h_a + h_c$ высотъ, опущенныхъ на эти стороны.

Л. и *Р.* (ученики Кiево-Печерской гимназiи).

№ 186. Въ пятомъ отдѣлѣ „Собранiя геометрическихъ теоремъ и задачъ“ Е. Пржевальскаго помѣщена слѣдующая задача (III-е изд. 1876 г. № 197):

„Построить треугольникъ по высотѣ и радіусамъ R и R_1 внѣвписанныхъ круговъ, касающихся сторонъ, прилежащихъ къ высотѣ“.

Показать, что задача эта либо неопредѣленная, либо вовсе не имѣетъ рѣшеній.

И. Ок—чъ (с. Голле).

№ 187. Рѣшить уравненіе

$$x^2(1-x)-2=0.$$

Ст. Окуличъ (Варшава).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 533 (2 сер.). Рѣшить систему:

$$\frac{1}{by}+\frac{1}{cz}=\frac{a+x}{ax(a-x)},$$

$$\frac{1}{cz}+\frac{1}{ax}=\frac{b+y}{by(b-y)},$$

$$\frac{1}{ax}+\frac{1}{by}=\frac{c+z}{cz(c-z)}.$$

Вычитая второе уравненіе изъ перваго и третье изъ второго, получимъ:

$$\frac{1}{by}-\frac{1}{ax}=\frac{a+x}{ax(a-x)}-\frac{b+y}{by(b-y)};\ \frac{1}{cz}-\frac{1}{by}=\frac{b+y}{by(b-y)}-\frac{c+z}{cz(c-z)},$$

откуда

$$x(a-x)=y(b-y)=z(c-z). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Сложивъ всѣ данныя уравненія, получимъ:

$$\frac{1}{ax}\left(2-\frac{a+x}{a-x}\right)+\frac{1}{by}\left(2-\frac{b+y}{b-y}\right)+\frac{1}{cz}\left(2-\frac{c+z}{c-z}\right)=0,$$

или

$$\frac{a-3x}{ax(a-x)}+\frac{b-3y}{by(b-y)}+\frac{c-3z}{cz(c-z)}=0,$$

откуда, на основаніи уравненій (1), найдемъ:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Представивъ уравненія (1) въ видѣ

$$\frac{\frac{x}{a}-\frac{x^2}{a^2}}{\frac{y}{b}-\frac{y^2}{b^2}}=\frac{b^2}{a^2};\ \frac{\frac{z}{c}-\frac{z^2}{c^2}}{\frac{y}{b}-\frac{y^2}{b^2}}=\frac{b^2}{c^2},$$

положимъ:

$$\frac{x}{a}=\alpha,\ \frac{y}{b}=\beta,\ \frac{z}{c}=\gamma,\ \frac{b^2}{a^2}=m,\ \frac{b^2}{c^2}=n;$$

тогда:

$$\alpha+\beta+\gamma=1;$$

$$m+n=\frac{\alpha+\gamma-(\alpha^2+\gamma^2)}{\beta(1-\beta)}=\frac{1-\beta-(1-\beta)^2+2\alpha\gamma}{\beta(1-\beta)}; \quad . \quad . \ (2)$$

$$m-n=\frac{\alpha-\gamma-(\alpha^2-\gamma^2)}{\beta(1-\beta)}=\frac{(\alpha-\gamma)[1-(\alpha+\gamma)]}{\beta(1-\beta)}=\frac{\alpha-\gamma}{1-\beta}.$$

Возвысивъ послѣднее уравненіе въ квадратъ, получимъ:

$$(m-n)^2(1-\beta)^2=(\alpha^2+\gamma^2)-2\alpha\gamma=(1-\beta)^2-4\alpha\gamma,$$

откуда

$$\alpha\gamma=\frac{(1-\beta)^2[1-(m-n)^2]}{4}.$$

Подставивъ это выраженіе вмѣсто $\alpha\gamma$ въ уравненіе (2), получимъ:

$$m+n=\frac{2(1-\beta)-2(1-\beta)^2+(1-\beta)^2[1-(m-n)^2]}{2\beta(1-\beta)}.$$

Сокративъ это уравненіе на $1-\beta$, т. е. устранивъ рѣшеніе $\beta=1$, $y=b$, опредѣлимъ отсюда

$$\beta=\frac{1-(m-n)^2}{2(m+n)-1-(m-n)^2},$$

а слѣдовательно

$$y=b\beta=b\,\frac{a^4c^4-b^4(a^2-c^2)^2}{2a^2b^2c^2(a^2+c^2)-a^4c^4-b^4(a^2-c^2)^2}.$$

Точно такъ же найдемъ:

$$x=a\,\frac{b^4c^4-a^4(b^2-c^2)^2}{2a^2b^2c^2(b^2+c^2)-b^4c^4-a^4(b^2-c^2)^2},$$

$$z=c\,\frac{a^4b^4-c^4(a^2-b^2)^2}{2a^2b^2c^2(a^2+b^2)-a^4b^4-c^4(a^2-b^2)^2}.$$

С. Адамовичъ (с. Спасское); *П. Ивановъ* (Одесса); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 28-го Апрѣля 1895 г.
„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

MATHESIS.

1894. — № 12.

Nouvelle propriété caractéristique des courbes de Bertrand, par M. *Césaro*. Касательная, нормаль и бинормаль въ какой нибудь точкѣ кривой образуютъ такъ называемый *основной трегранникъ*. Авторъ задается отысканіемъ прямой, неизмѣнно связанной съ основнымъ трегранникомъ кривыхъ *Bertrand'а* и нормальной къ траэкторіямъ всѣхъ ея точекъ. Оказывается, что въ общемъ случаѣ этому условію удовлетворяютъ всѣ прямыя, перпендикулярныя къ касательной и находящіяся въ плоскости спрямленія кривой. Для винтовой линіи, начерченной на произвольной цилиндрической поверхности, вопросу удовлетворяютъ только параллели нормальной плоскости, пересѣкающія образующую цилиндрической поверхности. Въ случаѣ цилиндра вращенія эти прямыя суть бинормали всѣхъ винтовыхъ линій, имѣющихъ то же направленіе и тотъ же шагъ и начерченныхъ на цилиндрахъ вращенія, имѣющихъ общую ось съ даннымъ цилиндромъ.

Извѣстно, что на главной нормали въ точкѣ M кривой (M) существуетъ точка M_1, описывающая другую кривую *Bertrand'а* (M_1), имѣющую общія главныя нормали съ данной кривой. Обозначимъ черезъ D и D_1 прямыя, проходящія черезъ M и M_1 и соотвѣтственю параллельныя бинормалямъ кривыхъ (M_1) и (M). Характеристичное свойство кривыхъ Bertrand'а, найденное M. Césaro, состоитъ въ томъ, что *всякая прямая, неизмѣнно связанная съ основнымъ трегранникомъ и пересѣкающая прямыя* D *и* D_1, *нормальна къ траэкторіямъ всѣхъ ея точекъ*.

Sur quelques quadrilatères spéciaux, par M. *J. Neuberg*. *Псевдоквадратомъ* называется четыреугольникъ, діагонали котораго равны и взаимно перпендикулярны. Четыреугольникъ съ равными діагоналями называется изодіагональнымъ, четыреугольникъ съ перпендикулярными діагоналями называется *ортодіагональнымъ*. Медіаной четыреугольника называется прямая, соединяющая средины двухъ противоположныхъ сторонъ его. Медіаны чет-ка служатъ діагоналями параллелограмма; пересѣченіе ихъ называется *средней точкой* чет-ка.

Въ ортодіагональномъ чет-кѣ сумма квадратовъ двухъ противоположныхъ сторонъ равна суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ. Обратно, чет-къ, обладающій этимъ свойствомъ, есть ортодіагональный. Медіаны ортодіагональнаго чет-ка равны.

Въ изодіагональномъ чет-кѣ медіаны взаимно перпендикулярны и параллельны биссекторамъ угловъ между діагоналями.

Медіаны псевдоквадрата равны и взаимно перпендикулярны.

На основаніи этихъ свойствъ доказываются слѣдующія теоремы.

1) Если на сторонахъ ортодіагональнаго чет-ка построить подобные равнобедренные тр-ки, то вершины этихъ тр-въ будутъ вершинами изодіагональнаго чт-ка, діагонали котораго симметрично направлены относительно одной изъ діагоналей ортодіагональнаго чет-ка.

2) Если на сторонахъ изодіагональнаго чет-ка построить равнобедренные подобные тр-ки, то вершины этихъ тр-въ будутъ вершинами ортодіагональнаго чет-ка, діагонали котораго параллельны медіанамъ изогональнаго чет-ка.

Приводя въ совпаденіе двѣ вершины A и D чет-ка ABC, получимъ слѣдующія свойства тр-ка ABC.

Пусть E_1, F_1, G_1 суть вершины подобныхъ равнобедренныхъ тр-въ, построенныхъ на сторонахъ AB, BC, CA тр-ка ABC. Если эти тр-ки суть прямоугольные, то прямыя AF_1 и E_1G_1, BG_1 и E_1F_1, CE_1 и F_1G_1 попарно равны и перпендикулярны.

Если $AB = AC$, то прямыя AF_1 и E_1G_1 взаимно перпендикулярны независимо отъ формы тр-въ ABE_1, BCF_1, CAG_1.

Если уголъ BAC прямой, то прямыя AF_1 и E_1G_1 равны.

Sur un théorème d'arithmétique; par M. *V. Jamet*. Извѣстно, что произведеніе p цѣлыхъ послѣдовательныхъ чиселъ дѣлится безъ остатка на произведеніе первыхъ p чиселъ. M. Jamet доказываетъ это независимо отъ теоріи сочетаній слѣдующимъ образомъ. Положивъ

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.\,2.\,3\ldots p}=C_m^p$$

и замѣтивъ, что

$$C_m^p=\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.\,2.\,3\ldots(p-1)}\cdot\left(1+\frac{m-p}{p}\right),$$

напишемъ равенства:

$$C_m^p=C_{m-1}^{p-1}+C_{m-1}^p,$$

$$C_{m-1}^p=C_{m-2}^{p-1}+C_{m-2}^p,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{p+1}^p=C_p^{p-1}+C_p^p;$$

сложивъ ихъ, получимъ

$$C_m^p=C_{m-1}^{p-1}+C_{m-2}^{p-1}+\cdots+C_p^{p-1}+1;$$

такъ какъ C_{m-1}^1 есть цѣлое число при всякомъ m, то изъ равенства этого заключаемъ послѣдовательно, что $C_m^2, C_m^3, \ldots, C_m^p$ суть цѣлыя числа.

Bibliographie. Essais de Psychologie et de Métaphysique positives.—Arithmétique graphique.—Les espaces arithmétiques hypermagiques. Par M. *G. Arnoux*. Paris. 1894. (Краткая рецензія).

Solutions de questions proposées. №№ 880, 887, 924, 926.

Questions d'examen. №№ 662—665.

Questions proposées. №№ 992—1000. *Д. Е.*

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ ИТАЛЬЯНСКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Математика.

Neppi Modona dott. *Ang.* Un'applicazione della transformazione funzionale di Laplace e della sua inversa: nota. Bologna. 8^0. p. 12.

Pasquale (De) dott. *Vinc.* Sul luogo dei punti dell'ellissoide pei quali la curvatura di Gauss è constante: memoria. Messina. Antonio Trimarchi. 8^0. p. 30.

Salamitto, prof. *G.* La teoria delle parallele spiegata agli studiosi dei primi elementi di geometria. Mondovi. 8^0. p. 44.

Andriani, *A.* Elementi di Geometria Euclidea esposti con nuovo metodo, applicando il principio di dualità, ad uso dei Licei e degli Istituti tecnici secondo gli ultimi programmi. 2-a ediz. quasi rifatta secondo i criterii di distinti professori. 8^0. Napoli, Pellerano. L. 6.

Andriani, *A.* Elementi di Algebra ad uso dei Licei e degli Istituti tecnici. p. 374. Napoli. Pellerano. L. 4.

Marcialis prof. *Efisio.* Formula per la somma delle n incognite in un-sistema di n equazioni di primo grado. Milano. 8^0. p. 7.

Montesano Dom. Su di un complesso di rette di terzo grado. Bologna. 4^0. p. 31.

Naccari Gius. Deduzione delle principali formole relative alla curvatura delle superficie in generale e dello sferoide in particolare, con applicazione al meridiano di Venezia. Venezia 8^0. p. 45.

Pieri Mario. Di due proprietà caratteristiche per superficie elicoidali: nota. Lucca, 8^0, p. 7.

Bianchi, *L.* Lezioni di geometria differenziale, prima metà. 8^0, p. 256. Pisa, Spoerri. L'opera completa L. 20.

Enriques Fed. Ricerche di geometria sulle superficie algebriche: metoria. Torino, Carlo Clausen. 4^0, p. 64.

Cesáro, *E.* Corso di analisi algebrica con introduzione al calcolo infinitesimale. 8^0, p. 508. Torino, Bocca. L. 12.

Fano, *Gino.* Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi di uno spazio qualunque: memoria. Torino, Carlo Clausen, 4^0, p. 50.

Moltame, *V.* Sulle equazioni abeliane reciproche le cui radici si possono rappresentare eon $x, \vartheta x, \vartheta^2 x, \ldots \vartheta^{n-1} x$: memoria I Torino, Carlo Clausen, 4^0, p. 44.

Carlini dott. *Lu.* Saggio d'una teoria generale delle progressioni aritmetiche. Treviso. 8^0, p. 28.

Azzarelli prof. *Mattia.* Alcuni luoghi geometrici: nota. Roma. 4^0, p. 42.

Franchetti ing. *G.* Cenni storici sulle matematiche elementari. Sassari, 8^0, p. 68.

Fais prof. *Ant.* Sopra alcuni casi d'integrazione delle equazioni differenziali totali di 1^0 ordine e grado a tre variabili: nota. Bologna. 8^0, p. 10.

Vivanti Giulio. Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica: saggio storico. Mantova, 8^0, p. 134 con tavola. L. 3.

Ajello, *C.* Lezioni pratiche di geometria descrittiva per la rappresentazione delle figure piane e dei solidi. 16^0, con 15 tav. Palermo, G. Clausen di A. Reber. L. 3.

Bianchi, *L.* Lezioni di geometria differenziala. 8^0, p. 544. Pisa, Spoerri. L. 20.

D'Arcais. Corso di calcolo infinitesimale. Vol. II: Integrale. 8^0. Padova, Draghi. L. 11.

Lazzeri G. Trattato di geometria analitica con 82 fig. intercalate nel testo. 8^0. Livorno, Giusti. L. 10.

Antilli prof. *A.* Disegno geometrico. Milano, Ulrico Hoepli. 16^0, fig. p. vij, 85, con ventisei tavole.

Anzilotti, prof *Fr.* Trattato di analisi algebrica, ad uso degli studenti delle università d'Italia. Parte I (Analisi algebrica elementare) da servire anche come libro di testo per gli istituti tecnici, per le scuole militari, pei licei, con apposita appendice contenente le applicazioni delle equazioni elementari alla risoluzione dei problemi numerici, geometrici e di fisica e le applicazioni elementari dei logaritmi. Napoli. 8^0, p. viiij, 308.

Aschieri prof. *Ferd.* Geometria proiettiva del piano e della stella. Seconda edizione corretta ed ampliata del Manuale di geometria proiettiva. Milano, Ulrico Hoepli. 16⁰, p. vj, 228.

Burali-Forti prof. *C.* Logica matematica. Milano, Ulrlco Hoepli. 16⁰, p. 158.

Gallo, *N.* Lezioni di trigonometria rettilinea. 8⁰ fig. p. 211. Aversa, Panfilo Castaldi. L. 4.

Sasso dott. *Modestino.* Tavola dei quadrati e cubi, delle radici qnadrate e cubiche da 1 a 500. Velletri, 4⁰, p. 12. Cent. 60.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ АНГЛІЙСКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Химія.

Bloxam, *C. L.* Metals: their Properties and Treatment. Partly re-written and augmented by Alfred K. Hungtingdon. New edit. (reprinted) 12mo. pp. 442. (Text-Books of Science) Longmans. 5 s.

Crookes, *W.* Select Methods in Chemical Analysis. (chiefly Inorganic). 3 rd edit. 8vo. Longmans. 21 s. net.

Discovery of Oxigen. Part I.: Experiments by Joseph Priestley, 1775, pp. 56. Part II: Experiments by Carl Wilhelm Scheele, 1777, pp. 46. Cr. 8vo. (Edinburgh, Clay) (Alembic Club Reprints, N-os 7 and 8) Simpkin. 1 s. 6 d. net. each.

Turpin, *G. S.* Lessons in Organic Chemistry. Part 1: Elementary. 12mo. pp. 136. Macmillan. 2 s. 6 d.

Perkin, *W. H.* jun., and *Kipping*, *F. S.* Organic Chemistry, Party. 1. Cr. 8vo. pp. 302. Chambers. 3 s. 6 d.

Математика.

B. A. Pure Mathematics: Questions and Solutions for Twelve Years including 1893. New edit. cr 8vo. Clive. 4 s. 6 d.

Taylor, *J. E.* Teoretical Mechanics: Solids. Post. 8vo. pp. 248, Longmans. 2 s. 6 d.

Wilson, *W. N.* Manual of Practical Logarithms. Post 8vo, pp. 116. Rivington 5 s.

Wyatt, *M.* An Introduction to the Differential and Integral Calculus. Cr. 8vo. Whittaker. 3 s. 6 d.

Milne, *J. J.*, and. *Davis*, *R. F.* Geometrical Conics. Part 1: The Parabola. 4 s. 6 d. Part 2: the Central Conic. Post 8vo. pp. 216. 3 s. Mactillan.

Smith, *H. J. S.* The Collected Mathematical Papers. Edited by J. W. L. Glaisher. 2 vols. 4to. (Clarendon Press Series) Frowde. 63 s.

Taylor, *J. E.* Theoretical Mechanics: Fluids. Cr. 8vo. pp. 230. Longmans. 2 s. 6 d.

КАТАЛОГЪ ИЗДАНІЙ

РЕДАКЦІИ

„ВѢСТНИКА ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ".

№ кат.		Цѣна съ перес.
0.	Электрическіе аккумуляторы *Э. К. Шпачинскаго* . . . . —	руб. 55 коп.
9.	О землетрясеніяхъ *Э. К. Шпачинскаго* . . . . —	„ 50 „
16.	О формулѣ P=MG. Пр. *О. Хвольсона* . . . . —	„ 50 „
17.	Объ обратныхъ изображеніяхъ на сѣтчатой оболочкѣ глаза *О. Страуса* . . . . —	„ 5 „
18.	Элементарная теорія гироскоповъ. Пр. *Н. Жуковскаго* . . . . —	„ 20 „
24.	Абсолютная скала температуръ. Пр. *Н. Шиллера* . . . . —	„ 25 „
28.	Методы рѣшеній ариѳметическихъ задачъ *И. Александрова.* Изданіе 3-е . . . . —	„ 35 „
31.	Ариѳметическія начала гармонизаціи. *В. Фабриціуса* . . . . . . —	„ 5 „
34.	О гальванопластикѣ. *Н. Успенскаго* . . . . —	„ 10 „

Обложка
пщется

Обложка
ищется