Обложка
ищется

Обложка
ищется

XVII Сем. 10-го октября 1894 г. № 6.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 198.

ВАЖНѢЙШАЯ ИЗЪ ЗАДАЧЪ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ*).

Говорить объ успѣхахъ физики въ наше время значитъ, главнымъ образомъ, говорить объ электричествѣ и въ его области о тѣхъ удивительныхъ явленіяхъ, какія представляетъ собою міръ индуктивныхъ токовъ, открытый съ небольшимъ шестьдесятъ лѣтъ тому назадъ Фарадеемъ. Покойный Фуко, послѣ своего замѣчательнаго опыта надъ нагрѣваніемъ мѣднаго диска, вращаемаго между полюсами сильнаго магнита,—опыта, наглядно обнаруживающаго переходъ работы въ теплоту,—нерѣдко говорилъ, что индуктивные токи представляютъ собою область, скрывающую въ себѣ цѣлый кладъ новыхъ открытій. Рано похищенный смертью, онъ оставилъ другимъ разрыть этотъ кладъ. И дѣйствительно, обращеніе механической работы въ потоки электричества; обращеніе электричества въ могущественнаго двигателя, влекущаго поѣзды, передающаго работу на сотни верстъ; неожиданныя чудеса альтернативныхъ токовъ,—вотъ уже свидѣтельства, что пророчество Фуко исполняется, и тайныя сокровища индукціи появляются на свѣтъ.

Но при такомъ огромномъ накопленіи удивительныхъ фактовъ, при быстромъ расширеніи приложеній, которому и границъ не видно, одно обстоятельство не можетъ не смущать изслѣдователей. Электричество грѣетъ, свѣтитъ, движетъ, исцѣляетъ и убиваетъ, измѣняетъ мало-по-

*) Хотя статья эта и была уже напечатана въ „Правительственномъ Вѣстникѣ“ (№№ 92 и 93 за 1894 годъ), тѣмъ не менѣе мы помѣщаемъ ее, по желанію автора и вслѣдствіе того интереса, который она представляетъ, и въ „Вѣстникѣ Оп. Физики“.

малу весь обиходъ жизни, но что же такое есть, само по себѣ, это чудодѣйственное электричество? Отвѣта на вопросъ не имѣется. Мысль современнаго ученаго такъ привыкла къ понятію „электрическая масса“, къ выраженіямъ: „одна электрическая масса притягиваетъ“ или „отталкиваетъ другую“, „электрическія массы помѣщаются на поверхности проводниковъ“, „несутся въ ихъ толщѣ, образуя токи“, „уходятъ въ землю“, и т. д.,—что онъ не замѣчаетъ, какая рѣшительная и вмѣстѣ съ тѣмъ мало вѣроятная гипотеза скрывается подъ этими простыми выраженіями. Въ интересной лекціи „Обзоръ физики въ современномъ ея состояніи“, читанной въ сентябрѣ истекшаго года въ юрьевскомъ университетѣ молодымъ профессоромъ, нынѣ академикомъ, княземъ Голицынымъ, говорится, напримѣръ, о теоріи потенціала, въ приложеніи ея къ электрическимъ явленіямъ, какъ о такой, которая не нуждается „въ принятіи какихъ-либо спеціальныхъ гипотезъ“. Она, по мнѣнію лектора, одна изъ тѣхъ, которыя „находятся въ этомъ отношеніи въ исключительно счастливомъ и благопріятномъ положеніи. Такъ, заимствованныхъ изъ опыта фактовъ, что сила взаимодѣйствія двухъ электрическихъ, магнитныхъ или просто матеріальныхъ*) массъ направлена по линіи, ихъ соединяющей, причемъ еще величина этой силы, пропорціональная произведенію массъ, обратно пропорціональна квадрату разстоянія между дѣйствующими другъ на друга частицами,—этихъ фактовъ, повторяю, совершенно достаточно для того, чтобы на основаніи ихъ построить всю теорію потенціала со всѣми ея многочисленными и плодотворными слѣдствіями. Эта теорія не нуждается ни въ какихъ добавочныхъ гипотезахъ, и въ этомъ-то заключается ея особая сила и привлекательность“.

Такое приравненіе математической теоріи электрическихъ и магнитныхъ дѣйствій къ теоріи всеобщаго тяготѣнія, очевидно, предполагаетъ, что существованіе магнитныхъ и электрическихъ массъ представляется изслѣдователю такимъ же реальнымъ, какъ существованіе вѣсомыхъ тѣлъ и вѣсомыхъ частицъ, о взаимодѣйствіи которыхъ трактуетъ теорія тяготѣнія. Но такъ ли это? Тотъ же физикъ, отъ страницъ съ математическими знаками и символами обративъ глаза къ дѣйствительному міру опытовъ, скажетъ, что существованіе особыхъ матерій магнитныхъ, электрическихъ является отжившею гипотезою; что никто въ существованіе и переливаніе такихъ жидкостей нынѣ уже не вѣритъ. Но если есть электрическая масса, то, значитъ, есть и электрическая матерія, или же масса эта есть какая-то неясная фикція. Въ началѣ нынѣшняго вѣка нѣмецкіе натуръ-философы создавали свои метафизическія фикціи, вызвавъ реакцію со стороны ясной, основанной на опытѣ науки. Натуръ-философское направленіе пало. Но склонность

*) У насъ нерѣдко терминъ „матеріальный“ употребляется въ смыслѣ „вѣсомаго“. Такъ, напр., въ „Теоріи потенціальной функціи“ профессоръ Шиллеръ (Кіевъ, 1885), говоря о взаимодѣйствіи полюсовъ по закону квадрата разстояній, между прочимъ, замѣчаетъ: „Полюсы эти могутъ быть матеріальными, электрическими, магнитными точками“... Противоположность матеріальнаго—духовный. Если магнитныя, электрическія, эѳирныя массы или частички нематеріальны, то значитъ онѣ духовны. Нѣкоторые авторы эѳиръ такъ и называютъ „нематеріальнымъ“, разумѣя подъ матеріальными частицами исключительно вѣсомыя. Терминологія, очевидно, не точная.

къ метафизическимъ построеніямъ, повидимому, не исчезла и переселилась въ область той особаго рода діалектики, какую представляетъ собою математика. Выраженіе „математическая ясность" въ настоящее время было бы мало приложимо къ множеству математическихъ построеній. Въ математической теоріи электричества мы разсуждаемъ объ электрическихъ массахъ, какъ о чемъ-то реально существующемъ, признавая въ то же время, что никакой электрической матеріи, изъ которой состояли бы эти массы, въ природѣ не существуетъ; что въ природѣ не скопляются и не переливаются небывалыя жидкости, а происходитъ что-то совсѣмъ иное.

Создавая теорію свѣта, какъ волнообразнаго движенія, и соглашаясь, что господствовавшая тогда теорія истеченія можетъ черезъ прибавочныя сложныя гипотезы объяснить многія свѣтовыя явленія, съ простотою вытекающія изъ началъ теоріи волненія, Френель говорилъ: „Но ясно, что выходя отъ воображаемой гипотезы относительно причины свѣта, мы никогда такъ быстро не достигнемъ цѣли, какъ если бы были въ секретѣ природы по отношенію къ этому явленію". Теорія волненія находится въ секретѣ природы, такъ какъ угадываетъ истинный механическій типъ явленія. Такой теоріи по отношенію къ электричеству нѣтъ. Тутъ мы еще не въ секретѣ природы. Механическій типъ электрическихъ явленій еще совсѣмъ неизвѣстенъ.

Наиболѣе изящно математически обработана электростатика—глава ученія объ электричествѣ, изучающая распредѣленіе электричества на проводникахъ. Задача, повидимому, разрѣшена вполнѣ, и между тѣмъ простая въ основаніи, хотя и трудная въ математической обработкѣ, теорія и то сложное явленіе, какое представляетъ собою наэлектризованное тѣло, окруженное непроводящею средою или помѣщаемое въ пустотѣ,—мало имѣютъ между собою общаго. Быть можетъ, привлекательность математическаго построенія и сдѣлала то, что опытное изслѣдованіе электростатическихъ явленій находится еще въ зачаточномъ состояніи, и желающій, напримѣръ, ознакомиться съ фактами, какіе извѣстны относительно возбужденія электричества черезъ треніе, долженъ обращаться къ старымъ трактатамъ, такъ какъ въ новѣйшихъ объ этомъ говорится самымъ поверхностнымъ образомъ. Въ чемъ состоитъ процессъ наэлектризованія черезъ треніе и въ чемъ различіе образованія черезъ треніе электричества отъ образованія тѣмъ же путемъ теплоты?

Не такъ давно въ одномъ изъ научныхъ собраній Петербурга (въ собраніи преподавателей физики въ педагогическомъ музеѣ) была высказана мысль, не лишенная интереса, какъ одна изъ попытокъ сойти съ рутиннаго пути въ дѣлѣ объясненія электрическихъ явленій. Такихъ попытокъ дѣлалось и дѣлается немало. Онѣ полезны, если прокладываютъ пути къ новымъ опытамъ или указываютъ стороны явленія, не обращавшія на себя вниманія. Попытка направлена къ уясненію механическаго типа электрическихъ явленій.

Замѣчательные опыты покойнаго Герца далеко расширили горизонтъ размышленій объ электрическихъ явленіяхъ. Оказалось, что отъ электрической искры индуктивнаго аппарата, слагающейся, не смотря на кратковременность, изъ множества разрядовъ, болѣе, напримѣръ, милліона въ секунду, идущихъ попеременно въ ту и другую сторону и, слѣдовательно, представляющихъ собою явленіе быстраго колебательнаго движенія,—распространяются, со скоростью, равною скорости свѣта, электрическія волны, отличающіяся отъ волнъ свѣта и теплоты своею значительною длиною. Свѣтовыя и термическія волны пораждаются не сотнями тысячъ колебаній въ секунду и не милліонами даже, а сотнями тысячъ милліоновъ. Длинныя электрическія волны бѣгутъ въ той же средѣ (эѳирѣ), какъ и свѣтовыя и термическія, о чемъ свидѣтельствуетъ одинаковость скоростей.

Если параллельно съ этимъ обратимъ вниманіе на грубыя, сравнительно, колебанія, которыя въ воздухѣ пораждаютъ звуковыя волны, то усмотримъ тамъ числа колебаній несравненно меньшія — сотни, тысячи въ секунду. Такимъ образомъ, въ области вѣсомой матеріи существуютъ самыя разнообразныя, по числу, колебанія. Исчисляемыя сотнями, тысячами, они сообщаютъ волнообразное движеніе вѣсомой же матеріи, производя волны звука; колебанія исчисляемыя сотнями тысячъ милліоновъ—рождаютъ въ эѳирѣ свѣтъ и лучистую теплоту; исчисляемыя милліонами—даютъ электрическія волны Герца. Но между милліонами и двумя-тремя тысячами могутъ быть, очевидно, одна двѣ, пять сотень тысячъ колебаній. Чему же соотвѣтствуютъ эти колебанія и что они производятъ? Явленіе звуковыхъ волнъ предлагаетъ слѣдующую аналогію. Чтобы звуковыя волны могли образоваться въ воздухѣ, число колебаній тѣла не должно быть слишкомъ малымъ. Если производить въ секунду не сотню или двѣ колебаній, а, напримѣръ, пять, шесть, десять, то нельзя образовать звуковыхъ волнъ и вообще волнообразнаго движенія. Если двигать, напримѣръ, рукою въ воздухѣ, то можно заставить частицы разступаться, не образуя волнъ. Въ водородѣ, при подвижности его частицъ, даже быстраго движенія звучащаго тѣла бываетъ недостаточно, чтобы породить волны, если газъ нѣсколько разрѣженъ. Такъ происходитъ въ воздухѣ и газахъ. Не представляется ли чего подобнаго и въ эѳирѣ? Не требуется ли для того, чтобы произвести въ немъ волны, число колебаній, превышающее извѣстный предѣлъ? Можетъ быть, двѣсти, триста тысячъ колебаній по отношенію къ эѳиру имѣютъ подобное значеніе, какъ пять, шесть по отношенію къ воздуху. Не является ли въ такомъ случаѣ наэлектризованное треніемъ или инымъ способомъ тѣло—совокупностью частицъ, дѣлающихъ число колебаній, недостаточное для того, чтобы породить тепловыя, свѣтовыя, даже электрическія волны? Какъ передвигаемая въ воздухѣ рука, перемѣщая воздухъ, не даетъ, однако, волнъ (такъ, по крайней мѣрѣ, можно предполагать: надлежащее разъясненіе долженъ дать опытъ), но производитъ простирающуюся на нѣкоторое разстояніе пертурбацію, такъ и наэлектризованное тѣло нарушаетъ вокругъ себя равновѣсіе эѳира, производя, какъ говорили въ былыя времена, электрическую атмосферу, но не порождая съ свѣтовою скоростью бѣгущихъ волнъ. Не производитъ ли треніе такія сравнительно малочисленныя колебанія тѣлъ, обращающіяся при его усиленіи и продолженіи въ колебанія, уже термически волнующія эѳиръ? Такова, приблизительно была высказанная мысль. Чтобы провѣрить аналогію, требовалось бы прежде всего произвести опыты надъ распространеніемъ въ газѣ и жидкостяхъ движеній отъ сравнительно медленно качающихся или перемѣщающихся тѣлъ.

Не будетъ ли какихъ кажущихся взаимодѣйствій двухъ такихъ тѣлъ, и т. п.? И независимо отъ электрическихъ явленій не лишено интереса изслѣдованіе распространенія медленныхъ колебаній.

Возвращаясь къ явленіямъ индукціи и токовъ, ею порождаемыхъ, можно отмѣтить одно нелишенное значенія историческое обстоятельство. Теорія этихъ явленій разрабатывалась не тѣмъ путемъ, какой указанъ былъ Ньютономъ: отъ явленій движенія переходить къ ихъ законамъ, а на основаніи найденныхъ законовъ заключать о дѣйствующихъ силахъ. Этимъ путемъ шелъ Кулонъ въ изученіи электростатическихъ дѣйствій и въ особенности Амперъ въ созданіи электро-динамики. Когда Фарадеемъ была открыта индукція, теорію явленія стали составлять инымъ путемъ. Не искали эмпирическихъ законовъ индукціи въ разныхъ условіяхъ разстоянія, силы, матеріала, и т. д. Никакихъ простыхъ, ясно формулированныхъ законовъ индукціи не имѣется. Приходится прибѣгать къ символическому обозначенію линій силъ, чтобы найтись въ болѣе или менѣе сложныхъ случаяхъ, приписывая линіямъ этимъ самое неясное физическое значеніе. Теоретическія разсужденія выходили отъ гипотезъ относительно взаимодѣйствія двухъ перемѣщающихся электрическихъ массъ. Гипотетическое представленіе о токѣ, какъ о теченіи электрическихъ массъ въ проводникѣ, принималось, какъ аксіома, и о теченіи этомъ обсуждалось, какъ о фактѣ природы. Не изъ явленій выводились законы, а на явленія налагались законы, взятые изъ нѣкотораго завѣдомо фиктивнаго міра.

Математическая метафизика играетъ важную роль и въ механической теоріи тепла, и въ теоріяхъ электрическихъ явленій, и есть характерная черта современной научной эпохи, считающей своею эрою установленіе начала сохраненія энергіи, замѣнившее скромное начало сохраненія живой силы стараго времени. Многіе ученые считаютъ даже начало это открытіемъ нынѣшняго вѣка, забывая, что мысль о томъ, что всѣ явленія природы суть разнообразныя формы движенія, которое не исчезаетъ, а только преобразуется изъ одной формы въ другую, сохраняясь количественно безъ измѣненія, — есть весьма старая мысль, составляющая одно изъ главныхъ положеній картезіанскаго ученія. Декартъ говорилъ: „Богъ въ своемъ могуществѣ создалъ матерію съ движеніемъ и покоемъ ея частей и нынѣ сохраняетъ во вселенной столько движенія и покоя, сколько вложилъ при созданіи". Лейбницъ, говоря о явленіяхъ удара, замѣчалъ, что они „не противорѣчатъ ненарушимой истинѣ закона сохраненія той же силы въ природѣ". „Всѣми принимается,—говоритъ Іоаннъ Бернулли, — какъ неоспоримая аксіома, что всякая дѣйствующая причина не можетъ уничтожиться ни въ цѣломъ, ни въ части, не произведя дѣйствія, равнаго потерѣ". Въ новѣйшемъ развитіи ученія о сохраненіи движенія оно плодотворно распространено на обширный кругъ явленій теплоты и отчасти электричества. Вмѣстѣ съ тѣмъ, введенъ рядъ новыхъ понятій и терминовъ, дающихъ ученію упомянутую метафизическую окраску. Самое понятіе энергіи не есть какое-либо простое и ясное механическое понятіе. Энергія опредѣляется, какъ способность тѣла произвести работу. „Способность"—терминъ не изъ области механики. „Работа"—терминъ механическій, но далеко не простой, такъ какъ въ опредѣленіе работы, какъ преодоленія сопротивленія на данномъ протяженіи, входитъ цѣлый рядъ понятій: сила, путь, сопротивленіе. Потому, самый исходный пунктъ начала сохраненія энергіи не имѣетъ элементарной ясности.

Еще съ болѣе значительными трудностями соединено развитіе ученія объ энергіи. Понятіе о кинетической энергіи, въ опредѣленіе которой входятъ представленія о массѣ и скорости, ясно съ точки зрѣнія механики. Нельзя того же сказать объ энергіи потенціальной. Это уже чисто метафизическое аристотелевское представленіе. По Аристотелю, „движеніе есть актъ (то-есть осуществленіе) потенціальнаго, какъ такового". И по современному ученію, тѣло, поднятое на высоту, имѣетъ потенціальную энергію, которая перейдетъ въ кинетическую, когда тѣло, не удерживаемое болѣе, начнетъ падать. Тѣлу приписывается скрытая энергія, находящаяся въ состояніи потенціи, но могущая перейти въ дѣйствительность. Запасъ потенціальной энергіи представляется такимъ же неистребимымъ, какъ неистребимо движеніе. Какъ форма энергіи, потенціальная энергія можетъ преобразоваться, но не можетъ исчезнуть. Но представимъ себѣ такое обстоятельство. Вообразимъ, что масса земли, притягивающая камень, вдругъ уменьшилась вдвое. Уменьшится вдвое и потенціальная энергія, не перейдя ни въ какую работу. Возвращающійся камень возстановилъ бы только половину потраченной на поднятіе его работы. Нѣтъ сомнѣнія, что, принявъ во вниманіе тотъ механическій способъ, какимъ можно вообразить себѣ уменьшеніе земной массы—отторженіе, напримѣръ, отъ нея части черезъ внезапный ударъ посторонняго тѣла,—можно подвести явленіе подъ начало сохраненія совокупности потенціальной и кинетической энергіи. Но вотъ случай, который труднѣе уже разъяснить съ точки зрѣнія этого начала въ той формѣ, въ какой оно обыкновенно излагается. Представимъ себѣ полюсъ сильнаго электромагнита и кусокъ притягиваемаго имъ желѣза. Вопреки притяженію, удалимъ желѣзо на нѣкоторое разстояніе отъ полюса. Потрачена работа и желѣзо пріобрѣтаетъ значительный запасъ потенціальной энергіи. Но прервемъ токъ электромагнита. Полюсъ утратитъ силу; пропадетъ и пріобрѣтенный запасъ потенціальной энергіи куска желѣза. Непритягиваемое болѣе желѣзо останется въ покоѣ, какъ и въ томъ случаѣ, если бы на его передвиженіе и не было потрачено работы. Удерживающее препятствіе не будетъ испытывать давленія. Спрашивается: во что же преобразовалась потенціальная энергія куска, запасъ которой предполагается пребывающимъ въ тѣлѣ какъ нѣкоторая аристотелевская потенція? Такой вопросъ можно предложить всѣмъ тѣмъ, которые въ ученіи о потенціальной энергіи слѣдуютъ разсужденію Майера о поднятомъ камнѣ, пріобрѣтающемъ потенціальную энергію, какой онъ не имѣлъ, находясь при земной поверхности. Явленіе не можетъ, конечно, противорѣчить закону сохраненія, но разсмотрѣніе его съ точки зрѣнія потенціальной энергіи, какъ принадлежности тѣла, способной произвести работу, едва ли удобно для разъясненія дѣла.

ОЧЕРКЪ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОБАЧЕВСКАГО.

(Продолженіе).*

VI. Тригонометрія Лобачевскаго**).

Въ пространствѣ Евклида плоскость обладаетъ наиболѣе простой геометріей и служитъ поэтому точкой отправленія при полномъ развитіи геометрической системы. Въ пространствѣ Лобачевскаго наиболѣе простая геометрическая система принадлежитъ орисферѣ. Эта поверхность служитъ поэтому исходнымъ пунктомъ въ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ, имѣющихъ цѣлью установить метрическія соотношенія между различными геометрическими элементами этого пространства.

Эта задача здѣсь, какъ и въ геометріи Евклида, сводится къ разысканію трехъ уравненій, связывающихъ между собой стороны и углы прямолинейнаго треугольника, т. е. къ построенію плоской тригонометріи.

Сохраняя геометрію Евклида, предѣльная поверхность сохраняетъ, конечно, и Евклидову тригонометрію***). Иными словами, мы можемъ перенести на предѣльную поверхность опредѣленія основныхъ тригонометрическихъ функцій: мы можемъ, напримѣръ, согласиться называть sinus'омъ угла, заключеннаго между двумя предѣльными линіями на орисферѣ, отношеніе катета, противолежащаго этому углу, къ гипотенузѣ въ прямоугольномъ треугольникѣ, который составленъ на орисферѣ изъ дугъ предѣльныхъ линій и заключаетъ этотъ уголъ. Такимъ же образомъ мы можемъ установить значеніе остальныхъ тригонометрическихъ функцій. Онѣ сохранятъ между собой всѣ соотношенія обыкновенной гоніометріи; въ зависимости отъ своего аргумента онѣ будутъ опредѣляться тѣми же безконечными рядами; а стороны и углы геодезическаго треугольника на предѣльной поверхности будутъ связаны между собой тѣми же уравненіями, которыя устанавливаютъ соотвѣтствующія соотношенія на плоскости Евклида.

---

*) См. „В. О. Ф.“ №№ 174, 178, 179, 183, 187, 188, 189, 190, 194, 195 и 196.

**) Выводъ тригонометріи Лобачевскаго, кромѣ тѣхъ сочиненій, которыя указаны въ началѣ IV главы, можно найти еще въ слѣдующихъ сочиненіяхъ:

Bataglini. „Sulla Geometria Immaginaria di Lobatcheffsky“. Giornale di Mat. T. V и Nouv. Ann. VII, II s.

Homersham Cox. „Homogeneous coordinates in Imaginary Geometry“. The Quart. Journal of pure and appl. Mat. XVIII.

M. Réthy. „Die Fundamental-Gleichungen der nicht-euclidischen Trigonometrie“. Arch. für Mathem. LVIII.

Волковъ. „Пантригонометрія“.

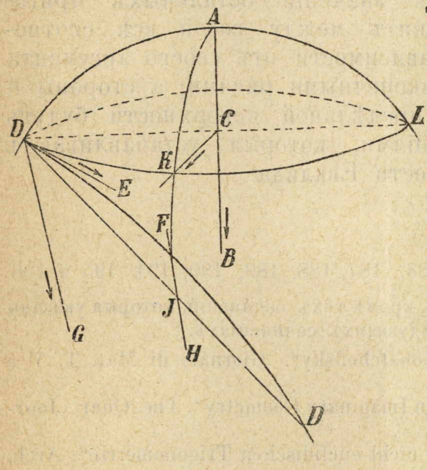
Есть еще нѣкоторыя статейки, которыми мы не располагали. Выводъ, предложенный въ текстѣ, имѣетъ появиться въ одной изъ слѣдующихъ книжекъ Nouv. Annales подъ заглавіемъ: „Demonstration nouvelle des équations fondamentales de la geométrie de l'éspace de courbure constante negative“.

***) Т. е. правильнѣе, тригонометрію, основанную на геометріи Евклида.

Условимся теперь разумѣть подъ тригонометрическими функціями прямолинейнаго угла соотвѣтствующія функціи угла, заключеннаго между двумя предѣльными линіями на орисферѣ и имѣющаго то-же измѣреніе. Это сохраняетъ намъ орудіе, необходимое для построенія требуемыхъ уравненій; для полнаго рѣшенія намѣченной задачи нужно только установить связь между тригонометріей плоскости и тригонометріей предѣльной поверхности. Слѣдующая теорема служитъ для этой цѣли.

Изъ точки A, произвольно взятой на предѣльной поверхности (фиг. 22), проводимъ ось AB и предѣльную кривую AD на орисферѣ. Черезъ произвольную точку D этой кривой проводимъ плоскость, перпендикулярную къ оси AB; она разсѣчетъ предѣльную поверхность по окружности круга, центръ котораго находится въ точкѣ C. Изъ точки D проводимъ къ окружности прямолинейную касательную DE въ плоскости круга и касательную предѣльную линію DF на кривой поверхности. Черезъ центръ круга C проведемъ прямую CK, параллельную DE. Плоскость, опредѣляемая прямыми AB и CK пересѣкаетъ поверхность по предѣльной линіи AF. Докажемъ, что эта кривая встрѣчаетъ предѣльную линію DF въ нѣкоторой точкѣ F, и длина дуги DF представляетъ собой при этомъ постоянную величину, т. е. не зависитъ отъ разстоянія AD.

Проводимъ для этого ось DG, которая служитъ пересѣченіемъ плоскостей предѣльныхъ кривыхъ DF и DA (см. предыд. главу, пунктъ g', заключеніе). Радіусомъ окружности на орисферѣ служитъ дуга DA, и поэтому касательная DF къ ней перпендикулярна: иными словами, плоскость GDF перпендикулярна къ плоскости GDA; она заключаетъ поэтому прямую DE, перпендикулярную къ той-же плоскости (GDA). Далѣе двѣ плоскости GDE и KCB расположены такимъ образомъ, что двѣ пересѣкающія прямыя DE и DG на одной изъ нихъ параллельны двумъ пересѣкающимся прямымъ CK и CB на другой. Мы видѣли (см. Вѣст. № 190 стр. 224), что плоскости при такихъ условіяхъ пересѣкаются по прямой FH, которая въ одномъ направленіи (FH) параллельна прямымъ DG и CB, а въ противоположномъ направленіи (HF) параллельна прямымъ DE и CK. Отсюда заключаемъ, во первыхъ, что прямая FH служитъ осью поверхности, слѣдовательно, пересѣкаетъ ее въ нѣкоторой точкѣ F; въ этой точкѣ сходятся дуги DF и AF. Во вторыхъ, перпендикуляръ DJ, опущенный изъ D на FH дѣлитъ прямой уголъ GDE пополамъ. Иными словами разстояніе DJ представляетъ собой длину перпендикуляра, которому соотвѣтствуетъ уголъ параллельности въ 45^0, т. е. $DJ = \Phi(45^0)$. Если продолжимъ хорду DJ до пересѣченія съ предѣльной линіей во второй разъ въ точкѣ D' то $DJ = JD'$. (См. пред. гл., пунктъ h). Дуга DFD', соот-



Фиг. 22.

вѣтствующая постоянной хордѣ $DD' = 2\Phi(45^0)$, какъ извѣстно, (см. пред. гл. пунктъ k) вполнѣ опредѣляется своей хордой, а потому имѣетъ постоянную длину, которую мы обозначимъ черезъ $2l$; слѣдовательно, и дуга DF имѣетъ постоянную длину l.

Изъ прямоугольнаго треугольника на орисферѣ FDA имѣемъ:

$$DA = DF \operatorname{cotg} A,$$

гдѣ A означаетъ уголъ DAF.

Обозначимъ разстояніе DC черезъ r, дугу DA черезъ s. Уголъ DAF опредѣляется двуграннымъ угломъ, составленнымъ плоскостями DAB и FAB, и измѣряется линейнымъ угломъ DCK. Такъ какъ DE $\perp$ къ DC, а съ другой стороны CK $\parallel$ DE, то $\angle DCK = \Pi(r)$; поэтому предыдущее равенство принимаетъ такой видъ:

$$s = l \operatorname{cotg} \Pi(r) \qquad \mathrm{I}$$

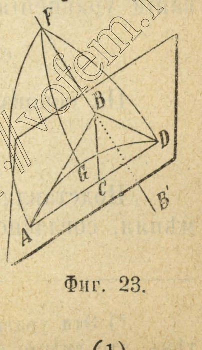
Это соотношеніе опредѣляетъ длину дуги предѣльной кривой въ зависимости отъ перпендикуляра, опущеннаго изъ одного конца дуги на ось, проходящую черезъ другой конецъ. Впрочемъ, это равенство можно формулировать иначе: обозначимъ дугу $DAL = 2s$ черезъ σ; хорду $DL = 2r$ обозначимъ черезъ λ; тогда предыдущее равенство принимаетъ такой видъ

$$\sigma = 2l \operatorname{cotg} \Pi\left(\frac{\lambda}{2}\right). \qquad \mathrm{II}$$

Въ такомъ видѣ это соотношеніе опредѣляетъ длину дуги предѣльной кривой въ зависимости отъ ея хорды. Что касается постоянной l, то численное ея значеніе зависитъ отъ единицы мѣры. Мы къ ней еще возвратимся.

Эти соотношенія даютъ возможность безъ труда установить уравненія плоскаго прямоугольнаго треугольника.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC (фиг. 23), обозначимъ, по обыкновенію, гипотенузу черезъ c, катеты противолежащіе угламъ A и B черезъ a и b. Продолжимъ катетъ AC на разстояніе $CD = AC$ и соединимъ B съ D. Изъ вершины B проведемъ перпендикуляръ BB' къ плоскости треугольника. Принимая прямую BB' за ось и точку A за начало, строимъ предѣльную поверхность. Положимъ, что она пересѣчетъ ось BB' въ точкѣ F. Мы можемъ сказать, что наша орисфера образована вращеніемъ предѣльной кривой, проходящей черезъ точки A и F, вокругъ оси FB' (см. пред. гл., пунктъ h'). При такомъ вращеніи точка A можетъ быть приведена въ совмѣщеніе съ точкой D. Послѣдняя лежитъ поэтому на предѣльной поверхности. Соединивъ точки A, D и F дугами предѣльныхъ кривыхъ, получимъ на орисферѣ равнобедренный треугольникъ. Дуга FG, проходящая черезъ середину дуги AD, перпендикулярна къ послѣдней и дѣлитъ уголъ AFD пополамъ. Этотъ уголъ опредѣляется двуграннымъ угломъ $ABB'D$ и измѣряется линейнымъ угломъ ABD; онъ равенъ поэтому 2B, а уголъ AFG равенъ B. Слѣдовательно,



Фиг. 23.

$$AG = AF \sin B. \qquad (1)$$

Но на основаніи уравненія I имѣемъ:

$$AF = l \cot g\, \Pi(c),$$

а на основаніи уравненія II

$$AG = \frac{1}{2} AD = l \cot g\, \Pi(b).$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе (1) и сокращая на l, находимъ:

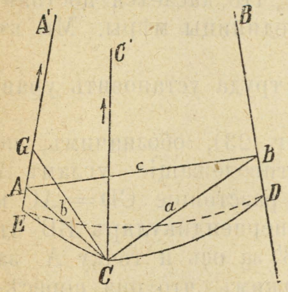
$$\cot g\, \Pi(b) = \cot g\, \Pi(c) \sin B. \qquad \text{III}$$

Очевидно, такимъ же образомъ мы могли бы получить:

$$\cot g\, \Pi(a) = \cot g\, \Pi(c) \sin A^{*}). \qquad \text{IV}$$

Чтобы получить третье уравненіе, связывающее стороны и углы прямолинейнаго прямоугольнаго треугольника, возставимъ снова перпендикуляръ BB′ къ плоскости нашего прямоугольнаго треугольника ABC (фиг. 24). Теперь принимаемъ точку C за начало, BB′ за ось и строимъ снова предѣльную поверхность. Плоскости, опредѣляемыя осями AA′, BB′ и CC′, пересѣкаютъ поверхность по предѣльнымъ кривымъ, дуги которыхъ CE, CD и ED составляютъ на поверхности орисферы треугольникъ ECD.

Не трудно видѣть, что прямая AC перпендикулярна къ плоскости CBB′, а поэтому и плоскость ACC′ перпендикулярна къ той же плоскости. Между тѣмъ двугранный уголъ, составленный этими двумя плоскостями, опредѣляетъ собой уголъ между дугами EC и CD. Слѣдовательно, треугольникъ на орисферѣ имѣетъ прямой уголъ при C. Далѣе $\angle$ CDE опредѣляется двуграннымъ угломъ CBB′A, которому соотвѣтствуетъ линейный уголъ B. Слѣдовательно



Фиг. 24.

$$CE = CD . \operatorname{tg} B. \qquad (2)$$

Изъ точки C опускаемъ перпендикуляръ CG на AA′; назовемъ этотъ перпендикуляръ черезъ x. Такъ какъ $AC \perp CC'$, а $AA' \| CC'$, то $\angle GAC = \Pi(b)$; поэтому изъ прямоугольнаго треугольника ACG на основаніи уравненія III имѣемъ:

$$\cot g\, \Pi(x) = \cot g\, \Pi(b) . \sin \Pi(b) = \cos \Pi(b). \qquad (3)$$

На основаніи же уравненія I находимъ:

$$CE = l \cot g\, \Pi(x);\ \ CD = l \cot g\, \Pi(a).$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе (2), сокращая на l и замѣняя, согласно уравненію (3), $\cot g\, \Pi(x)$ черезъ $\cos \Pi(b)$, находимъ:

---

*) Эти уравненія легко замѣтить: они отличаются отъ обыкновенныхъ только тѣмъ, что вмѣсто a и c нужно взять $\cot g\, \Pi(a)$ и $\cot g\, \Pi(c)$.

$$\cos \Pi(b) = \operatorname{cotg} \Pi(a) \operatorname{tg} B. \qquad \text{V}$$

Уравненія III, IV и V устанавливаютъ связь между сторонами и углами прямолинейнаго прямоугольнаго треугольника и въ нихъ, слѣдовательно, заключается вся прямолинейная тригонометрія; она развивается изъ этихъ уравненій чисто аналитическимъ путемъ. Число всѣхъ перемѣнныхъ элементовъ (угловъ и сторонъ) въ прямоугольномъ треугольникѣ равно пяти; чтобы по каждымъ двумъ даннымъ можно было получить всѣ остальныя, необходимо располагать десятью уравненіями (по числу сочетаній изъ 5 по 3), заключающими по три перемѣнныхъ каждое. Разысканіе этихъ соотношеній сводится къ исключенію перемѣнныхъ изъ найденныхъ нами уравненій.

Прежде всего, дѣля уравненіе IV на уравненіе III, мы получимъ:

$$\frac{\operatorname{cotg} \Pi(a)}{\operatorname{cotg} \Pi(b)} = \frac{\sin A}{\sin B}, \qquad (4)$$

или иначе:

$$\operatorname{tg} \Pi(a) \operatorname{cosc} B = \frac{1}{\sin A \operatorname{cotg} \Pi(b)} = \frac{\sin \Pi(b)}{\sin A \cos \Pi(b)}. \qquad (5)$$

Изъ уравненія же V получимъ:

$$\operatorname{tg} \Pi(a) \operatorname{cotg} B = \frac{1}{\cos \Pi(b)}. \qquad (6)$$

Возвышая уравненія (5) и (6) въ квадратъ и вычитая изъ перваго второе, мы получаемъ:

$$\operatorname{tg}^2 \Pi(a) = \frac{\sin^2 \Pi(b) - \sin^2 A}{\cos^2 \Pi(b) \sin^2 A} = \frac{\sin^2 \Pi(b)[\sin^2 A + \cos^2 A] - \sin^2 A[\sin^2 \Pi(b) + \cos^2 \Pi(b)]}{\cos^2 \Pi(b) \sin^2 A} =$$

$$= \frac{\sin^2 \Pi(b) \cos^2 A - \cos^2 \Pi(b) \sin^2 A}{\cos^2 \Pi(b) \sin^2 A} = \operatorname{tg}^2 \Pi(b) \operatorname{cotg}^2 A - 1.$$

Замѣняя $\operatorname{tg}^2 \Pi(a) + 1$ черезъ $\sec^2 \Pi(a)$, мы найдемъ:

$$\sec \Pi(a) = \operatorname{tg} \Pi(b) \operatorname{cotg} A \text{ или } \cos \Pi(a) = \operatorname{cotg} \Pi(b) \operatorname{tg} A. \qquad \text{VI}$$

При извлеченіи квадратнаго корня мы сохраняемъ только одинъ знакъ, ибо аргументы всѣхъ тригонометрическихъ функцій, входящихъ въ составъ уравненія, заключены между 0 и $\frac{\pi}{2}$. Уравненіе VI можно было написать à priori по аналогіи съ уравненіемъ V; но мы предпочли получить его аналитически, чтобы обнаружить, что оно является слѣдствіемъ основныхъ уравненій.

Далѣе уравненіе (V) даетъ:

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\operatorname{cotg} \Pi(a)}{\cos \Pi(b)}. \qquad (7)$$

Уравненіе-же III даетъ:

$$\operatorname{cosc} B = \frac{\operatorname{cotg} \Pi(c)}{\operatorname{cotg} \Pi(b)} = \frac{\operatorname{cotg} \Pi(c) \sin \Pi(b)}{\cos \Pi(b)}. \qquad (8)$$

Возвышая уравненія (7) и (8) въ квадратъ и вычитывая первое изъ втораго, мы исключимъ уголъ B изъ этихъ уравненій и получимъ соотношеніе между катетами и гипотенузой треугольника въ слѣдующемъ видѣ:

$$\cos^2\Pi(b) = \operatorname{cotg}^2\Pi(c)\sin^2\Pi(b) - \operatorname{cotg}^2\Pi(a).$$

Замѣняя въ этомъ уравненіи $\operatorname{cotg}^2\Pi(c)$ и $\operatorname{cotg}^2\Pi(a)$ черезъ $\operatorname{cosc}^2\Pi(c)-1$ и $\operatorname{cosc}^2\Pi(a)-1$, мы получимъ послѣ простой передѣлки:

$$\operatorname{cosc}^2\Pi(a) = \operatorname{cosc}^2\Pi(c)\operatorname{sn}^2\Pi(b) \text{ или } \sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\operatorname{sn}\Pi(b). \qquad \text{VII}$$

Далѣе, если мы въ уравненіе V вмѣсто $\operatorname{cotg}\Pi(a)$ поставимъ выраженіе, получаемое изъ уравненія (4), то мы получимъ:

$$\cos\Pi(b) = \frac{\operatorname{cotg}\Pi(b)\sin A}{\cos B},$$

откуда

$$\sin\Pi(b)\cos B = \sin A. \qquad \text{VIII}$$

Если бы мы въ этой передѣлкѣ исходили изъ уравненія VI, вмѣсто уравненія V, то получили бы аналогично:

$$\sin\Pi(a)\cos A = \sin B. \qquad \text{IX}$$

Перемножая уравненія VIII и IX и принимая во вниманіе уравненіе VII, мы получаемъ:

$$\sin\Pi(c) = \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B. \qquad \text{X}$$

Намъ остается получить послѣднюю пару уравненій. Изъ уравненія VII имѣемъ:

$$\operatorname{cosc}\Pi(a) = \frac{\sin\Pi(b)}{\sin\Pi(c)}. \qquad (9)$$

Изъ уравненія-же IV, получаемъ:

$$\operatorname{cotg}\Pi(a) = \frac{\cos\Pi(c)\sin A}{\sin\Pi(c)}. \qquad (10)$$

Исключаемъ изъ этихъ уравненій уголъ $\Pi(a)$, возвышая ихъ въ квадратъ и вычитая второе изъ перваго. Тогда мы получимъ:

$$\sin^2\Pi(c) = \sin^2\Pi(b) - \cos^2\Pi(c)\sin^2 A.$$

Выражая $\sin^2\Pi(c)$ и $\sin^2\Pi(b)$ черезъ cosinus'ы тѣхъ же аргументовъ, получимъ безъ труда:

$$\cos\Pi(c)\cos A = \cos\Pi(b). \qquad \text{XI}$$

Легко видѣть, что совершенно анологичной передѣлкой мы получимъ:

$$\cos\Pi(c)\cos B = \cos\Pi(a). \qquad \text{XII}$$

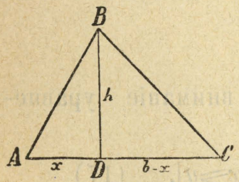
Уравненіями III—XII исчерпывается тригонометрія прямоугольнаго треугольника. Замѣняя въ нихъ, какъ это дѣлаетъ Лобачевскій въ нѣкоторыхъ своихъ сочиненіяхъ, символъ $\Pi(x)$ черезъ x', мы сведемъ ихъ въ слѣдующую табличку:

$$\cot g\, b' = \cot g\, c' \sin B, \qquad \text{(III)}$$
$$\cot g\, a' = \cot g\, c' \sin A, \qquad \text{(IV)}$$
$$\cos b' = \cot g\, a' \operatorname{tg} B, \qquad \text{(V)}$$
$$\cos a' = \cot g\, b' \operatorname{tg} A, \qquad \text{(VI)}$$
$$\sin c' = \sin a' \sin b', \qquad \text{(VII)}$$
$$\sin b' \cos B = \sin A, \qquad \text{(VIII)}$$
$$\sin a' \cos A = \sin B, \qquad \text{(IX)}$$
$$\sin c' = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B, \qquad \text{(X)}$$
$$\cos c' \cos A = \cos b', \qquad \text{(XI)}$$
$$\cos c' \cos B = \cos a', \qquad \text{(XII)}.$$

Обратимся теперь къ косоугольному треугольнику.

Въ косоугольномъ треугольникѣ ABC (фиг. 25) опустимъ изъ вершины B перпендикуляръ $BD = h$ на противулежащую сторону. Тогда изъ прямоугольнаго треугольника ABD, на основаніи уравненія III, получаемъ:

$$\cot g\, \Pi(h) = \cot g\, \Pi(c) \sin A. \qquad (11)$$



Фиг. 25.

Изъ прямоугольнаго треугольника CBD имѣемъ:

$$\cot g\, \Pi(h) = \cot g\, \Pi(a) \sin C. \qquad (12)$$

Изъ уравненій (11) и (12) слѣдуетъ, что

$$\frac{\cot g\, \Pi(a)}{\sin A} = \frac{\cot g\, \Pi(c)}{\sin C}. \qquad \text{XIII}$$

Очевидно, такимъ же образомъ найдемъ, что

$$\frac{\cot g\, \Pi(c)}{\sin C} = \frac{\cot g\, \Pi(b)}{\sin B}. \qquad \text{XIV}$$

Остается къ этимъ уравненіямъ присоединить третье. Обозначимъ для этого разстояніе AD черезъ x, такъ что $DC = b - x$. Тогда изъ тѣхъ же прямоугольныхъ треугольниковъ на основаніи уравненія XI получимъ:

$$\cos \Pi(x) = \cos \Pi(c) \cos A; \quad \cos \Pi(b-x) = \cos \Pi(a) \cos C. \qquad (13)$$

Если исключимъ x изъ послѣднихъ двухъ уравненій, то получимъ третье уравненіе, связывающее стороны и углы косоугольнаго треугольника. Но на этотъ разъ исключеніе не можетъ быть произведено съ такой же простотой; здѣсь приходится исключать не какую-нибудь тригонометрическую функцію отъ $\Pi(x)$, а самую перемѣнную x, которая разъ входитъ подъ знакомъ функціи $\Pi(x)$ непосредственно, другой разъ фигурируетъ только въ разности $b - x$. Очевидно, исключеніе будетъ возможно лишь тогда, когда мы найдемъ полное аналитическое выраженіе функціи $\Pi(x)$, т. е. выразимъ ее въ функціяхъ намъ уже извѣстныхъ. Такъ какъ изложенная теорія достаточно подготовила почву для рѣшенія этого вопроса, то мы къ нему теперь обращаемся.

Пусть ACB (фиг. 26) дуга предѣльной кривой, CE ось, которая дѣлитъ хорду AB пополамъ и, слѣдовательно, перпендикулярна къ ней. Черезъ точки G и G′, произвольно выбранныя на самой хордѣ и на ея продолженіи, проводимъ оси FH и F′H′. Далѣе изъ точекъ A и B опускаемъ на эти оси перпендикуляры AL и AL′, BK и BK′.

По чертежу мы видимъ, что

$$\smile AB = \smile AF + \smile FB. \tag{14}$$

Обозначимъ теперь отрѣзокъ $AD = DB$ черезъ x, а отрѣзокъ DG черезъ y; тогда, очевидно,

$$\angle DGL = \varphi = \Pi(DG) = \Pi(y).$$

На основаніи уравненія II

$$\smile AB = 2l \operatorname{cotg} \Pi(x). \tag{15}$$

Съ другой стороны, на основаніи уравненія I

$$\smile AF = l \operatorname{cotg} \Pi(AL), \ \smile BF = l \operatorname{cotg} \Pi(BK). \tag{16}$$

Но прямоугольные треугольники AGL и BKG даютъ:

$$\operatorname{cotg} \Pi(AL) = \operatorname{cotg} \Pi(x+y) \sin \Pi(y)$$
$$\operatorname{cotg} \Pi(BK) = \operatorname{cotg} \Pi(x-y) \sin \Pi(y).$$

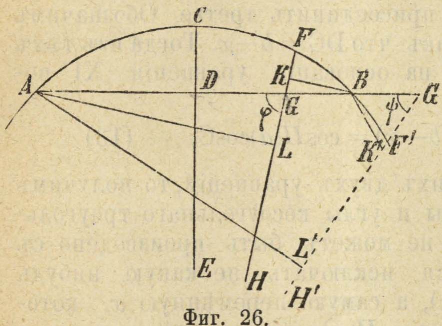
Складывая эти уравненія и принимая во вниманіе уравненія (14), (15) и (16), находимъ:

$$2 \operatorname{cotg} \Pi(x) = \{\operatorname{cotg} \Pi(x+y) + \operatorname{cotg} \Pi(x-y)\} \sin \Pi(y) \quad [x \geqq y]. \tag{17}$$

Такимъ же образомъ мы имѣемъ:

$$\smile AB = \smile AF' - \smile BF'.$$

Обозначимъ теперь AD черезъ y, а DG′ черезъ x; тогда



Фиг. 26.

$$\angle DG'L' = \Pi(DG') = \Pi(x).$$

Затѣмъ

$$\smile AB = 2l \operatorname{cotg} \Pi(y)$$
$$\smile AF' = l \operatorname{cotg} \Pi(AL')$$
$$\smile BF' = l \operatorname{cotg} \Pi(BK').$$

И такъ какъ треугольники AL′G′ и BK′G′ даютъ

$$\operatorname{cotg} \Pi(AL') = \operatorname{cotg} \Pi(x+y) \sin \Pi(x)$$
$$\operatorname{cotg} \Pi(BK') = \operatorname{cotg} \Pi(x-y) \sin \Pi(x),$$

то мы имѣемъ:

$$2 \operatorname{cotg} \Pi(y) = \{\operatorname{cotg} \Pi(x+y) - \operatorname{cotg} \Pi(x-y)\} \sin \Pi(x) \quad [x \geqq y]. \tag{18}$$

Такъ какъ въ уравненіяхъ (17) и (18) величины x и y совершенно произвольны въ предѣлахъ, опредѣляемыхъ неравенствомъ $x \geqq y$, то мы можемъ приписать имъ одинаковыя значенія въ обоихъ уравненіяхъ; исключая поэтому изъ этихъ уравненій сначала $\operatorname{cotg} \Pi(x-y)$, а потомъ $\operatorname{cotg} \Pi(x+y)$, мы найдемъ:

$$\operatorname{cotg}\Pi(x+y)=\frac{\cos\Pi(x)+\cos\Pi(y)}{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)} \qquad \text{XV, } a)$$

$$\operatorname{cotg}\Pi(x-y)=\frac{\cos\Pi(x)-\cos\Pi(y)}{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}. \qquad \text{XV, } b)$$

Отсюда

$$\cos^2\Pi(x+y)=\frac{[\cos\Pi(x)+\cos\Pi(y)]^2}{\cos^2\Pi(x)+\cos^2\Pi(y)+2\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)+\sin^2\Pi(x)\sin^2\Pi(y)}.$$

Выражая здѣсь sinus'ы въ cosinus'ахъ, получимъ:

$$\cos\Pi(x+y)=\frac{\cos\Pi(x)+\cos\Pi(y)}{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}. \qquad \text{XVI } a)$$

И такимъ же образомъ:

$$\cos\Pi(x-y)=\frac{\cos\Pi(x)-\cos\Pi(y)}{1-\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}. \qquad \text{XVI } b)$$

При извлеченіи квадратнаго корня сохраняемъ только положительный знакъ, потому что всѣ величины, которыя здѣсь фигурируютъ, положительны.

Комбинируя уравненія XV и XVI находимъ:

$$\sin\Pi(x+y)=\frac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)} \qquad \text{XVII } a)$$

$$\sin\Pi(x-y)=\frac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{1-\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}. \qquad \text{XVII } b)$$

Прежде чѣмъ воспользоваться уравненіями XV, XVI, XVII для построенія функціональнаго уравненія, служащаго для разысканія функціи $\Pi(x)$, мы выведемъ изъ нихъ еще нѣсколько гоніометрическихъ формулъ, которыя намъ понадобятся въ слѣдующихъ главахъ.

Полагая въ уравненіяхъ XV a), XVI a), XVII a) $y=x$, мы найдемъ:

$$\operatorname{cotg}\Pi(2x)=\frac{2\cos\Pi(x)}{\sin^2\Pi(a)}. \qquad \text{XVIII } a)$$

$$\operatorname{Cos}\Pi(2x)=\frac{2\cos\Pi(x)}{1+\cos^2\Pi(x)}. \qquad \text{XVIII } b)$$

$$\operatorname{Sin}\Pi(2x)=\frac{\sin^2\Pi(x)}{1+\cos^2\Pi(x)}. \qquad \text{XVIII } c)$$

Изъ послѣдняго уравненія мы находимъ непосредственно:

$$\sin\Pi(x)=\sqrt{\frac{2\sin\Pi(2x)}{1+\sin\Pi(2x)}}.$$

$$\operatorname{Cos}\Pi(x)=\pm\sqrt{\frac{1-\sin\Pi(2x)}{1+\sin\Pi(2x)}}$$

$$\operatorname{tg}\Pi(x)=\pm\sqrt{\frac{2\sin\Pi(2x)}{1-\sin\Pi(x)}}.$$

Въ послѣднихъ двухъ формулахъ знакъ радикала совпадаетъ со знакомъ аргумента a. Замѣняя здѣсь $2x$ черезъ x, находимъ окончательно:

$$\sin\Pi\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{2\sin\Pi(x)}{1+\sin\Pi(x)}}, \qquad \text{XIX } a)$$

$$\cos\Pi\left(\frac{a}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\sin\Pi(x)}{1+\sin\Pi(x)}}, \qquad \text{XIX } b)$$

$$\operatorname{tg}\Pi\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{2\sin\Pi(x)}{1-\sin\Pi(x)}}. \qquad \text{XIX } c)$$

Изъ уравненія XVI a) находимъ:

$$\frac{1-\cos\Pi(x+y)}{1+\cos\Pi(x+y)}=\frac{1-\cos\Pi(x)}{1+\cos\Pi(x)}\cdot\frac{1-\cos\Pi(y)}{1+\cos\Pi(y)}.$$

Откуда

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x+y)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(y).$$

Ввиду того, что уравненіе это симметрично относильно x и y, условіе $x \geqq y$ теряетъ значеніе. Полагая здѣсь послѣдовательно $y=x,= =2x,=3x,=4x,=\cdots,=(n-1)x$, получаемъ:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(2x)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x),$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(3x)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(2x),$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(4x)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(3x).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(nx)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi[(n-1)x].$$

Перемножая эти равенства, мы находимъ послѣ надлежащихъ сокращеній:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(nx)=\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)\right]^{n}.$$

Полагая здѣсь $x=\dfrac{y}{n}$, найдемъ:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{y}{n}\right)=\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(y)\right]^{\frac{1}{n}}.$$

На основаніи этихъ равенствъ, находимъ:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{xm}{n}\right)=\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{x}{n}\right)\right]^{m}=\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)\right]^{\frac{m}{n}}.$$

Иными словами, при всѣхъ раціональныхъ значеніяхъ μ имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(\mu x)=\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)\right]^{\mu}.$$

А ввиду непрерывности функціи это равенство сохраняется также для ирраціональныхъ значеній μ.

Полагая здѣсь $\mu=z$, а $x=1$, находимъ:

$$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(z)=z\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(1).$$

Обозначая натуральный логориѳмъ $\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(1)$ черезъ $\left(-\frac{1}{r}\right)$, найдемъ окончательно

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(z)=e^{-\frac{z}{r}}. \qquad \text{XX } a)$$

Величина z означаетъ здѣсь длину прямолинейнаго отрѣзка и потому выражается всегда положительнымъ числомъ. Ввиду того, что въ аналитическихъ изслѣдованіяхъ очень удобно располагать функціей $\Pi(x)$ и въ томъ случаѣ, когда аргументъ имѣетъ отрицательное значеніе, Лобачевскій вводитъ соглашеніе разумѣть подъ символомъ $\Pi(-z)$ наименьшій уголъ, который опредѣляется аналогичнымъ уравненіемъ:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(-z)=e^{\frac{z}{r}}. \qquad \text{XX } b)$$

Перемножая уравненія XX a) и XX b), находимъ

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(z)\,.\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(-z)=1,$$

откуда

$$\Pi(z)+\Pi(-z)=\pi. \qquad \text{XXI}$$

Если подставимъ значеніе функціи $\Pi(-z)$, опредѣляемое уравненіемъ XXI, въ уравненія XV, XVI и XVII, то убѣдимся, что при отрицательныхъ значеніяхъ одного или обоихъ аргументовъ, они переходятъ одни въ другія. Изъ этого слѣдуетъ, что эти соотношенія остаются справедливыми и для отрицательныхъ аргументовъ.

Изъ уравненія XVIII уже легко получить:

$$\operatorname{tg}\Pi(z)=\frac{2e^{-\frac{z}{r}}}{1-e^{-\frac{2z}{r}}}=\frac{2}{e^{\frac{z}{r}}-e^{-\frac{z}{r}}} \qquad \text{XXII } a)$$

$$\cos\Pi(z)=\frac{e^{\frac{z}{r}}-e^{-\frac{z}{r}}}{e^{\frac{z}{r}}+e^{-\frac{z}{r}}} \qquad \text{XXII } b)$$

$$\sin\Pi(z)=\frac{2}{e^{\frac{z}{r}}+e^{-\frac{z}{r}}}. \qquad \text{XXII } c)$$

Уравненіе XX a) Лобачевскій считаетъ основнымъ въ своей геометрической системѣ. И въ самомъ дѣлѣ, уравненія III—XII содержатъ стороны треугольниковъ только подъ знакомъ функціи $\Pi(x)$; поэтому только совмѣстно съ уравненіемъ XVIII они дѣйствительно устанавливаютъ метрическія соотношенія геометріи; правильнѣе, только при наличности этого уравненія становится дѣйствительно возможнымъ опредѣлять однѣ величины въ зависимости отъ другихъ. Такъ напримѣръ, если намъ даны катеты a и b прямоугольнаго треугольника, то при помощи уравненія XX a) мы найдемъ функціи $\Pi(a)$ и $\Pi(b)$. Тогда уравненіе VII опредѣляетъ $\Pi(c)$; но, чтобы найти гипотенузу c, намъ снова прійдется прибѣгнуть къ уравненію XX a).

В. Каганъ (Спб.).

(Продолженіе слѣдуетъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Писаніе металлами на стеклѣ. Алюминій въ видѣ карандаша, какъ сообщаетъ Ch. Margot, (ассистентъ при физ. каб. Женевскаго университета), обладаетъ способностью оставлять металлическій слѣдъ на стеклѣ и вообще веществахъ кремнистыхъ. Эти слѣды настолько прочны, что ихъ нельзя ни стереть, ни отмыть. Особенно хорошо удается рисовать на влажномъ стеклѣ, напр. если на него подышать. Такимъ образомъ можно на стеклѣ дѣлать различные рисунки. Для успѣшнаго выполненія такихъ рисунковъ необходимо, чтобы стекло было совершенно чисто, безъ всякихъ слѣдовъ жира на поверхности; съ другой стороны карандашъ нужно хорошо заострить и потереть о наждачную бумагу. — Если на стекло съ такимъ рисункомъ подѣйствовать соляной кислотой или растворомъ ѣдкаго кали, то алюминій исчезаетъ и рисунокъ остается какъ-бы вытравленнымъ. Были произведены опыты съ цѣлью узнать, не обладаютъ ли и другіе металлы такимъ свойствомъ. Въ результатѣ оказалось, что тѣмъ-же свойствомъ, только въ различной степени, обладаютъ: магній, кадмій и цинкъ. Магніемъ рисовать очень легко, особенно на влажномъ стеклѣ, но рисунокъ получается очень непрочный, исчезающій черезъ нѣсколько часовъ. Рисунки, сдѣланные кадміемъ, не такъ красивы и скоро тускнѣютъ. Цинкъ рисуетъ только при очень сильномъ надавливаніи и на совершенно сухомъ стеклѣ. Дальнѣйшіе опыты показали, что эти металлы оставляютъ слѣды на топазѣ, рубинѣ, изумрудѣ и кварцѣ. На алмазѣ, напротивъ, ни одинъ изъ нихъ не оставляетъ слѣдовъ, такъ что этимъ способомъ можно отличить алмазъ отъ всякихъ поддѣлокъ. — Есть ли это приставаніе металловъ къ стеклу и др. веществамъ явленіе химическое или молекулярное — пока неизвѣстно. (Révue scient.).

К. Смоличъ (Умань).

Вліяніе низкихъ температуръ на фосфоресценцію. — Р. Пиктэ сообщилъ въ Парижской Академіи Наукъ результаты интересныхъ изслѣдованій, произведенныхъ имъ съ цѣлью опредѣлить дѣйствіе сильнаго охлажденія на способность тѣлъ фосфоресцировать. Послѣ первыхъ опытовъ, показавшихъ полное уничтоженіе фосфоресценціи при очень низкой температурѣ, онъ пожелалъ опредѣлить ту предѣльную температуру, при которой уничтожается свѣченіе. Съ этою цѣлью онъ охладилъ спиртъ до — 75° и выставилъ на солнечный свѣтъ трубки съ фосфоресцирующимъ порошкомъ; затѣмъ, быстро войдя въ темную комнату, онъ погрузилъ трубки въ сосудъ со спиртомъ; стѣнки сосуда при помощи губки, напитанной спиртомъ, постоянно освобождались отъ инея. Яркое свѣченіе трубки вполнѣ исчезло, какъ только поверхность порошка была доведена до—60° или—70°. Внезапность, съ какою исчезъ свѣтъ въ этомъ опытѣ, указываетъ на то, что въ моментъ исчезновенія свѣта только поверхность приняла температуру спирта или же температуру, близкую къ ней. Продержавъ болѣе получаса трубки въ холодѣ и вынувъ ихъ изъ спирта, онъ предоставилъ имъ нагрѣваться черезъ лучеиспусканіе *въ темнотѣ* и снова замѣтилъ свѣченіе въ такой же степени, какъ и до охлажденія ихъ. — Эти послѣдовательныя явленія были тождественны для всѣхъ фосфоресцирующихъ веществъ. При потуханіи всѣ оттѣнки свѣченія—голубые, зеленые, оранжевые—испускаемые сѣрнистыми металлами, прежде чѣмъ исчезнуть переходятъ въ желтовато-землистый. Снова повторивъ опыты, Пиктэ убѣдился, что осадокъ инея или влаги, всегда покрывающій сильно охлажденныя тѣла, нисколько не содѣйствовалъ уничтоженію свѣченія и нисколько не возмутилъ констатированныхъ выше результатовъ.

Желая изслѣдовать, не способна ли охлажденная среда поглощать лучи, онъ воспользовался свѣтомъ магнія въ темнотѣ, чтобы возбудить фосфоресценцію трубокъ *черезъ* охлажденный спиртъ. Въ этомъ опытѣ трубки свѣтились. Когда же онѣ были погружены въ спиртъ при—70°, свѣченіе прекратилось. — Не подлежитъ сомнѣнію поэтому, говоритъ Пиктэ, что для фосфорическаго свѣченія требуется нѣкоторое движеніе частицъ тѣла. При охлажденіи тѣлъ тепловыя колебанія постепенно замираютъ, свѣтовыя волны исчезаютъ и фосфоресценція прекращается. (Rèvue scient.). *К. Смоличъ* (Умань).

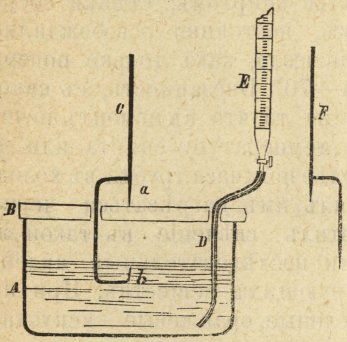
Усовершенствованіе въ машинѣ Wimshurst'a.—Въ концѣ сентября въ Париж. Акад. Наукъ P. v. Schaffers сдѣлалъ докладъ о машинѣ Wimshurst'a. По его изслѣдованіямъ арматуры машины ни въ одной изъ точекъ не нейтральны; знаки зарядовъ мѣняются на одномъ кругѣ подъ щетками діаметральнаго проводника, на другомъ—около гребней. Изъ этого слѣдуетъ, что нѣкоторыя части машины излишни и машина въ своемъ настоящемъ видѣ даетъ половину того, чего можно было бы отъ нея ожидать.

Schaffers предложилъ машину устроить слѣдующимъ образомъ: передъ однимъ кругомъ помѣстить два изолированныхъ гребня, передъ другимъ—тоже два подъ угломъ 60⁰ къ линіи, соединяющей первые. Лѣвые гребни соединить съ однимъ электродомъ, правые съ другимъ. Всѣ четыре гребня снабдить щетками. Наконецъ, на разстояніи 30⁰—35⁰ отъ гребней въ направленіи вращенія каждаго круга помѣстить діаметральный проводникъ съ остріями, но безъ щетокъ. — Устроенная такимъ образомъ машина даетъ вдвое болѣе обыкновенной. (Rèvue scient).

К. Смоличъ (Умань).

ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Приборъ для точнаго измѣренія толщины небольшихъ предметовъ, могущій во многихъ случаяхъ замѣнить сферометръ, придуманъ G. Guglielmo. Приборъ состоитъ изъ широкаго стеклянаго сосуда *A* по возможности строго цилиндрической или призматической формы, (фиг. 27), покрытаго плоской стеклянной пластинкой *B* съ двумя отверстіями. Въ одно изъ этихъ отверстій проходитъ конецъ вертикальнаго металлическаго стержня *C*, изогнутаго, какъ показано на рисункѣ, и снабженнаго двумя остріями *a* и *b*. Въ другое отверстіе проходитъ каучуковая трубка *D*, соединенная съ градуированной бюреткой *E*. Для измѣренія толщины какого нибудь предмета, скажемъ стеклянной пластинки, въ сосудъ *A* наливаютъ воды или ртути (тогда вмѣсто стержня *C* берется стержень нѣсколько иной формы, изображенный при *F*) до тѣхъ поръ, пока конецъ острія *b* не совпадетъ съ уровнемъ жидкости. Предметъ, толщина котораго измѣряется, подкладывается подъ остріе *a*, вслѣдствіе чего стержень *C* подымается и остріе *b* выходитъ изъ жидкости. Тогда изъ бюретки *E* приливаютъ жидкости до тѣхъ поръ, пока конецъ острія *b* не совпадетъ снова съ уровнемъ жидкости въ сосудѣ *A*. Дѣля объемъ прилитой жидкости на площадь поперечнаго сѣченія сосуда, получаемъ, очевидно, искомую толщину. Приборъ допускаетъ измѣренія съ точностью до 0,001 mm, т. е. не уступаетъ въ этомъ отношеніи лучшимъ сферометрамъ, и, кромѣ того, легко можетъ быть изготовленъ собственноручно, такъ какъ почти все необходимое для его изготовленія, находится во всякой лабораторіи.



Фиг. 27.

В. Г.

Электрическій рулевой. Приборъ этотъ, изобрѣтенный лейтинантомъ французскаго флота Bersier, имѣетъ цѣлью замѣнить на прямолинейномъ курсѣ ручной способъ управленія судномъ — автоматическимъ способомъ. Гдѣ нибудь въ отдаленіи отъ компаса помѣщается батарея съ небольшой электровозбудительной силой; полюсы этой батареи соединены съ компасомъ такъ, что при уклоненіи сѣвернаго конца стрѣлки отъ занимаемаго имъ при правильномъ курсѣ положенія въ ту либо другую сторону, замыкается токъ того либо другого направленія. Токъ этотъ проходитъ по обмоткѣ одного изъ электромагнитовъ, отдаленныхъ отъ компаса, и приводитъ въ дѣйствіе динамо-машину, которая, въ свою очередь, дѣйствуетъ на другую, болѣе сильную динамо-машину, дѣйствующую уже непосредственно на руль. Кромѣ того этотъ же приборъ отмѣчаетъ всѣ уклоненія отъ курса на листѣ бумаги, приводимомъ въ движеніе часовымъ механизмомъ. Изобрѣтеніе это испытывалось нѣсколько мѣсяцевъ во французскомъ флотѣ, причемъ оказалось, что уклоненія отъ курса равны 0,5°—1°. Такая точность не достигается при обыкновенномъ ручномъ способѣ.

ЗАДАЧИ.

№ 108. На отрѣзкѣ AB намѣчена точка C, изъ A и B возставлены перпендикуляры AA_1 и BB_1 такъ, что $AA_1 = BC$ и $BB_1 = AC$; изъ C опущенъ перпендикуляръ CC_1, равный AB. Усмотрѣть, что центры квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ треугольника $A_1B_1C_1$ и обращенныхъ во внутреннее поле его, совпадаютъ съ точками A, B, C.

А. Гольденбергъ (Спб.).

№ 109. Данъ кругъ, центръ котораго въ точкѣ C, и точка A внѣ его. Найти внутри круга такую точку B, чтобы углы, подъ которыми видны изъ точки A хорды, проходящія черезъ B, дѣлились прямою AC пополамъ.

М. Зейлигеръ (Одесса).

№ 110. Опредѣлить сумму

$$a(a+r)+(a+r)(a+2r)+(a+2r)(a+3r)+\cdot\cdot\cdot\cdot+[a+(n-1)r](a+nr).$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 111. На сторонахъ BC и CA треугольника ABC отложены отрѣзки $BD = \frac{BC}{n}$ и $CE = \frac{AC}{n}$. Черезъ вершину C и точку O пересѣченія прямыхъ AD и BE проведена прямая CO, пересѣкающая сторону AB въ точкѣ F. Не пользуясь извѣстной теоремой въ теоріи трансверсалей, опредѣлить, какую часть стороны AB составляетъ отрѣзокъ BF.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 112. Въ треугольникѣ ABC проведены биссекторы двухъ его угловъ A и B. Биссекторъ угла B дѣлится биссекторомъ угла A въ отношеніи $m:n$ и дѣлитъ сторону AC въ отношеніи $p:q$. Вычислить стороны треугольника ABC, если периметръ его равенъ $2s$.

И. Ок—чъ (Варшава).

№ 113. Рѣшить систему

$$by+\sqrt[3]{\frac{a^2x^2}{16}+4b^2y^2-abxy}=0{,}125ax+\sqrt{-1}.\sqrt[6]{0{,}125(0{,}25ax-2by)^5}$$

$$xy = 8ab.$$

А. Бачинскій (Холмъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 181 (1 сер.). Предполагая, что k данное цѣлое положительное число, найти предѣлъ выраженія

$$\frac{1^k+2^k+3^k+\cdot\cdot\cdot\cdot+(n-1)^k}{n^{k+1}},$$

когда n будетъ безпредѣльно возрастать.

1. Если $a > b$, то изъ тожества:

$$\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}=\sum_{0}^{k} a^i b^{k-i}$$

получимъ

$$(k+1)b^k < \frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b} < (k+1)a^k.$$

Полагая въ частности, что $a=b+1$, получимъ справедливыя для всякаго цѣлаго и положительнаго b неравенства

$$(k+1)b^k < (b+1)^{k+1}-b^{k+1} < (k+1)(b+1)^k.$$

Если въ неравенствѣ

$$(k+1)b^k < (b+1)^{k+1}-b^{k+1}$$

положимъ послѣдовательно

$$b=1,2,3,\ldots\ldots,(n-1)$$

и затѣмъ сложимъ полученныя неравенства, то получимъ:

$$(k+1)\left[1^k+2^k+3^k+\cdots+(n-1)^k\right] < n^{k+1}-1^{k+1} \quad \ldots (1).$$

Если въ неравенствѣ

$$(b+1)^{k+1}-b^{k+1} < (k+1)(b+1)^k$$

положимъ послѣдовательно

$$b=0,1,2,\ldots\ldots\ldots,(n-2)$$

и затѣмъ сложимъ полученныя неравенства, то получимъ

$$(n-1)^{k+1} < (k+1)\left[1^k+2^k+3^k+\cdots+(n-1)^k\right] \quad \ldots (2).$$

Сопоставляя неравенства (1) и (2), получимъ

$$(n-1)^{k+1} < (k+1)\left[1^k+2^k+3^k+\cdots+(n-1)^k\right] < n^{k+1}-1,$$

откуда

$$\frac{1}{k+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k+1} < \frac{1^k+2^k+3^k+\cdots+(n-1)^k}{n^{k+1}} < \frac{1}{k+1}\left(\frac{n^{k+1}-1}{n^{k+1}}\right),$$

или

$$\frac{1}{k+1}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1} < \frac{1^k+2^k+3^k+\cdots+(n-1)^k}{n^{k+1}} < \frac{1}{k+1}\left(1-\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

Разность

$$\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{1}{n^{k+1}}\right)-\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1}=\frac{1}{k+1}\left[1-\frac{1}{n^{k+1}}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1}\right]$$

съ увеличенiемъ n стремится очевидно къ нулю, а потому

$$\lim\left[\frac{1^k+2^k+3^k+\cdots+(n-1)^k}{n^{k+1}}\right]_{n=\infty}=\lim\left[\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1}\right]_{n=\infty}=\frac{1}{k+1}.$$

2. Развернувъ по биному Ньютона въ строку $(n+1)^{k+1}$, $n^{k+1}=$ $=[(n-1)+1]^{k+1}$, $(n-1)^{k+1}=[(n-2)+1]^{k+1}, \ldots, 3^{k+1}=(2+1)^{k+1}$, $2^{k+1}=$ $=(1+1)^{k+1}$ и сложивъ полученныя равенства, найдемъ:

$$(n+1)^{k+1}=1^{k+1}+(k+1)S_k+\frac{k(k+1)}{1.2}S_{k-1}+\frac{(k+1).k(k-1)}{1.2.3}S_{k-2}+\cdots+$$
$$+(k+1)S_1+S_0, \quad \ldots \ldots \quad (a),$$

гдѣ S_k есть сумма k-тыхъ степеней чиселъ натуральнаго ряда отъ 1 до n, S_{k-1} есть сумма ихъ $(k-1)$-ыхъ степеней и т. д.

Такъ какъ $S_0=n$, $S_1=\frac{n^2+n}{2}$, то равенство (a) показываетъ, что S_k есть цѣлое алгебраическое выраженіе степени $(k+1)$ относительно числа n; S_{k-1} есть многочленъ степени k и т. д. Зная это, не трудно найти общее выраженіе для S_k. Положимъ

$$S_k=An^{k+1}+Bn^k+Cn^{k-1}+\cdots\cdots+Mn+N, \quad . \quad . \quad (b)$$

гдѣ коэффиціенты $A, B, C, \ldots M, N$ не зависятъ отъ n. Поэтому

$$S_k+(n+1)^k=A(n+1)^{k+1}+B(n+1)^k+C(n+1)^{k-1}+\cdots+M(n+1)+N. \quad . \quad (c).$$

Вычтя равенство (b) изъ выраженія (c), получимъ:

$$(n+1)^k=A[(n+1)^{k+1}-n^{k+1}]+B[(n+1)^k-n^k]+C[(n+1)^{k-1}-n^{k-1}]+\cdots+$$
$$+M[(n+1)-n].$$

Раскрывъ скобки и сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ n, найдемъ:

$$1=A(k+1), \text{ откуда } A=\frac{1}{k+1}; \quad \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

$$k=A\frac{(k+1)k}{1.2}+Bk, \text{ откуда } B=\frac{1}{2} \quad \ldots \ldots \quad (\beta)$$

$$\frac{k(k-1)}{1.2}=A\frac{(k+1).k.(k-1)}{1.2.3}+B\frac{k(k-1)}{1.2}+C(k-1), \text{ откуда } C=\frac{k}{12} \ldots (\gamma)$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$D=0, E=-\frac{1}{120}\cdot\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}, F=0, G=\frac{1}{252}\cdot\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{1.2.3.4.5.},$$

и т. д.

Продолжая вычисленіе коэффиціентовъ, убѣдимся, что всѣ четные коэффиціенты, начиная съ 4-го коэффиціента D, равны нулю, нечетные же, начиная съ 3-го, знакоперемѣнны и каждый изъ нихъ, напр. M, состоитъ изъ коэффиціента бинома Ньютона, стоящаго при той же степени числа n, при которой стоитъ M въ выраженіи (b), и нѣкотораго численнаго множителя. Эти численные множители, извѣстные подъ именемъ Бернулліевыхъ чиселъ, суть:

$$\frac{1}{12}, -\frac{1}{120}, \frac{1}{252}, -\frac{1}{240}, \frac{1}{132}, -\frac{691}{32760}, \frac{1}{12}, -\frac{3617}{8160}, \frac{43867}{14364}, \ldots$$

Поэтому

$$S_k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \frac{k}{12}n^{k-1} - \frac{1}{120}\cdot\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}n^{k-3} +$$
$$+ \frac{1}{252}\cdot\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{1.2.3.4.5}n^{k-5} + \ldots\ldots (d)$$

Такъ какъ при $n=0$ и $S_k=0$, то приведенный рядъ не долженъ содержать члена съ n^0; потому, при вычисленіи какой нибудь суммы при помощи этого ряда, нужно брать столько членовъ, чтобы послѣдній содержалъ n въ первой степени. Очевидно, что при четномъ k членовъ разложенія будетъ $k/_2+2$, при нечетномъ $\frac{k-1}{2}+2$.

Изъ равенства (d) очевидно, что

$$\lim \frac{S_k}{n^{k+1}} = \lim\left[\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2n} + \frac{2}{12n^2} - \ldots\ldots\right];$$

при $n=\infty$, очевидно, имѣемъ:

$$\lim \frac{S_k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Пусть $1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (n-1)^k = S'_k$; тогда

$$\frac{S_k - S'_k}{n^{\kappa+1}} = \frac{1}{n},$$

т. е. разность между $\frac{S_\kappa}{n^{\kappa+1}}$ и $\frac{S'_\kappa}{n^{\kappa+1}}$ при $n=\infty$ становится менѣе всякой данной величины, а слѣдовательно

$$\lim \frac{S'_\kappa}{n^{\kappa+1}} = \lim \frac{S_\kappa}{n^{\kappa+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Задача эта имѣетъ большой историческій интересъ. Еще Архимедъ въ сочиненіи о спираляхъ касается этого вопроса. Каваліери (1598—1647), ученикъ Галилея, основалъ отчасти на этомъ свойствѣ чиселъ свой методъ недѣлимыхъ, послужившій къ опредѣленію площадей криволинейныхъ фигуръ и рѣшенію многихъ задачъ, рѣшаемыхъ въ настоящее время интегральнымъ исчисленіемъ. Ферматъ, Роберваль, Паскаль и Валлисъ интересовались этимъ предѣломъ съ точки зрѣнія, являющейся предвозвѣстницей ученія объ опредѣленныхъ интегралахъ.

И. Пламеневскій (Т.-Х.-Шура); *С. Шохоръ-Троцкій*, *Н. Артемьевъ* (Спб.); *П. Никульцевъ* (Смоленскъ); *Н. Паатовъ* (Тифлисъ).

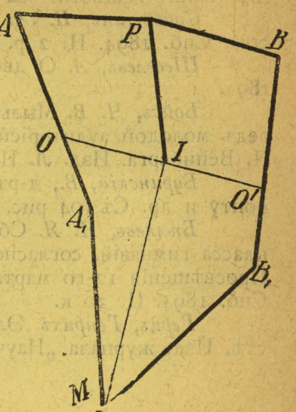
ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *Н. Новикова* (Троицкъ) 83, 85, 86 (3 сер.); *П. Бѣлова* (с. Знаменка) 91 (3 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 171 (1 сер.), 462, 485 (2 сер.); *С. Бабанской* (Тифлисъ) 480, 495 (2 сер.), 12, 28, 34, 36, 40 (3 сер.), 6 (мал. вопр.); *П. Штеллинга* (Тифлисъ) 82 (3 сер.); *Д. Татаринова* и *Б. Гуминскаго* (Троицкъ) 83, 85, 86 (3 сер.); *В. Веселовскаго* (Каменецъ-Подольскъ) 98 (3 сер).

ОСТАЛИСЬ НЕРѢШЕННЫМИ изъ предложенныхъ въ прошломъ XVI семестрѣ задачи 21, 24, 32, 47, 52, 58, 59, 61, 67, 70, 73.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 9-го Ноября 1894 г.
„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

При этихъ условіяхъ можно составить различныя системы изъ 7 стержней, чертящія прямую и представляющія соединеніе системъ II и III, напр. какъ на фиг. 29.



Фиг. 29.

Авторъ говоритъ, что на основаніи ур-нія (1), при $d = a$, т. е. когда система I можетъ дѣлать полный оборотъ, онъ нашелъ еще другія, болѣе сложныя системы, чертящія прямую. Въ концѣ статьи, въ видѣ примѣровъ, указаны двѣ такія системы изъ 9 стержней.

Bibliographie. Leçons sur les coordonnées tangentielles, par *C. Papelier*. 1-e partie. Paris, 1894. Prix: 5 fr. Извлеченіе изъ предисловія и оглавленіе.

Note sur un lieu géometrique (Suite). (См. обзоръ M. 1894—№ 4 въ „Вѣст." № 196) Редакція сообщаетъ нѣсколько геометрическихъ доказательствъ ур-нія *Milne*'а, полученныхъ отъ разныхъ лицъ. Самое элементарное изъ нихъ принадлежитъ Déprez и Juel'ю.

Solutions de questions proposées. №№ 836, 837, 866, 868, 869.

Questions d'examen. №№ 622—632.

Questions proposées. №№ 937—945.

Д. Е.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ РУССКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Наблюденія метеорологической обсерваторіи университета св. Владиміра въ Кіевѣ, издаваемыя проф. П. И. Броуновымъ. Октябрь. 1893. (Отт. изъ „Университетскихъ Извѣстій" за 1894 г.). Кіевъ. 1894.

Пастеръ. Винная кислота и ея значеніе для ученія о строеніи матеріи (Объ асимметріи органическихъ соединеній). Лекція I. Круговая поляризація и кристаллическія формы. Лекція II. Организмы и строеніе матеріи. Изд. журнала „Научное Обозрѣніе". Спб. 1894. Ц. 30 к., съ перес. 35 к.

Соловьевъ, М. Элементарный учебникъ минералогіи и основанія геологіи. Руководство составлено примѣнительно къ новымъ (1888 г.) программамъ Министерства Народн. Просв. для реальныхъ училищъ. Изд. К. Риккера. Спб. 1894.

Труды физико-медицинскаго общества, учрежденнаго при Имп. московскомъ университетѣ въ 1804 г. 1894 г. № 1. Декабрь 1893 г. и январь—апрѣль 1894 г. Москва.

Шведовъ, Ѳ. Н. Методика физики. Выпускъ 1-й. Введеніе. (Отт. изъ журнала „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики"). Одесса. 1894. Ц. 45 к.

Шиллеръ, Н. Н., проф. О нѣкоторыхъ новѣйшихъ взглядахъ на методы рѣшенія вопросовъ физики. (По поводу статьи П. А. Некрасова: „Термодинамика и электричество" и мнѣнія орд. проф. П. Некрасова о диссертаціи кн. Б. Голицына). (Отт. изъ „Университетскихъ извѣстій" за 1894 г.). Кіевъ. 1894.

Атласъ естественной исторіи. Основанъ проф. К. Арендтсомъ, передѣланъ проф. А. Ѳ. Брандтомъ. изд. 4-е, неизмѣненное, К. Риккера. Спб. 1894.

Базаровъ, А. и *Монтеверде, Н.* Душистыя растенія и эфирныя масла. Часть I. Общія свѣдѣнія о душистыхъ растеніяхъ и эфирныхъ маслахъ. Изд. департамента земледѣлія. Спб. 1894.

Веберъ, К. К., инж.-техн. Двигатели и проводы. Практическое руководство къ выбору, установкѣ и уходу за конными, вѣтряными, водяными, паровыми и керосиновыми двигателями и по постройкѣ вѣтряныхъ и водяныхъ двигателей. Съ атласомъ, состоящимъ изъ 44 табл. съ 250 рис. Изд. А. Девріена. Спб. 1894. Ц. съ атласомъ 5 р.

Наблюденія метеорологической обсерваторіи университета св. Владиміра въ

Кіевѣ, издаваемыя проф. П. И. Броуновымъ. Декабрь 1893 г. (Отт. изъ „Университетскихъ Извѣстій" за 1894 г.). Кіевъ. 1894 г.

Субботинъ, П. А. Руководство для изученія фабрично-заводского счетоводства. Спб. 1894. Ц. 2 р. съ перес.

Шевелевъ, А. О двойныхъ звѣздахъ. Очерки астрономіи. Выпускъ I. Москва. 1894.

Бойсъ, Ч. В. Мыльные пузыри. Четыре лекціи о волосности, прочитанныя передъ молодой аудиторіей. Пер. съ франц. перевода Ш. Эд. Гильома подъ ред. Б. П. Вейнберга. Изд. Л. Пантелеева. Спб. 1894. Ц. 60 к.

Буринскій, В., д-ръ. Научныя развлеченія. Состав. по Гуду, Тиссандье, Леконту и др. Съ 104 рис. (Полезная библіотека). Спб. 1894. Ц. 50 к,

Бѣляевъ, И. Я. Сборникъ стереометрическихъ задачъ для учениковъ VIII класса гимназій, согласно съ требованіями § 57 утвержденныхъ Министромъ Народ. Просвѣщенія 12-го марта 1891 г. правилъ объ испытаніяхъ учениковъ гимназій. Спб. 1894. Ц. 30 к.

Герцъ, Генрихъ. Электрическая сила. I. Теоріи. II опыты. Съ 6 черт. въ текстѣ. Изд. журнала „Научное Обозрѣніе". Спб. 1894.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ АНГЛІЙСКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Физика, астрономія, физ. географія, метеорологія.

Hall, A. D. Lessons and Exercises in Heat: for Use in Shools and University Classes. 12mo. pp. 210. Rivington. 2 s. 6 d.

Hopkins, G. M. Experimental Science: Elementary, Practical, and Experimental Physics. 14th edit. revised and enlarged, 8vo. pp. 832. Spon. 16s.

Knott, C. G. Electricity and Magnetism. Elementary Course adapted to the Syllabus of the South Kensington Science Departement. 12mo. pp. 238. Chambers. 2 s. 6 d.

Merrifield, I. Magnetism and Deviation of the Compass. New and revised edit. 18mo. pp. 142. Longmans. 2 s.

Stewart, R. W. The Tutorial Physics. Vol. II: a Text-Book of Heat. With numerous Diagrams and Examples. 12mo. pp. 292. (Univ. Corr. Coll. Tutorial Series). Clive. 3 s. 6 d.

Ball, Sir *R. S.* In the High Heavens. Post 8vo. pp. 378. Isbister. 7 s. 6 d.

Goodwin, H. B. Problems in Navigation and Nautical Astronomy. Part II: Selected from Papers set at the Royal Naval College, between the years 1887 and 1893. With Answers and Hints to Solution. 8vo. pp. 56. Philip. 2 s. 6 d.

Gregory, R. A. The Vault of Heaven: an Elementary Text-Book of Modern Physical Astronomy. Post 8vo. pp. 188. (University Extension Series). 2 s. 6 d.

Webb, T. W. Celestial Objects for Common Telescope. 5th. edit. revised and greatly enlarged by Rev. T. E. Espin. 2 vols. Vol. I. Post 8vo. pp. 246. Longmans. 6 s.

Draper, C. H. Heat and the Principles of Thermodynamics. With many Illustrations and Numerical Examples. Post 8vo. pp. 340. (Blackie's Science Text-Books). Blackie. 4 s. 6 d.

Foundations of the Molecular Theory: Papers and Extracts by John Dalton, Joseph Louis Gay-Lussac, and Amadeo Avogadro, 1808—11. Cr. 8vo. (Edinburgh, W. F. Clay). pp. 51. (Alembic Club Reprints, № 4). Simpkin. 1 s. 6 d. net.

Glazebrook, R. T. Physical Optics. 3rd edit. 12mo. pp. 474. Longmans. 6 s.

Lovibond, I. W. Measurement of Light and Colour Sensations: a New Method of Investigating the Phenomena of Light and Colour by means of the Selective Absorption in coloured glass graded into scales of equivalent colour value. 8vo. pp. 132. Gill. 7 s. 6 d.

Pinkerton, R. H. Hydrostatics and Pneumatics: the Mechanics of Fluids. Post 8vo. pp. 340. (Blackie's Science Text-Books). Blackie. 4 s. 6 d.

Jackson, D. C. A Text-Book on Electro-Magnetism and the Construction of Dynamos. Vol. 1. Post 8vo. pp. 292. Macmillan. 9 s. net.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

L'ASTRONOMIE

№ 9.—1894.

La planète Mars. *C. Flammarion.* Блестящія точки за терминаторомъ Марса были наблюдаемы во время каждой оппозиціи Марса съ 1890 г., а именно: 27 мая 1890 г., 2 и 17 іюля, 4 и 24 августа 1892 г., 8 и 28 іюня, 19 и 29 іюля, 23 и 24 августа 1894 г. Чаще всего онѣ замѣчались въ однихъ и тѣхъ-же мѣстахъ поверхности Марса, а именно въ Tempé и Noachis, такъ что эти мѣстности слѣдуетъ считать наиболѣе гористыми (если только гипотеза Campbell'я оправдается). Къ статьѣ приложены наблюденія Antoniadi, произведенныя въ обсерваторіи Juvisy съ 1 іюня по 5 августа 1894 г,

Observations de Mars. *P. Lovell.* Эти наблюденія произведены въ обсерваторіи, построенной американцемъ P. Lovell'емъ въ Аризонѣ (Flagstaft) на высотѣ 2300 м. надъ уровнемъ моря; главная цѣль обсерваторіи—изученіе условій жизни на планетахъ. *Резюме наблюденій съ 31 мая по 24 іюня.* Южная полярная часть Марса была окаймлена темной полосой, подвигавшейся къ полюсу по мѣрѣ таянія снѣговъ,—изъ чего можно заключить, что эта полоса жидкая и образовалась отъ таянія снѣга; ширина полосы между 320° и 220° долготы была около 560 кил., къ В. же (отъ наблюдателя, помѣщеннаго на Марсѣ) она уменьшалась до половины этой цифры. Около 290° долготы это полярное море образовало заливъ. Полярная часть пересѣчена темной щелью, ширина которой 15 іюня достигала 350 кил.; появленіе этой щели можно объяснить предположеніемъ, что различныя части полярной области не одинаково возвышаются надъ уровнемъ моря, такъ что части болѣе близкія къ полюсу могли очиститься отъ снѣга раньше, чѣмъ части болѣе удаленныя. 8, 10, 11, 13 и 14 іюня были замѣчены блестящія точки въ полярной части—вѣроятно горныя вершины.—При хорошихъ атмосферныхъ условіяхъ материки имѣли цвѣтъ розовато-оранжевый, моря—голубовато-зеленый; при восходѣ солнца моря синія, материки и острова розовые. Цвѣтъ морей не есть результатъ контраста, такъ какъ при измѣненіи цвѣта материковъ въ менѣе желтый, моря должны-бы были въ такомъ случаѣ пожелтѣть, а не посинѣть.—Облаковъ нельзя было замѣтить. По всей вѣроятности вода на поверхности материковъ доставляется не облаками. а громадными потоками, идущими отъ полюса къ экватору во время весенняго таянія снѣговъ.—Къ статьѣ приложены и самыя наблюденія, и 6 рисунковъ.

Les canaux de Mars. *I. R. Holy.* Авторъ разбираетъ гипотезы, пытающіяся объяснить происхожденіе такъ называемыхъ каналовъ на Марсѣ. Наиболѣе вѣроятной ему кажется гипотеза, считающая ихъ трещинами въ твердой корѣ планеты. Трещины эти произошли отъ напора газовъ въ тѣ времена, когда на расплавленномъ ядрѣ планеты образовалась тонкая твердая кара. Во пользу этой гипотезы говоритъ то обстоятельство, что нѣкоторые изъ каналовъ (6—9), начинаясь на материкахъ, продолжаются на островахъ и даже Pickering замѣтилъ продолженіе нѣкоторыхъ изъ нихъ на днѣ морскомъ.—Въ настоящее время это вѣроятно овраги, по дну которыхъ текутъ рѣки: по одному и тому же оврагу, начинаясь съ какой-нибудь средней болѣе возвышенной точки, могутъ течь двѣ рѣки въ противоположныя стороны. Вѣроятно бока овраговъ покрыты растительностью; этимъ предположеніемъ можно объяснить такой случай: 26 сентября 1877 г. одинъ каналъ (l'Ambrosie) казался широкимъ, въ ноябрѣ же 1879 г. онъ имѣлъ видъ тонкой линіи; объясненіе: во время перваго наблюденія тамъ было лѣтнее солнцестояніе и растительность была богатая, во время же второго наблюденія была осень и, стало быть, растительность теряла листву.

Les mers martiennes. *Pickering* (31 іюля) констатировалъ, что свѣтъ большихъ озеръ Марса не поляризованъ. Пожалуй это и не озера?

Les comètes capturées par Jupiter. По изслѣдованіямъ Ranyard'a афеліи большей части кометъ, принадлежащихъ къ семьѣ Юпитера, находятся по одну и ту же сторону его орбиты; восходящіе узлы этихъ кометъ расположены весьма близко отъ орбиты Юпитера; слѣд. если въ моментъ прохожденія кометы черезъ узелъ Юпитеръ находился по близости, то, благодаря своей массѣ, онъ могъ сильно измѣнить орбиту кометы; поэтому весьма вѣроятно, что всѣ эти орбиты въ свое время были возмущены Юпитеромъ. Если принять во вниманіе, что солнечная система движется къ созвѣздію Геркулеса (прямое восхожденіе 269°) со скоростью 15 кил. въ секунду, Юпитеръ же по своей орбитѣ со средней скоростью 13 кил., то оказывается, что, находясь въ части своей орбиты діаметрально противоположной съ точкой весенняго равноденствія, онъ движется *въ пространствѣ* со скоростью 28 кил., въ противоположной же части со скоростью 2 кил.; большинство кометныхъ афеліевъ расположено около первой части, слѣд., идя ускореннымъ ходомъ, Юпитеръ увлекъ болѣе кометъ, чѣмъ при замедленномъ ходѣ, что вполнѣ и согласуется съ гипотезой, считающей кометы пришлецами изъ другихъ міровъ.—Земля встрѣчаетъ болѣе метеоровъ осенью, т. е. двигаясь медленно въ пространствѣ; если-бъ метеоры не были членами солнечной состемы, то она встрѣчала-бы болѣе метеоровъ весною.

La scintillation et les climats. *I. Landerer.* Авторъ изъ своихъ наблюденій надъ мерцаніемъ звѣздъ въ восточной части Испаніи вывелъ такое заключеніе: сильное мерцаніе звѣздъ бываетъ при сухихъ СЗ вѣтрахъ, причемъ появляются cirri, предвѣстники большихъ бурь. Этотъ резузьтатъ, повидимому противорѣчащій результату паблюденій Dufour'а, указываетъ на то, что зависимость между мерцаніемъ звѣздъ и погодой для каждаго климата иная, что и предвидѣлъ Dufour.

Méthode pour determiner les positions d'un corps céleste le long de son orbite. *C. Flammarion.* Недостатокъ мѣста и большіе размѣры чертежа не позволяютъ привести построенія цѣликомъ. Суть дѣла такова: проводимъ большую ось эллиптической орбиты (и принимаемъ ее $=2$); отмѣчаемъ фокусъ, въ которомъ находится солнце, съ правой стороны; строимъ на оси полукругъ; къ концамъ полуоси проводимъ касательпыя (вверхъ) равныя π и, принимая начало координатъ въ верхней точкѣ лѣвой касательной, а касательную за ось x, строимъ по точкамъ: 1) кривую $y=1-\cos\alpha$, $x=\alpha$, 2) циклоиду $y=1-\cos\alpha$, $x=\alpha-\sin\alpha$ и 3) кривую $y=1-\cos\alpha$, $x=\alpha-e\sin\alpha$, гдѣ e=эксцентрицитету планеты, кометы періодической или двойной звѣзды. Сравнивая послѣднее ур-іе ($x=\alpha-e\sin\alpha$) съ ур-іемъ Кеплера ($M=u-e\sin u$) видимъ, что если абсциссы послѣдней кривой принимать за среднія аномаліи, то соотвѣтствующія α будутъ означать эксцентрическія аномаліи u. По эксцентрической аномаліи построить истинную уже нетрудно. Замѣтимъ, что всѣ аномаліи Фламмаріонъ считаетъ отъ афелія.

Nouvelles de la science. Variétés.

К. Смоличъ (Умань).

№ 10.—1894.

Les amas d'étoiles. L'amas d'Hercule. *C. Flammarion.* Собраніе рисунковъ и фотографій звѣздной кучи въ Геркулесѣ, сдѣланныхъ въ разное время разными учеными, съ пояснительнымъ текстомъ и историческимъ очеркомъ.

L'étude des tremblements de terre au Japon. *A. Daubrée.* Въ послѣднее 20-лѣтіе въ Японіи стали дѣятельно заниматься изученіемъ землетрясеній. Во главѣ ученыхъ, посвятившихъ себя такому изученію, стоитъ Джонъ Мильнъ въ Токіо. Въ 1880 г. организовано сейсмологическое общество, печатающее ежегодно свои труды (на англ. яз.). Въ королевской обсерваторіи открыта кафедра сейсмологіи, основана центральная обсерваторія, снабженная спеціальными приборами, и 700 станцій для общихъ наблюденій. Недавно вышелъ 1-й томъ сейсмологическаго журнала, замѣнившаго издававшіеся прежде Transactions. Въ вышеуказанной литературѣ помимо описанія приборовъ и методовъ наблюденія находится много статистическихъ данныхъ. Напр. число толчковъ въ 1886 г. было 478 въ 1888—630, въ 1889—930. Имѣются описанія нѣкоторыхъ очень сильныхъ землетрясеній; напр. 28 октября 1891 г. подверглась землетрясенію площадь въ 10000 кв. кил., причемъ погибло 9900 чел., ранено 29000, совершенно разрушено 128750 домовъ; въ теченіе 7 дней насчитали до 6600 толчковъ. Съ неменьшимъ вниманіемъ наблюдались и слабые (микросейсмическіе) толчки, чувствительные только для приборовъ и являющіеся предвѣстниками сильныхъ землетрясеній.—Въ вышеупомянутыхъ сборникахъ немало мѣста отведено и вулканамъ которыхъ такъ много въ Японіи. Д. Мильнъ, пользуясь трудами Tsunashiro Wada,

Обложка
пщется

Обложка
ищется