Обложка
пщется

Обложка
пщется

XVII Сем. 1-го сентября 1894 г. № 2.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 194.

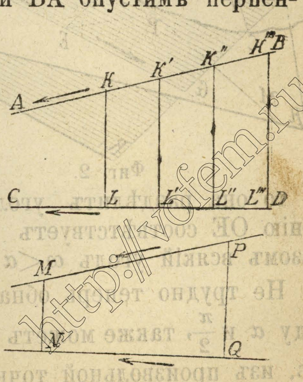
Содержаніе:

ОЧЕРКЪ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОБАЧЕВСКАГО.

(Продолженіе).*

V. Система Евклида въ геометріи Лобачевскаго.

Условимся называть „*полосой*“ часть плоскости, заключенную между двумя параллельными прямыми. Мы уже имѣли случай обнаружить, что всякія двѣ полосы могутъ быть приведены въ совмѣщеніе. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что мы имѣемъ двѣ полосы, ограниченныя—одна параллельными прямыми *BA* и *DC*, другая параллелями *PM* и *QN* (фиг. 1). Изъ произвольной точки K′ на прямой BA опустимъ перпендикуляръ K′L′ на вторую параллель. Такъ какъ разстояніе между двумя параллелями измѣняется отъ нуля до безконечности, то на прямой PM найдется точка P, которая отстоитъ отъ QN на разстояніи PQ, равное K′L′. Наложимъ теперь одну полосу на другую такимъ образомъ, чтобы точка Q упала въ точку L′ и прямая QN пошла бы по прямой DC. Тогда точка P упадетъ въ точку K′, и параллели PM и BA совмѣстятся: въ противномъ случаѣ изъ общей точки K′ выходили бы двѣ прямыя, параллельныя DC въ одномъ и томъ же направленіи.



Фиг. 1.

Изъ этого вытекаетъ, что уголъ параллельности MPQ, соотвѣтствующій нѣкоторому

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ №№ 174, 178, 179, 183, 187, 188, 189 и 190.

разстоянію PQ въ одной полосѣ, соотвѣтствуетъ тому же разстоянію во всякой другой полосѣ. Выражаясь языкомъ аналитическимъ, можно сказать, что уголъ параллельности (ω) представляетъ собой *непрерывную* и *однозначную* функцію разстоянія (x) той точки, изъ которой мы проводимъ параллель, отъ данной прямой. Для обозначенія этой функціи мы сохранимъ символъ, принятый Лобачевскимъ

$$\omega = \Pi(x).$$

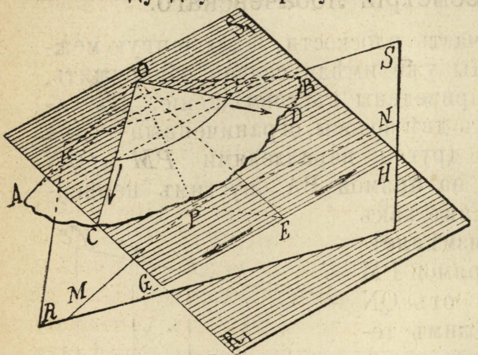
Мы уже видѣли въ прошлой главѣ, что этотъ уголъ постоянно возрастаетъ въ сторону параллелизма вмѣстѣ съ уменьшеніемъ перпендикуляра,—и, наоборотъ, постоянно убываетъ въ противоположномъ направленіи. Изъ этого слѣдуетъ, что каждому углу параллельности (ω) въ свою очередь соотвѣтствуетъ строго опредѣленное разстояніе x; такъ что это разстояніе, въ свою очередь, представляетъ собой *непрерывную однозначную* функцію угла параллельности. Мы будемъ обозначать ее символомъ

$$x = \Phi(\omega).$$

Разстояніе x между двумя параллелями измѣняется отъ нуля до безконечности. Обнаружимъ, что при этомъ уголъ параллельности измѣняется отъ $\frac{\pi}{2}$ до O.

Докажемъ для этого, что если уголъ параллельности можетъ равняться α, то онъ проходитъ черезъ всѣ значенія, заключающіяся между α и O.

Предположимъ (фиг. 2), что прямая OC параллельна PM и образуетъ съ перпендикуляромъ OP уголъ параллельности COP, равный α. При вращеніи плоскости COPM вокругъ OP прямая PM, какъ мы видѣли, описываетъ плоскость RS, а прямая OC — конусъ параллелей. Уголъ между двумя образующими этого конуса измѣняется въ предѣлахъ отъ нуля до 2α. Поэтому, если $\omega < \alpha$, то мы всегда найдемъ на поверхности конуса двѣ образующія OC и OD, составляющія уголъ равный 2ω. Плоскость, проходящая черезъ эти двѣ образующія, какъ мы видѣли, пересѣкаетъ плоскость RS по прямой GH такимъ образомъ, что

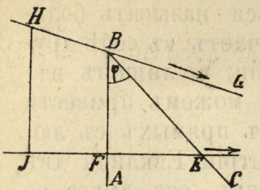


Фиг. 2.

$$HG \parallel OC \text{ и } GH \parallel OD.$$

Если мы теперь проведемъ прямую OE перпендикулярно къ GH, то она раздѣлитъ уголъ COD пополамъ, и слѣдовтельно, разстоянію OE соотвѣтствуетъ уголъ параллельности, равный ω. Такимъ образомъ всякій уголъ $\omega < \alpha$ служитъ угломъ параллельности.

Не трудно теперь обнаружить, что всякій уголъ φ, заключенный между α и $\frac{\pi}{2}$, также можетъ служить угломъ параллельности. Въ самомъ дѣлѣ, изъ произвольной точки E прямой CB (фиг. 3) опустимъ перпендикуляръ EF на вторую сторону AB угла ABC, равнаго φ, и черезъ точку B проведемъ прямую BG, параллельную FE. Прямая BE, встрѣчающая FE, проходитъ внутри угла параллельности; поэтому уголъ φ меньше угла параллельности ABG. При передвиженіи по прямой GB въ сторону расхожденія параллелей уголъ параллельности постоянно уменьшается и, какъ мы сейчасъ обнаружили, можетъ сдѣлаться равнымъ всякому углу, меньшему FBG. Поэтому въ нѣкоторой точкѣ H уголъ параллельности JHG равенъ φ. Предложеніе такимъ образомъ доказано.



Фиг. 3.

Итакъ, мы видимъ, что съ увеличеніемъ разстоянія точки отъ прямой уголъ параллельности постоянно уменьшается, стремясь къ нулю; иными словами, съ удаленіемъ точки отъ прямой параллель постоянно удаляется отъ евклидовой параллели и неопредѣленно приближается къ перпендикуляру, конечно, никогда его не достигая. Наоборотъ, съ уменьшеніемъ разстоянія точки отъ прямой уголъ параллельности стремится къ $\frac{\pi}{2}$; иными словами параллель удаляется отъ перпендикуляра, неопредѣленно приближаясь къ евклидовой параллели, которой она, конечно, опять таки никогда не достигаетъ. Аналитически эти положенія формулируются въ слѣдующихъ равенствахъ:

$$\lim \Pi(x) = 0_{(x=\infty)} \text{ и } \lim \Pi(x) = \frac{\pi}{2}_{\,(x=0)}.$$

Или иначе:

$$\lim \Phi(\omega) = 0_{\left(\omega=\frac{\pi}{2}\right)} \text{ и } \lim \Phi(\omega) = \infty_{(\omega=0)}.$$

Такова общая картина измѣненія угла параллельности въ зависимости отъ перпендикуляра. Что касается разысканія функціи $\Pi(x)$, то это вопросъ аналитическій, который мы отложимъ до слѣдующей главы.

Обратимся теперь къ дальнѣйшему изученію полосъ. Изъ самаго опредѣленія этихъ образовъ вытекаетъ, что полосы не могутъ подлежать сравненію по тѣмъ принципамъ, по которымъ мы сравниваемъ площади конечныхъ и вполнѣ опредѣленныхъ фигуръ, ограниченныхъ со всѣхъ сторонъ. Мы уже указывали въ I-ой главѣ при разборѣ доказательствъ Бертрана на то обстоятельство, что понятія о „большемъ" и „меньшемъ" требуютъ ближайшаго опредѣленія, когда сравненію подлежатъ безконечныя фигуры. Это опредѣленіе должно заключать строго опредѣленный комплексъ геометрическихъ операцій, который рѣшалъ бы въ каждомъ частномъ случаѣ вопросъ о равенствѣ или неравенствѣ безъ всякихъ сомнѣній. Если этотъ процессъ и можетъ заключать нѣкоторый произволъ, то всякая операція, произведенная въ предѣлахъ этого произвола, должна рѣшать дилемму о равенствѣ или неравенствѣ сравниваемыхъ образовъ въ одномъ и томъ же смыслѣ. Представимъ себѣ, напримѣръ, двѣ полосы въ геометріи Евклида. Наложимъ одну полосу на другую такимъ образомъ, чтобы одна изъ прямыхъ, ограничивающихъ первую полосу, совпала съ одной изъ прямыхъ, ограничивающихъ вторую. Если разстоянія между параллелями двухъ полосъ равны, то прямыя, ограничивающія полосы съ другой стороны, также совмѣстятся. Въ противномъ случаѣ одна изъ двухъ полосъ расположится цѣликомъ внутри другой. Мы можемъ условиться называть полосы равными въ томъ случаѣ, когда онѣ при такомъ наложенiи совпадаютъ. Если онѣ не совпадаютъ, то можно условиться называть большей ту полосу, которая при такомъ наложенiи заключаетъ въ себѣ другую. Процессъ, который указанъ въ этомъ опредѣленiи, не лишенъ нѣкотораго произвола: именно, совершая наложенiе, мы можемъ привести въ совмѣщенiе любую точку одной изъ совпадающихъ прямыхъ съ любой точкой на другой прямой. И такъ какъ въ геометрiи Евклида двѣ параллели находятся на одинаковомъ разстоянiи другъ отъ друга во всѣхъ своихъ точкахъ, то такое передвиженiе полосъ, такой произволъ въ процессѣ сравненiя не отразится на результатѣ этого сравненiя. Не то въ геометрiи Лобачевскаго. Указанный процессъ здѣсь не даетъ еще критерiя для рѣшенiя вопроса о большей или меньшей полосѣ, ибо здѣсь всякiя двѣ полосы могутъ быть приведены въ совмѣщенiе. И наоборотъ, если бы мы наложили двѣ полосы, изображенныя на фиг. (1) такъ, чтобы точка Q упала въ точку L'', то точка P упала бы между K'' и L''. Прямая PM въ новомъ положенiи будетъ параллельна прямымъ DC и BA и пройдетъ между ними. Вторая полоса помѣстится такимъ образомъ цѣликомъ внутри первой. Наоборотъ, если мы произведемъ наложенiе такимъ образомъ, чтобы точка Q упала въ точку L, то точка P упадетъ за точкой K, и первая полоса помѣстится цѣликомъ внутри второй. Такимъ образомъ, опредѣленiе, вполнѣ достаточное для сравненiя полосъ въ геометрiи Евклида, оставляетъ открытымъ вопросъ о равенствѣ или неравенствѣ полосъ въ геометрiи Лобачевскаго. Мы видимъ такимъ образомъ, что апрiорное распространенiе понятiя „больше“ и „меньше“ на новые образы, безконечно протяженные, не можетъ служить фундаментомъ для изученiя этихъ образовъ. Наоборотъ, теорiя этихъ образовъ, построенная на строгихъ началахъ, должна служить критерiемъ для оцѣнки пригодности прежняго опредѣленiя въ примѣненiи къ нимъ. Неудивительно, что на такомъ скороспѣломъ обобщенiи построенъ цѣлый рядъ мнимыхъ доказательствъ постулата Евклида. Мы установимъ ниже, когда намъ это понадобится, соглашенiя, достаточныя для опредѣленнаго сравненiя полосъ *) Соглашенiя эти опираются на свойства особаго класса кривыхъ линiй и поверхностей, играющихъ чрезвычайно важную роль въ неевклидовой геометрiи. Къ изученiю этихъ образовъ мы теперь переходимъ. Слѣдующее предложенiе послужитъ намъ при этомъ точкой отправленiя.

Если двѣ стороны треугольника служатъ сѣкущими равнаго наклона къ тремъ взаимно параллельнымъ прямымъ, проходящимъ черезъ вершины треугольника, то и третья сторона служитъ сѣкущей равнаго наклона для соотвѣтствующихъ двухъ параллелей.

Предположимъ сначала, что всѣ три параллели AB, CD и EG (фиг. 4) лежатъ въ одной плоскости и треугольникъ HJK расположенъ въ той же плоскости. Положимъ, что прямая HK служитъ сѣкущей равнаго наклона для параллелей AB и CD, а сѣкущая KJ играетъ ту же

---

*) См. главу, посвященную идеямъ Риманна.

роль по отношенію къ параллелямъ CD и EG. Докажемъ, что сторона HJ служитъ сѣкущей равнаго наклона для параллелей AB и EG.

Изъ серединъ L, M и N сторонъ треугольника возставимъ перпендикуляры LP, MQ и NR къ его сторонамъ. По свойству сѣкущихъ равнаго наклона, перпендикуляры LP и MQ параллельны CD и потому параллельны между собой.

Далѣе $\angle BHK = \angle DKH$ и слѣдовательно $\angle JHK < \angle DKH$ и a fortiori $\angle JHK < \angle HKJ$.

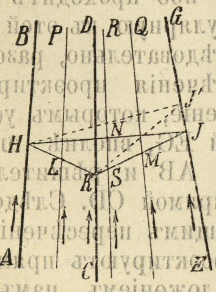
Такимъ же образомъ $\angle GJK = \angle DKJ$ и, слѣдовательно,

$$\angle HJK < \angle DKJ \text{ и a fortiori } \angle HJK < \angle HKJ.$$

Слѣдовательно, $\angle HKJ$ есть наибольшій уголъ въ треугольникѣ HKJ, такъ что

$$HK < HJ > KJ.$$

Перпендикуляръ NR не можетъ встрѣтить ни одного изъ перпендикуляровъ LP и MQ, потому что черезъ точку ихъ пересѣченія, если бы таковая существовала, проходилъ бы и третій перпендикуляръ. (Это доказывается обычнымъ пріемомъ). Продолженіе перпендикуляра при выходѣ изъ треугольника HJK встрѣчаетъ одну изъ сторонъ треугольника,—положимъ KJ въ точкѣ S.



Фиг. 4.

Такъ какъ $HJ > KJ$, то $\frac{1}{2}HJ > \frac{1}{2}KJ$, т. е. $NJ > MJ$, а потому a fortiori $SJ > MJ$. Точка S лежитъ поэтому между прямыми LP и MQ. А потому прямая NR, проходящая между двумя параллелями LP и MQ, не встрѣчая ни одной изъ нихъ, параллельна обѣимъ. Слѣдовательно,

$$NR \,||\, MQ \,||\, JG \,||\, HB.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\angle GJN = \Pi(NJ) \text{ и } \angle BHN = \Pi(HN),$$

такъ какъ $NJ = HJ$, то $\angle GNJ = \angle BHN$. Въ этомъ равенствѣ можно убѣдиться и непосредственно, если повернуть полосу, опредѣляемую параллелями NR и JG вокругъ NR на 180°. При этомъ прямая NJ пойдетъ по NH, точка J упадетъ въ точку H и параллели JG и HB совмѣстятся, а вмѣсѣ съ ними совмѣстятся и разсматриваемые углы.

Послѣ этого уже нетрудно изслѣдовать второй случай, т. е. доказать, что прямая KJ служитъ сѣкущей равнаго наклона, если прямыя HK и HJ играютъ ту-же роль по отношенію къ соотвѣтствующимъ параллелямъ. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что прямая KJ не служитъ сѣкущей равнаго наклона. Тогда черезъ точку K можно провести другую прямую KJ′, которая составитъ съ параллелями CD и EG равные внутренніе односторонніе углы. Но при такихъ условіяхъ прямая HJ′, какъ мы видѣли служитъ сѣкущей равнаго наклона для параллелей AB и EG. Черезъ точку H проходили бы при такихъ условіяхъ двѣ сѣкущія равнаго наклона къ одной и той же парѣ прямыхъ. Мы видѣли („Вѣст." № 189 стр. 202), что это невозможно.

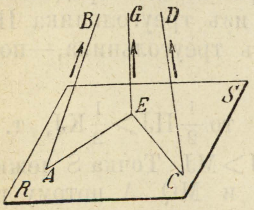
Доказательство того же предложенія въ томъ случаѣ, когда три параллели не лежатъ въ одной плоскости, основывается на слѣдующемъ положеніи, которое мы разсмотримъ отдѣльно.

Если мы имѣемъ комплексъ прямыхъ, встрѣчающихъ плоскость RS и параллельныхъ между собой, то всѣ плоскости, проэктирующія эти прямыя на плоскость RS, пересѣкаются между собой по одной и той-же прямой, которая встрѣчаетъ плоскость RS и перпендикулярна къ ней.

Положимъ, что прямыя AB и CD (фиг. 5) принадлежатъ разсматриваемому комплексу. Пусть AE проэкція AB на плоскость RS. Положимъ, что $\angle$ BAE острый. Построимъ отрѣзокъ AE такимъ образомъ, чтобы

$$AE = \Phi(BAE) \text{ или } \angle BAE = \Pi(AE).$$

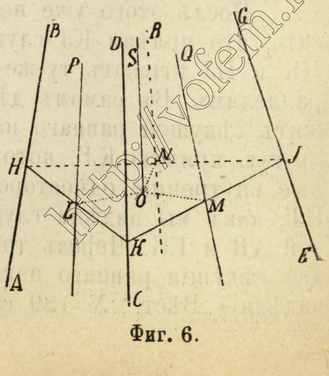
При такихъ условіяхъ, если мы возставимъ въ проэктирующей плоскости перпендикуляръ EG къ AE, то онъ будетъ параллеленъ AB и перпендикуляренъ къ плоскости RS. Такъ какъ CD || AB, то EG || CD. Эти прямыя лежатъ, слѣдовательно, въ одной плоскости CDEG. Эта плоскость проэктируетъ прямую DC на плоскость RS, ибо проходитъ черезъ прямую EG, перпендикулярную къ этой послѣдней. Прямую EG можно, слѣдовательно, разсматривать, какъ прямую пересѣченія проэктирующихъ плоскостей. Но построеніе, которымъ устанавливается положеніе прямой EG, вполнѣ опредѣляется положеніемъ прямой AB и рѣшительно не зависитъ отъ положенія прямой CD. Слѣдовательно прямая EG служитъ общимъ пересѣченіемъ всѣхъ плоскостей, которыя проэктируютъ прямыя, параллельныя AB, на плоскость RS. Этимъ предложеніемъ намъ не разъ прійдется пользоваться. Мы примѣнимъ его прежде всего къ доказательству предыдущаго предложенія въ томъ случаѣ, когда три параллели не лежатъ въ одной плоскости.



Фиг. 5.

Положимъ, что прямыя HK и KJ служатъ сѣкущими равнаго наклона для параллелей AB и CD, CD и EG. Обнаружимъ, что прямая HJ играетъ ту-же роль по отношенію къ параллелямъ AB и EG.

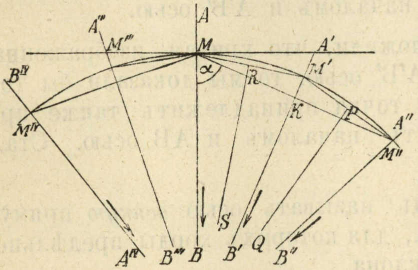
Изъ серединъ L и M прямыхъ HK и KJ проведемъ къ нимъ перпендикуляры (фиг. 84) LP и MQ, которые будутъ параллельны AB, CD и EG, а потому параллельны между собой. Черезъ середину N прямой HJ проведемъ прямую NR параллельно AB и EG; она пройдетъ въ плоскости этихъ прямыхъ и будетъ параллельна перпендикулярамъ LP и MQ. Плоскости проэктирующія весь комплексъ параллелей на плоскость треугольника HJK пересѣкаются по прямой OS, встрѣчающей плоскость треугольника въ точкѣ O. Прямыя OL и OM перпендикулярны къ сторонамъ HK и KJ треугольника HKJ. Такъ какъ два перпендикуляра, возставленные изъ середины сторонъ треугольника сходятся въ точкѣ O, то и третій перпендикуляръ проходитъ черезъ эту точку, такъ



Фиг. 6.

что $ON \perp HJ$. Прямая HJ, будучи перпендикулярна къ проэкціи, перпендикулярна также къ проэктируемой линіи NR. Отсюда вытекаетъ, что углы BHN и GJN равны, потому что они служатъ углами паралельности, которые соотвѣтствуютъ равнымъ перпендикулярамъ HN и JN.

Представимъ себѣ теперь, что мы имѣемъ нѣкоторую прямую AB (фиг. 7). Черезъ каждую точку плоскости, проходитъ одна и только одна прямая, параллельная AB. Представимъ себѣ весь комплексъ прямыхъ, лежащихъ въ одной плоскости и параллельныхъ AB. Изъ произвольной точки M, взятой на прямой AB, проведемъ сѣкущія равнаго наклона MM', MM'', MM''', MM''''... ко всѣмъ параллелямъ $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$, $A''''B''''$,... Геометрическое мѣсто оконечностей этихъ наклонныхъ M, M', M'', M''', M''''... представляетъ собой непрерывную линію, которую Лобачевскій называетъ „*предѣльной линіей*“ или „*орициклой*“*). Точку M назовемъ „*началомъ*“, прямую AB „*осью*“ предѣльной линіи. Займемся изслѣдованіемъ этой линіи.



Фиг. 7.

a) Всякая хорда $M'M''$ (фиг. 6) предѣльной линіи служитъ сѣкущей равнаго наклона по отношенію къ прямымъ $A'B'$ и $A''B''$, параллельнымъ оси въ конечныхъ ея точкахъ.

Въ самомъ дѣлѣ прямыя MM' и MM'' по самому опредѣленію предѣльной линіи служатъ сѣкущими равнаго наклона для параллелей, между которыми онѣ проходятъ. А слѣдовательно, по доказанной нами теоремѣ хорда $M'M''$ одинаково наклонена къ прямымъ $A'B'$ и $A''B''$. Отсюда слѣдуетъ, что прямая PQ, перпендикулярная къ $M''M'$ въ серединѣ хорды, параллельна $A'B'$, $A''B''$, а слѣдовательно, оси AB. Итакъ:

b) *Перпендикуляръ, возставленный изъ середины всякой хорды предѣльной линіи, параллеленъ оси.* Это свойство вполнѣ опредѣляетъ собой предѣльную линію и потому можетъ служить ея опредѣленіемъ. Докажемъ это. Положимъ, что кривая...$M''''M'''MM'M''$... (фиг. 7) обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что перпендикуляръ, возставленный изъ середины произвольной хорды, параллеленъ прямой AB. Черезъ точки M' и M'' проведемъ прямыя $A'B'$ и $A''B''$ параллельно AB. Такъ какъ перпендикуляръ PQ, возставленный изъ середины хорды $M'M''$ параллеленъ этимъ прямымъ, то хорда служитъ для нихъ сѣкущей равнаго наклона. Такимъ же образомъ обнаружится, что прямая MM' одинаково наклонена къ параллелямъ AB и $A'B'$. Отсюда слѣдуетъ, что прямая MM'' также служитъ сѣкущей равнаго наклона для параллелей AB и $A''B''$. Такимъ образомъ мы видимъ, что произвольныя точки нашей кривой M' и M'' лежатъ на предѣльной линіи, для которой AB служитъ осью и M началомъ. Кривая совпадаетъ слѣдовательно, съ этой предѣльной линіей.

*) Послѣдній терминъ „Orizycle“ встрѣчается только въ одной статьѣ Лобачевскаго: „Geometrische Untersuchungen“.

Намъ казалось однако неудобнымъ опредѣлять предѣльную линію послѣднимъ ея свойствомъ по той причинѣ, что оно не заключаетъ указанія, какимъ образомъ эта кривая можетъ быть построена по точкамъ.

c) Всякая точка, лежащая на предѣльной линіи можетъ быть принята за начало,—и прямая, проходящая черезъ эту точку параллельно оси, за ось.

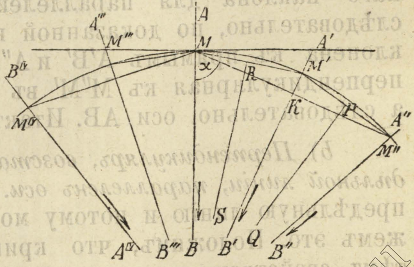
Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ, что предѣльная кривая, изображенная на фиг. 7, начерчена въ предположеніи, что точка M служитъ началомъ и AB осью. Точка M'' этой линіи представляетъ собой конечную точку сѣкущей равнаго наклона, проведенной изъ M къ прямой $A''B''$, параллельной AB. Но такъ какъ хорда $M'M''$ также служитъ сѣкущей равнаго наклона (см. *a*) для параллелей $A'B'$ и $A''B''$, то мы можемъ разсматривать точку M'' какъ конечную точку сѣкущей ровнаго наклона, проведенной изъ M' къ прямой $A''B''$, параллельной $A'B'$. Иными словами, всякая точка M'' нашей линіи лежитъ на предѣльной кривой, имѣющей точку M' началомъ и $A'B'$ осью.

Наоборотъ, если бы мы предположили, что кривая, изображенная на чертежѣ, имѣетъ M' началомъ и $A'B'$ осью, то мы доказали бы точно такимъ же путемъ, что всякая ея точка принадлежитъ также предѣльной линіи, для которой M служитъ началомъ и AB осью. Стало быть эти двѣ линіи совпадаютъ.

Въ виду этого мы будемъ впредь называть осью *всякую* прямую комплекса параллелей $A'B', A''B'', A'''B'''$..., для которыхъ хорды предѣльной линіи служатъ сѣкущими равнаго наклона.

Постараемся теперь ознакомиться съ формой предѣльной линіи.

d) Никакія три точки на предѣльной линіи не могутъ лежать на одной прямой.



Фиг. 8.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы точки M, M', M'' (фиг. 8), лежали на одной прямой, то параллели RS и PQ, проведенныя изъ срединъ двухъ хордъ, были бы перпендикулярны къ одной прямой. Мы видѣли въ предыдущей главѣ, что существованія такихъ параллелей достаточно для обоснованія геометріи Евклида. И дѣйствительно, въ геометріи Евклида предѣльной линіей служитъ прямая. Въ самомъ дѣлѣ, если бы на плоскости Евклида три точки предѣльной линіи M, M' и M'' не лежали на одной прямой, то перпендикуляры RS и PQ, возставленные изъ серединъ двухъ сторонъ треугольника, были бы параллельны. Въ геометріи Евклида это невозможно, ибо они сходятся въ центрѣ круга, описаннаго около треугольника. Стало быть, предѣльная линія только въ геометріи Евклида сливается съ прямой. Наоборотъ, въ геометріи Лобачевскаго никакія три ея точки не лежатъ на одной прямой.

e) Каждая ось встрѣчаетъ предѣльную линію въ одной и только въ одной точкѣ.

Если мы приймемъ какую нибудь точку M кривой за начало и проведемъ къ оси $A'B'$ сѣкущую равнаго наклона, то получимъ точку, въ которой она встрѣчаетъ предѣльную кривую. Другой точки пересѣченія быть не можетъ, ибо, соединивъ ее съ началомъ, мы получили бы вторую сѣкущую равнаго наклона для тѣхъ же параллелей, выходящую изъ точки M.

Слѣдовательно, предѣльная линія есть кривая разомкнутая. Однако ту сторону, въ которую направлены оси, называютъ обыкновенно „*внутренней*" стороной предѣльной линіи.

f) Прямая, перпендикулярная къ оси въ конечной ея точкѣ*), не встрѣчаетъ предѣльной линіи въ другой точкѣ и лежитъ цѣликомъ внѣ ея.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы перпендикуляръ MA' (фиг. 8) встрѣчалъ кривую въ другой точкѣ, то мы получили бы сѣкущую равнаго наклона, образующую съ двумя параллелями прямые углы; а это невозможно. Изъ произвольной точки A' перпендикуляра, мы проведемъ прямую $A'B'$ параллельно AB. Сѣкущая равнаго наклона MM' составляетъ острый уголъ съ прямой AB со стороны параллельности, и потому точка A' лежитъ отъ M' въ направленіи противоположномъ оси. Иными словами она расположена *внѣ* предѣльной линіи. Въ виду всего этого прямая AA' служитъ *касательной* къ предѣльной кривой.

g) Всякая прямая MK, составляющая съ осью въ конечной ея точкѣ не прямой уголъ, входитъ внутрь предѣльной линіи со стороны остраго угла и при достаточномъ продолженіи встрѣчаетъ ее во второй разъ.

Положимъ, что $\angle BMK$ острый. Обозначимъ его черезъ α. Отложимъ тогда отрѣзокъ $MK = \Phi(\alpha)$; тогда прямая KB', перпендикулярная къ MK, параллельна MB. Отложимъ затѣмъ отрѣзокъ $KM'' = MK$ и проведемъ $M''B''$ параллельно KB' и MB. Тогда

$$\angle BMK = \Pi(MK),\ \angle KM''B'' = \Pi(M''K).$$

Такъ какъ $MK = M''K$, то $\angle BMK = \angle KM''B''$, и прямая MM'' представляетъ собой сѣкущую равнаго наклона для параллей AB и $A''B''$. Точка M'' лежитъ, слѣдовательно, на нашей предѣльной кривой. Проведемъ еще изъ M сѣкущую равнаго наклона MM' къ параллели KB'. Такъ какъ она образуетъ съ параллелью острый уголъ со стороны параллелизма, то точка M' ляжетъ со стороны касательной MA'. Иными словами, точка K лежитъ внутри предѣльной кривой. Слѣдовательно, прямая MK входитъ внутрь предѣльной линіи. Соображенія, изложенныя въ послѣднихъ двухъ пунктахъ, обнаруживаютъ, что прямая, перпендикулярная къ оси въ конечной ея точкѣ, представляетъ собой единственную прямую, которая имѣетъ съ предѣльной линіей только эту одну общую точку. Такъ какъ уголъ между кривой и прямой опредѣляется, какъ уголъ между этой прямой и касательной къ кривой въ точкѣ пересѣченія, то предѣльная линія ортогональна ко всѣмъ своимъ осямъ,—или иначе:

*) Т. е. въ точкѣ, лежащей на предѣльной линіи.

Предѣльная линія представляетъ собой ортогональную траэкторію комплекса прямыхъ, параллельныхъ нѣкоторой неподвижной прямой *).

h) Всякая прямая, перпендикулярная къ оси въ точкѣ O, лежащей внутри предѣльной линіи, пересѣкаетъ эту кривую въ двухъ точкахъ, равно удаленныхъ отъ точки O.

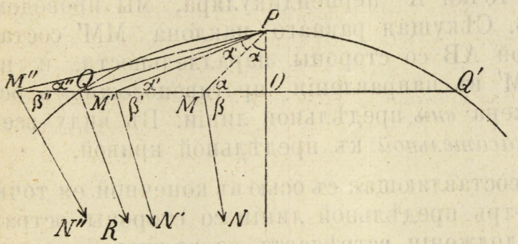
Положимъ, что прямая MO (фиг. 9) перпендикулярна къ оси PO въ точкѣ O. Отъ точки O отложимъ OM=OP и затѣмъ MM′=MP, и проведемъ MN и M′N′ параллельно оси. Тогда получимъ

$$\angle OMP = \angle MPO = \alpha, \ \angle MM'P = \angle M'PM = \alpha'.$$

Такъ какъ внѣшній уголъ больше суммы внутреннихъ съ нимъ не смежныхъ, то при этомъ $\alpha' < \frac{1}{2}\alpha$. Если уголъ β' при этомъ также не превышаетъ $\frac{1}{2}\alpha$, то мы установимся на этомъ построеніи. Въ противномъ случаѣ мы возьмемъ точку M″ на столько удаленную O, чтобы уголъ $\beta'' = \Pi(M''O)$ не превышалъ бы $\frac{1}{2}\alpha$. Тогда имѣемъ

$$\alpha'' < \alpha'; \ \alpha' < \frac{1}{2}\alpha; \ \beta'' \leqq \frac{1}{2}\alpha;$$

$$\angle N''M''P = \alpha'' + \beta'' < \alpha < M''PO.$$



Фиг. 9.

Итакъ, сѣкущая PM образуетъ съ осью PO меньшій уголъ, нежели съ осью MN, проходящей черезъ точку M. Наоборотъ, сѣкущая PM″ образуетъ съ осью PO большій уголъ, нежели съ осью M″N″. Между точками M и M″ лежитъ, слѣдовательно, нѣкоторая точка Q, обладающая тѣмъ свойствомъ, что сѣкущая PQ одинаково наклонена къ параллелямъ PO и QR. Эта точка лежитъ, очевидно, на предѣльной кривой. Составляя съ осью RQ острый уголъ RQO, прямая QO, какъ мы видѣли при достаточномъ продолженіи въ сторону точки O пересѣчетъ предѣльную линію въ другой точкѣ Q′, (см. *g*) при чемъ разстояніе OQ′=OQ. Легко видѣть, что ось PO дѣлитъ также и дугу пополамъ.

i) Изъ самаго опредѣленія предѣльной линіи вытекаетъ, что она вполнѣ опредѣляется осью и одной точкой, принадлежащей этой кривой,—ибо по этимъ даннымъ можетъ быть построена вся кривая. Отсюда слѣдуетъ прежде всего, что *всѣ предѣльныя линіи тождественны въ томъ смыслѣ, что могутъ быть приведены въ совмѣщеніе.* Въ самомъ дѣлѣ, передвинемъ плоскость, въ которой расположены двѣ предѣльныя линіи такимъ образомъ, чтобы одна точка первой совпала съ какой нибудь точкой другой предѣльной линіи, и чтобы оси, проходящія черезъ общую точку, совпали. Тогда кривыя совмѣстятся.

Положимъ теперь, что намъ даны двѣ точки предѣльной кривой. Прямая, соединяющая эти точки, служитъ хордой, а потому перпенди-

*) Такъ какъ ортогональная траэкторія непрерывнаго комплекса прямыхъ вполнѣ опредѣляется, если дана одна ея точка, то этимъ свойствомъ предѣльная линія вполнѣ опредѣляется, при этомъ должна быть дана ось и одна точка кривой.

куляръ, возставленный изъ середины этой хорды, параллеленъ оси. Изъ этого слѣдуетъ, что черезъ двѣ точки проходятъ двѣ и только двѣ предѣльныя линіи, имѣющія перпендикуляръ общею осью; но ось одной кривой направлена въ одну сторону перпендикуляра, ось другой—въ противоположную сторону. Такія предѣльныя линіи, которыя имѣтъ общую ось, называются *симметричными*.

k) Изъ этихъ соображеній вытекаетъ, что двѣ дуги предѣльныхъ линій совпадаютъ, если двѣ точки одной совпадаютъ съ двумя точками другой, и выпуклости направлены въ одну сторону.

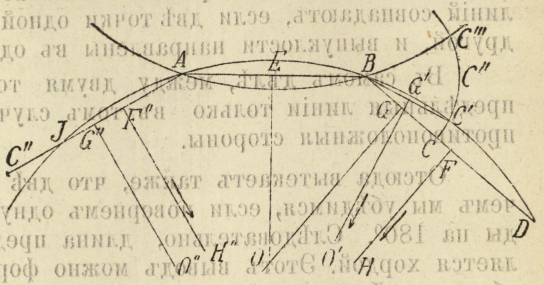
Въ самомъ дѣлѣ, между двумя точками могутъ проходить двѣ предѣльныя линіи только въ томъ случаѣ, если оси направлены въ противоположныя стороны.

Отсюда вытекаетъ также, что двѣ симметричныя дуги равны, въ чемъ мы убѣдимся, если повернемъ одну изъ нихъ вокругъ общей хорды на 180^0. Слѣдовательно, длина предѣльной дуги вполнѣ опредѣляется хордой. Этотъ выводъ можно формулировать еще слѣдующимъ образомъ. Дуга предѣльной линіи можетъ передвигаться вдоль по кривой безъ деформаціи. Въ самомъ дѣлѣ, взявъ такую дугу, перенесемъ ее такимъ образомъ, чтобы двѣ ея точки совпали съ двумя другими точками кривой, а выпуклости были бы направлены въ одну и ту же сторону. Тогда и промежуточныя точки совпадутъ.

l) Раздѣлимъ пополамъ дугу AB предѣльной кривой въ точкѣ C, и передвинемъ ее такимъ образомъ, чтобы точка A упала въ точку C, а точка C въ точку B. Положеніе, которое займетъ дуга CB, называется продолженіемъ предѣльной дуги AC; вмѣстѣ съ этой дугой она составляетъ, очевидно, часть предѣльной линіи. Мы видимъ такимъ образомъ, что *дуга предѣльной линіи можетъ быть продолжена неопредѣленно и продолженіе не можетъ привести въ точку исхода*, ибо эта линія разомкнута.

m) Намъ остается только разсмотрѣть то свойство предѣльной линіи, которое послужило Лобачевскому наведеніемъ и точкой отправленія при открытіи и изслѣдованіи этой кривой.

Окружность круга обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что перпендикуляръ, возставленный изъ средины произвольной хорды проходитъ черезъ центръ. Представимъ себѣ теперь, что радіусъ круга неопредѣленно возрастаетъ и центръ O безпредѣльно удаляется отъ опредѣленной точки окружности K по прямой KO. При этихъ условіяхъ перпендикуляры стремятся сдѣлаться параллельными этой прямой; по мѣрѣ того, какъ они приближаются къ такому параллелизму, окружность приближается къ кривой, обладающей тѣмъ свойствомъ, что перпендикуляръ, возставленный изъ середины произвольной ея хорды параллеленъ прямой KO. Это будетъ предѣльная линія, имѣющая точку K началомъ и прямую KO осью. Этимъ оправдывается названіе, данное кривой. Чтобы обнаружить значеніе этой линіи, какъ предѣльной круга съ большей точностью и наглядностью, займемся рѣшеніемъ задачи о построеніи окружности, проходящей черезъ три данныя точки. Проведемъ двѣ симметричныя предѣльныя линіи черезъ двѣ данныя точки A и B (фиг 10) и положимъ, что третья точка C лежитъ внутри одной изъ кривыхъ. Продолжимъ прямую BC до встрѣчи съ предѣльной кривой въ точкѣ D. Изъ серединъ G и F отрѣзковъ BC и BD возставимъ перпендикуляры GO и FH. При этомъ точка G лежитъ очевидно между B и F, а прямыя GO и FH, будучи перпендикулярны къ третьей, не могутъ быть параллельны. Поэтому прямая GO неизбѣжно встрѣтитъ перпендикуляръ EO, возставленный изъ середины прямой AB; потому что въ противномъ случаѣ прямая GO, проходя между двумя прямыми EO и FH, которыя по свойству предѣльной линіи параллельны, была бы въ свою очередь, параллельна обѣимъ. Точка встрѣчи O служитъ центромъ круга, проходящаго черезъ три точки. Если мы себѣ представимъ теперь, что прямая BC вращается вокругъ точки B по направленію $CC'C''$, то прямая GO приближается къ прямой $G'O'$, параллельной EO. Центръ круга при



Фиг. 10.

этомъ удаляется, а окружность приближается къ предѣльной кривой. Наконецъ, когда прямая BC занимаетъ положеніе BC', прямая GO совпадаетъ съ прямой $G'O'$, точка O уходитъ въ безконечность, и окружность сливается съ предѣльной линіей. При дальнѣйшемъ вращеніи точка C оказывается въ точкѣ C'' между двумя предѣльными кривыми*). Изъ серединъ F'' и G'' отрѣзковъ AJ и AC'' проводимъ перпендикуляры $F''H''$ и $G''O''$. Теперь точка F'' лежитъ между G'' и A; прямая $F''H'' \| EO$. Прямыя $G''O''$ и EO въ этомъ случаѣ не могутъ пересѣчься, ибо онѣ расположены съ различныхъ сторонъ прямой $F''H''$.**). Три точки при такихъ условіяхъ не лежатъ на одной окружности. Когда при дальнѣйшемъ вращеніи точка C попадаетъ въ C''' то три точки снова лежатъ на одной предѣльной линіи. Затѣмъ точка C входитъ внутрь второй предѣльной кривой, и три точки опять лежатъ на одной окружности.

Изложенная теорія даетъ полное представленіе о предѣльной линіи и ея свойствахъ.

В. Каганъ (Спб.).

(Продолженіе слѣдуетъ).

*) Для упрощенія чертежа мы замѣнили въ этомъ случаѣ прямую BC'' прямой AC'', такъ что тремя данными точками служатъ B, A и C''.

**) Замѣтимъ, что эти прямыя расходятся: $G''O''$ не можетъ быть параллельна EO, ибо тогда она была бы параллельна $F''H''$.

ОТВѢТЪ НА ЗАМѢТКУ г. Г. ФЛОРИНСКАГО:

„Новый способъ составленія задачниковъ" *).

Въ № 186 „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики" помѣщена статейка подъ приведеннымъ заглавіемъ и за подписью г. Г. Флоринскаго, выступающаго, по всей вѣроятности, непрошеннымъ защитникомъ гг. Н. Рыбкина, М. Сорокина и В. Минина, составителей сборниковъ геометрически-тригонометрическихъ задачъ, и строгимъ критикомъ составленнаго мною подобнаго же сборника. Такъ какъ отъ добросовѣстнаго критика, при всей его строгости, требуется, прежде всего, абсолютная правдивость и осмотрительность въ сужденіяхъ,—качества, которыхъ я въ указанной замѣткѣ не усматриваю, то я отказался бы возражать г. Флоринскому и входить съ нимъ въ какія либо пререканія, если бы я не опасался неправильной интерпретаціи моего молчанія со стороны уважаемыхъ читателей „Вѣстника": послѣднее только обстоятельство побуждаетъ меня къ возраженію.

Критикъ мой, при „бѣгломъ просмотрѣ" моего сборника, содержащаго 202 задачи, нашелъ въ немъ 16 задачъ г. Минина, 18—г. Рыбкина и 39 — г. Сорокина (итого 73 задачи) и приводитъ №№ этихъ задачъ.

Чувство правдивости не позволяетъ мнѣ отрицать пользованія, при составленіи моего сборника, не только почтенными трудами только что названныхъ авторовъ, но и нѣкоторыми другими сочиненіями, напр. Cours de Trigonométrie Rectiligne par E. Dessenon, Собраніе вопросовъ и задачъ прямолинейной тригонометріи И. Верещагина, Ebene Trigonometrie von W. Nerling, Journal de Mathématiques Elementaires par de Longchamps et. L. Lévy, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht и проч., причемъ я примѣнялъ также къ нѣкоторымъ чисто геометрическимъ задачамъ тригонометрическія данныя. Къ сожалѣнію, я имѣлъ оплошность не докладывать объ этомъ своевременно почтенному критику, о существованіи котораго я, впрочемъ, не подозрѣвалъ.

Никакому здравомыслящему человѣку не вздумается претендовать на составителя элементарнаго задачника за то, что онъ пользовался тѣмъ или другимъ сочиненіемъ, выбравъ изъ него нѣкоторыя задачи, показавшіяся ему болѣе или менѣе интересными. Если спросить какого-либо составителя задачника, въ томъ числѣ и кого-нибудь изъ защищаемыхъ г. Флоринскимъ, всѣ ли его задачи придуманы имъ совершенно самостоятельно, то онъ, безъ сомнѣнія, не станетъ утверждать этого. Всѣ наши познанія—результатъ взаимныхъ заимствованій, — новое создается только избранниками, къ которымъ не причисляю ни себя,

*) Помѣстивъ въ № 186 „Вѣстника" статью г. Флоринскаго о сборникѣ задачъ г. Блюмберга, не считаемъ себя въ правѣ отказать и г. Блюмбергу въ напечатаніи его отвѣтной статьи, не смотря на слишкомъ рѣзкій ея тонъ, отвѣтственность за каковой авторъ, очевидно, принялъ на себя. *Прим. ред.*

ни даже г. критика, не сознающаго этой истины. Вопросъ, слѣд., только въ томъ, въ какой мѣрѣ авторъ пользовался тѣмъ или другимъ сочиненіемъ. Критикъ утверждаетъ, что, по крайней мѣрѣ, 73 изъ 202 задачъ моего сборника взяты у трехъ вышеназванныхъ авторовъ, и позволяетъ себѣ даже усомниться въ самостоятельности всѣхъ остальныхъ. Первая часть этого обвиненія не согласна съ истиною (чтобы не сказать болѣе), а вторая—просто продуктъ больной головы, а слѣд. и результатъ необдуманнаго, незрѣлаго сужденія.—Если уважаемый читатель „Вѣстника“ прочтетъ критику г. Флоринскаго безъ предвзятости (въ чемъ не сомнѣваюсь), то критика эта окажется обличающею автора ея въ недостаточной правдивости, въ искаженіи фактовъ и даже (чему, впрочемъ, не хочется вѣрить) въ смутномъ пониманіи характера результатовъ математическихъ вычисленій. Дѣйствительно, критикъ раздѣляетъ задачи, взятыя мною, по его словамъ, у г. Сорокина, на слѣдующія три категоріи:

I категорія: задачи, въ которыхъ тексты и отвѣты перепечатаны буквально, причемъ сопоставлены, для сравненія, 5 задачъ. Возьмемъ изъ нихъ слѣдующую:

Задача Н. Сорокина.

№ 36. Изъ точки, взятой внѣ круга радіуса r, проведены подъ угломъ α двѣ такія сѣкущія, что внутреннія ихъ части находятся на разстояніи a отъ центра. Опредѣлить площадь четыреугольника, сторонами котораго служатъ внутреннія части сѣкущихъ.

Отв. $4a\sqrt{r^2-a^2}.\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Задача Я. Блюмберга.

№ 70. Къ окружности круга радіуса r, изъ внѣшней точки, проведены двѣ сѣкущія, составляющія между собою $\angle\alpha$, отстоящія на разстояніи a отъ центра и пересѣкающія окружность соотвѣтственно въ точкахъ B, C и D, E; опредѣлить площадь четыреугольника BDEC (r= =7 децим., a=3 дец. $\alpha=34^0 13' 41'',6$).

Отв. $S=4a\sqrt{r^2-a^2}.\cos^2\frac{\alpha}{2}=$ 2 кв. метр. 19,2117 кв. децим.

Что текстъ этой задачи *перепечатанъ буквально*, несогласно, очевидно, съ истиною; возмущеніе же г. Флоринскаго по поводу того, что и *отвѣтъ* перепечатанъ *буквально*, невольно наводитъ на мысли, не лестныя для рецензента, долженствующаго знать, что *тождественныя задачи всегда ведутъ къ тождественнымъ же результатамъ.*

II категорія: задачи, условія которыхъ взяты безъ измѣненія, лишь $\angle\alpha$ *замѣненъ* $\angle 90^0-\alpha$ *или* $180^0-\alpha$. Сопоставлено 3 задачи.

Тутъ критикъ уже искажаетъ факты: $\angle\alpha$ не замѣненъ ни $\angle 90^0-\alpha$, ни $180^0-\alpha$, а просто взяты другія условія, напр., вмѣсто угла наклоненія производящей конуса къ основанію взятъ уголъ при вершинѣ; а такія задачи нельзя считать заимствованными.

III категорія: задачи, условія которыхъ взяты у г. Сорокина безъ измѣненія, а лишь данныя или обобщены или взяты частные случаи.

Читатель, конечно, удивляется, почему обобщенныя задачи считаются критикомъ непремѣнно заимствованными. Просто, г-ну Флоринскому захотѣлось заявить себя настроченіемъ злой критики; ну и пользовался всякими благовидными и неблаговидными средствами.

Указавъ на сходство задачъ въ сравниваемыхъ сборникахъ, критикъ отказывается отъ сравненія остальныхъ 28(?) задачъ моего сборника. Не кроется-ли здѣсь *намѣренная* опечатка, сопровождаемая притомъ не всегда извинительнымъ ариѳметическимъ промахомъ. Такъ какъ, по мнѣнію критика, мною заимствовано у трехъ вышеприведенныхъ авторовъ 73 задачи (отъ сравненія остальныхъ онъ, вѣдь, отказывается), а мой сборникъ содержитъ ихъ 202, то, по Адаму Ризе, 202—73= =129, а не 28, ибо

$$\begin{array}{r} \dot{2}\dot{0}2 \\ -\ 73 \\ \hline (1)29 \end{array}$$

т. е. помимо провалившейся сотни, критикъ находитъ, что 12—3 = 8, а потому-то получаетъ въ разности 28 вмѣсто 129. Если бы онъ сдѣлалъ не сложную повѣрку вычитанія, то онъ, надо полагать, открылъ бы свою ошибку, способную вводить въ заблужденіе лишь поверхностнаго читателя.

При составленіи своего сборника я имѣлъ въ виду подборъ лишь задачъ легкихъ или средней трудности, а потому матеріаломъ для нихъ могли служить только простѣйшія геометрическія протяженія при несложныхъ данныхъ. Положимъ, примѣрно, что составляемъ задачи на трапецію на что, конечно, вопреки г. Флоринскому, имѣю неоспоримое право. Подбирая данныя, комбинируя ихъ съ искомыми и измѣняя вопросъ, мы невольно должны натыкаться и на такія данныя, которыя приведены въ задачахъ той-же категоріи того или другого сборника, потому что число такихъ комбинацій весьма ограничено, если не желаемъ усложнять рѣшенія или наполнять сборникъ задачами, ничѣмъ существеннымъ не отличающимися между собою. Но кругозоръ г. рецензента, повидимому, не настолько широкъ, чтобы постичь такое возможное совпаденіе, когда составитель элементарнаго задачника вынужденъ, изъ-за педагогическихъ видовъ, вращаться въ узкой сферѣ. Если бы дѣло шло о какомъ-нибудь ученомъ трактатѣ или о диссертаціи, въ которыхъ онъ усмотрѣлъ бы (какъ это нерѣдко наблюдается) сходство по формѣ или содержанію съ другимъ трудомъ того-же рода, то его благородный гнѣвъ былъ бы понятенъ; но элементарныя руководства всѣ сходны между собою по содержанію, всѣ они содержатъ или, вѣрнѣе, *должны* содержать только существенное, не выходящее изъ предѣловъ программы соотвѣтствующаго учебнаго заведенія, и потому могутъ отличаться между собою, не столько матеріаломъ, который, въ данномъ случаѣ, не допускаетъ большаго разнообразія, сколько болѣе или менѣе удачнымъ расположеніемъ этого матеріала или удобною и ясною редакціею излагаемаго. Если расположеніе это, уподобляемое критикомъ музыкальному попури, не удовлетворяетъ *артистовъ* вродѣ гг. Флоринскихъ, то это ихъ дѣло; но такое неудачное сравненіе заставляетъ полагать, что критикъ имѣлъ въ мысляхъ винегретъ, когда говорилъ о попури.

По хранящимся у меня черновикамъ оказывается, что мною позаимствовано изъ разныхъ источниковъ не болѣе 30 задачъ, отличающихся болѣе или менѣе интересными данными; всѣ же остальныя составлены мною настолько самостоятельно, на сколько, вообще, можетъ быть рѣчь о самостоятельности подбора обыденныхъ элементарныхъ задачъ.

Въ заключеніе, укажу еще на слѣдующія обстоятельства, обличающія г. Флоринскаго въ некрасивыхъ пріемахъ критики:

1) Онъ утверждаетъ, между прочимъ, что задачи 39, 74, 90, 131 и 135 моего сборника взяты у г. В. Минина (NB: изд. 1887 г.), между тѣмъ какъ эти же задачи читатель найдетъ уже въ 1-омъ изд. моей „*Прямолинейной тригонометріи*“ (NB: изд. 1875 г.), а потому я (по логикѣ г. Флоринскаго, конечно) могъ бы утверждать, что эти задачи взяты не мною у г. Минина, а послѣднимъ у меня.

2) Задачу 53 моего сборника критикъ причисляетъ къ тѣмъ, въ которыхъ я, по его словамъ, „ставлю лишь другіе вопросы, сохраняя условія задачъ г. Сорокина *безъ измѣненія*“.

Сравнимъ тексты этой задачи.

Задача 53 моего сборника.	*Задача 143 г. Сорокина.*
Опредѣлить радіусъ круга, если проведенные въ немъ два *взаимно-перпендикулярныхъ* діаметра составляютъ между собою $\angle\alpha$, и разность хордъ, соединяющихъ конецъ одного изъ этихъ діаметровъ съ концами другого, равна d (d=5 вершк., $\alpha=26^0 23' 8''$).	Опредѣлить объемъ шара, если два діаметра большого круга образуютъ $\angle\alpha$, а разность хордъ, соединяющихъ конецъ одного изъ нихъ съ концами другого, есть d.

Если бы я эту задачу взялъ у г. Сорокина, да еще *безъ измѣненія условій ея*, то я, конечно, не ввелъ бы въ нее условія: „взаимно-перпендикулярныхъ“, противорѣчащаго даннымъ ($\alpha=26^0 23' 8''$), Наконецъ:

3) Задачи 129, 156, 158 моего сборника критикъ также считаетъ заимствованными у г. Сорокина, а задачу 145—у г. Рыбкина. Если бы это было такъ, то я, конечно, воспользовался бы и ихъ вѣрными рѣшеніями, между тѣмъ приведенные мною отвѣты на эти задачи, къ сожалѣнію, оказываются невѣрными. Па основаніи послѣднихъ трехъ пунктовъ считаю себя вправѣ признать критику г. Флоринскаго недобросовѣстною.

Я. Блюмбергъ (Рига).

Германъ фонъ Гельмгольцъ.

Мы, люди, знаемъ, что наше умственное развитіе, государственное устройство, цивилизація—получены нами по наслѣдству, которое работою, борьбою и жертвами пріобрѣтали наши предшественники; что наши завоеванія въ томъ же направленіи облагородятъ жизнь послѣдующихъ поколѣній. Поэтому отдѣльная личность, работающая для идеальныхъ цѣлей человѣчества,—хотя бы въ скромномъ мѣстѣ и въ узкой сферѣ — можетъ безъ страха выносить мысль, что нить ея собственнаго сознанія когда нибудь да оборвется.

Гельмгольцъ (Vorträge u. Reden. Bd. II).

27-го августа телеграфъ разнесъ по всему земному шару печальную вѣсть: Гельмгольца не стало. Правда, уже и раньше газеты приносили извѣстія о его болѣзни, но не хотѣлось думать, что роковой исходъ явится такъ скоро, что колоссъ науки отойдетъ уже въ вѣчность. Нынѣшній годъ справедливо можетъ быть названъ роковымъ годомъ для нѣмецкихъ представителей науки. Въ самомъ его началѣ смерть унесла одного изъ наиболѣе даровитыхъ молодыхъ ученыхъ—Генриха Герца; въ маѣ не стало Кундта; наконецъ теперь сошелъ въ могилу великій мыслитель, физикъ и физіологъ, величайшій естествоиспытатель и геніальный математикъ—Германъ фонъ Гельмгольцъ. Три года тому назадъ весь ученый міръ торжественно праздновалъ семидесятую годовщину его рожденія и пятидесятилѣтіе его научной дѣятельности, маститый юбиляръ получилъ массу поздравленій, со всѣхъ концовъ земли высказывались ему пожеланія многихъ лѣтъ столь же плодотворной работы, но судьбѣ не угодно было дать исполниться этимъ пожеланіямъ...

Намъ нѣтъ надобности, нѣтъ и возможности входить здѣсь въ оцѣнку трудовъ Гельмгольца. Они слишкомъ извѣстны, а въ краткой журнальной замѣткѣ ихъ трудно было бы и перечислить. Желающихъ познакомиться съ біографіей и съ ученою дѣятельностью Гельмгольца отсылаемъ къ статьѣ проф. де-Метца*), къ статьѣ проф. Столѣтова**) или къ юбилейному сборнику, изданному Московскимъ университетомъ***).

Германъ Людвигъ Фердинандъ фонъ Гельмгольцъ родился въ Потсдамѣ 31 августа 1821 года (н. с.). Окончивъ потсдамскую гимназію, онъ 17-и лѣтъ поступилъ въ Медико-хиргическій Институтъ Фридриха-Вильгельма, который и окончилъ въ 1842 году. Прослуживъ до 1848

---

*) *Г. де-Метцъ.* Hermann von Helmholtz. „В. О. Ф." №№ 128 и 129, или № 64 по каталогу изданій „Вѣстника". Тамъ же помѣщенъ и краткій очеркъ работъ Гельмгольца по физикѣ.

**) *А. Столѣтовъ.* Германъ фонъ Гельмгольтцъ. Вѣстн. Евр. 1891. VI.

***) Германъ фонъ Гельмгольтцъ. (1821—1891). Публичныя лекціи, читанныя въ Импер. Моск. университетѣ въ пользу гельмгольтцовскаго фонда. Москва. 1892.

года военнымъ врачемъ въ Потсдамѣ, онъ переѣхалъ въ Берлинъ и здѣсь издалъ свою извѣстную брошюру „Ueber die Erhaltung der Kraft“, въ которой впервые былъ вполнѣ опредѣленно формулированъ великій законъ сохраненія энергіи. Въ 1849 году онъ занимаетъ каѳедру физіологіи и общей анатоміи въ Кенигсбергѣ, въ 1855 году — каѳедру анатоміи и физіологіи въ Боннѣ, а въ 1858 году переходитъ профессоромъ физіологіи въ Гейдельбергъ. Въ 1871 году скончался извѣстный физикъ, профессоръ берлинскаго университета Густавъ Магнусъ. Университетъ пригласилъ на его каѳедру Гельмгольца, который къ тому времени стяжалъ себѣ большую извѣстность своими физико-физіологическими трудами (изслѣдованіе глаза, анализъ и синтезъ звуковъ). Эту каѳедру онъ занималъ до самой смерти. Въ 1877 году онъ, при содѣйствіи правительства, выстроилъ роскошный Физическій Институтъ Берлинскаго университета, взамѣнъ маленькой лабораторіи, бывшей прежде при университетѣ. Въ 1888 году германскимъ рейхстагомъ было основано „Physikalisch-Technische Reichsanstalt“ и Гельмгольцъ былъ назначенъ его президентомъ. Руководство Физическимъ Институтомъ онъ передалъ проф. Августу Кундту, скончавшемуся три мѣсяца тому назадъ.

Кромѣ работъ по физіологіи, физикѣ, особенно по акустикѣ, оптикѣ и электричеству, Гельмгольцъ оставилъ рядъ трудовъ по гидродинамикѣ въ приложеніи ея къ метеорологическимъ явленіямъ и, наконецъ, по чистой математикѣ, а также два тома рѣчей и популярныхъ очерковъ по физикѣ, физіологіи, психологіи, музыкѣ, живописи, философіи и т. п., написанныхъ съ рѣдкой талантливостью.

Въ настоящее время трудно оцѣнить значеніе Гельмгольца въ исторіи науки. „Передъ нами, писалъ проф. Столѣтовъ, вполнѣ исключительное явленіе, натура истинно титаническая, человѣкъ первоклассный изъ первоклассныхъ“... Въ этихъ словахъ нѣтъ преувеличенія: глубокій ученый въ нѣсколькихъ областяхъ знанія, геніальный экспериментаторъ, философъ въ истинномъ значеніи этого слова — это дѣйствительно явленіе исключительное, дѣствительно титаническая натура, и смѣло можно сказать, что въ лицѣ Гельмгольца наука потеряла одного изъ тѣхъ великихъ людей, которые являются вѣками и память о которыхъ сохраняется исторіей науки навсегда. Смерть Гельмгольца — тяжелая, невознаградимая потеря для всего ученаго міра.

В. Г.

Августъ Кундтъ.

21/9 мая настоящаго года скончался послѣ упорной болѣзни извѣстный физикъ Августъ Кундтъ. Родился онъ 18/6 ноября 1839 г. въ Шверинѣ и тамъ же, въ гимназіи, получилъ первоначальное образованіе. Въ 1860 году онъ поступилъ въ Лейпцигскій университетъ, желая посвятить себя изученію астрономіи, но скоро перевелся въ Берлинскій университетъ. Здѣсь онъ увлекся физикой, благодаря главнымъ образомъ вліянію извѣстнаго Густава Магнуса, выдающагося лектора и экспериментатора, и скоро попалъ въ число избранныхъ, работавшихъ въ маленькой лабораторіи, которая помѣщалась въ двухъ комнатахъ частной квартиры Магнуса. Между учителемъ и ученикомъ установились близкія идеально-дружескія отношенія, и въ 1864 году Кундтъ сталъ ассистентомъ Магнуса. Въ 1866 году Кундтъ женился. Годы, проведенные имъ вмѣстѣ съ Магнусомъ, Кундтъ всегда называлъ счастливѣйшимъ временемъ своей жизни и до самой смерти сохранилъ благодарность и почтеніе къ своему учителю.

Въ 1867 г. Кундтъ занялъ каѳедру экспериментальной физики въ цюрихскомъ политехникумѣ, но оставался здѣсь всего два года. Изъ Цюриха онъ перешелъ въ Вюрцбургъ, а отсюда въ Страссбургъ. 17 лѣтъ, проведенные имъ въ Страссбургскомъ университетѣ, были несомнѣнно самымъ плодотворнымъ временемъ его научной дѣятельности. Здѣсь вокругъ него собралось много учениковъ, съ которыми у него всегда устанавливались самыя близкія отношенія. По примѣру своего учителя Магнуса, онъ старался возможно ближе сойтись со своими учениками, никогда не предписывалъ имъ заниматься такъ либо иначе, а лишь совѣтовалъ и терпѣливо выслушивалъ замѣчанія и совѣты самыхъ молодыхъ студентовъ.

Въ 1888 году Гельмгольцъ, назначенный президентомъ основаннаго тогда Physikalisch-Technische Reichsanstalt, оставилъ завѣдываніе Физическимъ Институтомъ при Берлинскомъ университетѣ и на его мѣсто назначенъ былъ Кундтъ.

Послѣдніе шесть лѣтъ его жизни не принадлежали къ особенно счастливымъ годамъ. Хотя онъ нашелъ въ Берлинѣ и обширное поле для своей дѣятельности и много друзей, но все же онъ часто съ тоской вспоминалъ о своей страссбургской лабораторіи и о проведенныхъ въ ней годахъ тихаго труда. Въ Берлинѣ же у него стала развиваться болѣзнь сердца; правда, онъ не оставлялъ своихъ работъ, но болѣзнь причиняла ему много страданій. Лишь незадолго до его смерти друзья уговорили его оставить занятія и отдохнуть на время въ деревнѣ, въ окрестностяхъ Любека; онъ и отдохнулъ, но на всегда.

Первыя работы Кундта относятся къ области оптики. Послѣ нѣсколькихъ небольшихъ изслѣдованій надъ параллельными пластинками, надъ глазомѣромъ и оптическими обманами, надъ деполяризаціей и двойнымъ преломленіемъ свѣта въ звучащихъ стержняхъ, онъ переходитъ къ акустикѣ и уже первыя его работы въ этой области—о движеніи упругихъ тѣлъ на звучащихъ трубахъ и стержняхъ и объ опредѣленіи скорости распространенія звука въ твердыхъ тѣлахъ и газахъ при помощи акустическихъ пылевыхъ фигуръ,—отличаются свойственной ему оригинальностью и обличаютъ въ авторѣ ловкаго экспериментатора. За этими работами послѣдовалъ цѣлый рядъ изслѣдованій въ различныхъ областяхъ физики, главнымъ образомъ по оптикѣ и акустикѣ, изъ которыхъ мы перечисляемъ лишь главнѣйшія: опыты надъ треніемъ и теплопроводностью разрѣженныхъ газовъ, вращеніе плоскости поляризаціи въ газахъ, открытіе электромагнитной круговой поляризаціи въ ферромагнитныхъ металлахъ, опредѣленіе коэффиціентовъ преломленія свѣта въ металлахъ и пр. Въ большей части этихъ работъ ему приходилось сталкиваться съ непреодолимыми на первый взглядъ чисто-техническими затрудненіями, но онъ всегда выходилъ побѣдителемъ.

В. Г.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Дѣйствія грозы. Недавно во время грозы въ фермѣ Vauxdimes (Côte d'Or) молнія ударила въ два тополя на разстояніи 3 метровъ другъ отъ друга; листва при этомъ не пострадала, но вся кора была содрана и куски ея разбросаны метровъ на 100 кругомъ. На ивѣ, росшей между тополями, кора тоже оказалась приподнятой. Въ прудѣ, находившемся тутъ-же (длина 10 м., шир. 5 м. и глуб. 4 м.), вся рыба была убита.—Во время сильной грозы, бывшей нѣсколько лѣтъ тому назадъ въ деревнѣ Haugh (въ Шотландіи), была убита молніей утка на лету. По всей вѣроятности птицы мало страдаютъ отъ молніи только потому, что онѣ прячутся.—Во время необыкновенно сильной грозы въ Narrabri (Новый Валлисъ) большія опустошенія были произведены градомъ величиной съ куриное яйцо: было убито цѣлое стадо, масса птицъ, кэнгуру и др. животныхъ. Всѣ стекла въ окнахъ были перебиты, была пробита даже желѣзная крыша. Градины имѣли конусообразную форму; многія своей формой напоминали капли, смерзшіяся вмѣстѣ; у однѣхъ было матовое ядро, другія были прозрачны.

Наибольшее количество дождя въ 24 часа. Англійскій метеорологъ Clément Wragge говоритъ, что наибольшее, какое онъ помнитъ, количество дождя въ 24 часа было 3 февр. 1893 г. въ Queensland и = 906,8 mm. Другой метеорологъ Douglas Archibald говоритъ (и всѣ индійскіе метеорологи могутъ это подтвердить), что maximum дождя былъ 14-го іюня 1876 г. въ Chirapunji и = 1036 mm. 12 іюня того-же года выпало 762 mm, а всего съ 12 по 15 выпало 2591 mm. (l'Astronomie № 7).

Новыя звѣзды. Локьеръ собралъ и разсмотрѣлъ всѣ наблюденія надъ новыми звѣздами съ цѣлью прослѣдить измѣненія въ ихъ спектрахъ съ перваго появленія новой звѣзды до полнаго исчезновенія. Онъ пришелъ къ заключенію, высказанному имъ и раньше, что *новыя звѣзды образуются отъ столкновенія метеорныхъ роевъ.* Новыя звѣзды имѣютъ спектръ сложный, состоящій изъ двухъ спектровъ, наложенныхъ другъ на друга.—Когда Nova Coronae (1866 г.) была наблюдаема въ первый разъ, она дала спектръ изъ свѣтлыхъ линій, наложенный на спектръ съ темными линіями; линіи принадлежали водороду. Въ голубой части спектра были двѣ слабо обозначенныя линіи, тождественныя съ тѣми, которыя встрѣчаются въ спектрѣ кометъ и принадлежатъ углероду.—Спектръ Nova Cygni (1876) при первомъ появленіи состоялъ изъ свѣтлыхъ линій и полосъ; линіи водорода были весьма отчетливы. По мѣрѣ уменьшенія яркости звѣзды линій становилось меньше и онѣ уменьшались въ яркости; когда другія линіи поблѣднѣли, особенно ярко выступила линія въ зеленой части спектра около λ 500, считающаяся характерной для туманностей. Тѣ же явленія произошли бы, если-бъ звѣзда произошла отъ столкновенія туманностей. Блескъ линіи 500 во время охлажденія и потуханія звѣзды является доказательствомъ сравнительно низкой температуры туманностей.—Nova Andromedae (1885) повидимому имѣетъ спектръ туманности; болѣе яркая часть его принадлежитъ углероду.—Повидимому углеродъ одинъ изъ наиболѣе характерныхъ элементовъ спектра новыхъ звѣздъ; онъ также характеренъ для спектровъ метеорныхъ роевъ; присутствіе этого элемента въ спектрахъ новыхъ звѣздъ и говоритъ въ пользу теоріи происхожденія ихъ черезъ столкновеніе. (l'Astronomie № 8).

К. Смоличъ (Умань).

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ И БРОШЮРЫ.

Приложеніе алгебры къ геометріи. По программѣ реальныхъ училищъ составилъ преподаватель Харьковскаго реальнаго училища *П. С. Флоровъ*. Харьковъ. 1894. Ц. 75 к.

Дифференціальное и интегральное исчисленія съ приложеніями къ анализу и геометріи. Составилъ *А. Пароменскій*. Спб. Изд. К. Л. Риккера. 1893.

Lexikon der gesamten Technik und ihrer Hilfswissenschaften. Herausgegeben von *Otto Lueger* im Verein mit Fachgenossen. Mit zahlreichen Abbildungen. 1. Abteilung. 1. Hälfte. Deutche Verlags-Anstalt. Stuttgart, Leipzig, Berlin, Wien. 1894. Pr. M. 2,50.

Къ столѣтію открытія гальваническаго тока 1794—1894. Взаимное соотношеніе явленій статическаго и динамическаго электричества и опредѣленіе электрическихъ единицъ. *А. Корню*. Переводъ съ французскаго *И. Пламеневскаго*, преподавателя математики и физики Тифлисской 3-ей гимназіи. Тифлисъ. 1894 г. Ц. 30 к.

Краткія свѣдѣнія по электротехникѣ въ ея современномъ состояніи. Изданы для посѣщающихъ IV-ю электрическую выставку Императорскаго Русскаго Техническаго Общества. Спб. Изданіе журнала „Электричество." 1892.

Метеорологическій сборникъ, издаваемый Императорскою Академіею Наукъ. Томъ IV. № 1. *Г. Абельсъ*. Суточный ходъ температуры снѣга и опредѣленіе зависимости между теплопроводностью снѣга и его плотностью. № 2. *Г. Вильдъ*. Инструментъ для магнитныхъ наблюденій и астрономическихъ опредѣленій во время путешествій. № 3. *М. Рыкачевъ*. Суточный ходъ температуры воздуха между тропиками въ океанахъ. № 4. *Г. Вильдъ*. Нормальные барометры Главной Физической Обсерваторіи въ С.-Петербургѣ. № 5. *О. Хвольсонъ*. Актинометрическія изслѣдованія. Построеніе актинометра и пиргеліометра. № 6. *Э. Бергъ*. Наблюденія надъ снѣжнымъ покровомъ и метелями въ Россійской Имперіи зимою 1890—1891 гг. № 7. *В. Дубинскій*. Результаты изслѣдованія барографа Шпрунгъ-Фуса въ Константиновской Обсерваторіи въ г. Павловскѣ. № 8. Сводъ постановленій международныхъ метеорологическихъ конференцій, отъ Лейпцигской конференціи въ августѣ 1872 до Мюнхенской конференціи въ августѣ 1891 г. включительно. № 9. *Г. Вильдъ*. Отчетъ по Главной Физической Обсерваторіи за 1892 годъ. **Мелкія сообщенія.** I. *Г. Вильдъ*. Лѣто 1892 года и зима 1892—1893 года въ С.-Петербургѣ. II. *А. Преображенская*. О борѣ, бывшей въ Новороссійскѣ между 3 и 9 января 1893 года (по нов. стилю). III. *А. Шенрокъ*. Замѣчательное пониженіе температуры въ С.-Петербургѣ и его окрестности, 11 февраля 1893 года. IV. *А. Карамзинъ*. Температура воздуха на хуторѣ Полибино. Спб. 1894. Ц. 7 р. 60 к.

Ueber die durch einen äusseren Druck verursachte Aenderung der Spankraft gesättigten Dampfes. Von *N. Schiller*. Separat-Abdruck aus den Annalen der Physik und Chemie. Neue Folge, B. 53. Leipzig, 1894.

О варіаціи выраженія электростатической энергіи и силахъ электрострикціи. Проф. *Н. Н. Шиллера*. Кіевъ. 1894.

ЗАДАЧИ.

№ 83. Показать, что сумма разстояній всякой точки отъ вершинъ четыреугольника болѣе суммы діагоналей этого четыреугольника.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 84. Дана окружность радіуса R. Изъ точки M проведена сѣкущая MAB, внѣшняя часть которой $AM = a$, а внутренняя $AB = b$, и касательныя MC и MD. Опредѣлить AC, AD, BD и BC.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 85. Рѣшить уравненіе

$$x^4 - 4ax^3 + 2a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = 0.$$

(Заимств.) *Д. Е.* (Ив.-Вознес.).

№ 86. Найти условія, при которыхъ въ равнобедренномъ треугольникѣ

$$2a > b + h, \quad 2a = b + h \text{ и } 2a < b + h,$$

гдѣ a обозначаетъ одну изъ двухъ равныхъ сторонъ треугольника, b—третью сторону и h—высоту, на нее опущенную.

Чаганъ (Уральскъ).

№ 87. Показать, что при $x > 1$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \cdots$$

А. Варенцовъ (Шуя).

№ 88. Тонкій прутъ, длина котораго $= l$, образуетъ съ отвѣсною линіей уголъ φ, а проэкція его на горизонтальную плоскость образуетъ съ полуденной линіей уголъ ψ. Опредѣлить длину тѣни, отбрасываемой прутомъ въ истинный полдень при высотѣ солнца h, а также уголъ между тѣнью и полуденной линіей.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 381 (2 сер.). Рѣшить систему:

$$x+y+z+t=4m,$$
$$x^2+y^2+z^2+t^2=8m^2-4n^2,$$
$$x^3+y^3+z^3+t^3=16m^3-12mn^2,$$
$$x^4+y^4+z^4+t^4=32m^4-32m^2n^2+4n^4+4p^4.$$

Возвышая первое ур. въ квадратъ и вычитая изъ него второе, найдемъ

$$xy+yz+zt+xz+xt+yt=4m^2+2n^2.$$

Такъ какъ

$$6(xyz+xyt+xzt+yzt)=(x+y+z+t)^3-3(x^2+y^2+z^2+t^2)(x+y+z+t)+$$
$$+2(x^3+y^3+z^3+t^3),$$

то легко найдемъ

$$xyz+xyt+xzt+yzt=4mn^2,$$

а изъ тождества

$$(x+y+z+t)^4=3(x^2+y^2+z^2+t^2)^2+4(x^2+y^2+z^2+t^2)(xy+xz+xt+yz+yt+zt)+$$
$$+8(xyz+xyt+xzt+yzt)(x+y+z+t)-2(x^4+y^4+z^4+t^4)-8xyzt,$$

на основаніи предыдущихъ равенствъ, найдемъ, что

$$xyzt=n^4-p^4,$$

а потому x, y, z и t суть корни уравненія

$$X^4-4mX^3+(4m^2+2n^2)X^2-4mn^2X+n^4-p^4=0,$$

которое обращается въ биквадратное, если въ немъ положить $X=m+Y$.

А. Вареицовъ (Ростовъ н. Д.).

№ 587 (2 сер.). Вычислить площадь равнобедреннаго треугольника по радіусамъ вписаннаго въ него и описаннаго около него круговъ.

Пусть въ равнобедренномъ $\triangle ABC$ сторона $AB=BC=a$, $AC=b$, O — центръ описаннаго, O_1 — вписаннаго круга, R—радіусъ описаннаго, r—вписаннаго круга, $OO_1=x$. Опустимъ изъ O и O_1 перпендикуляры OM и O_1N на сторону BC. Очевидно, что искомая площадь

$$\triangle={}^b/_2(R+r+x).$$

Изъ подобныхъ треугольниковъ BO_1N и BOM имѣемъ:

$$\frac{R+x}{R}=\frac{a-{}^b/_2}{{}^a/_2},$$

откуда

$$\frac{x}{R}=1-{}^b/_a\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Изъ подобныхъ треугольниковъ BO_1N и BDC (D—средина основанія) имѣемъ:

$$\frac{R+x}{r}=\frac{2a}{b}.$$

Опредѣливъ отсюда b/a и подставивъ найденное значеніе въ ур. (1), изъ полученнаго уравненія найдемъ

$$x=\sqrt{R^2-2Rr}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ треугольника AOD опредѣляемъ

$$b/_2=\sqrt{R^2-(r+\sqrt{R^2-2Rr})^2}.$$

Поэтому

$$\Delta=(R+r+\sqrt{R^2-2Rr})\sqrt{R^2-(r+\sqrt{R^2-2Rr})^2}=$$
$$=(R+r+\sqrt{R^2-2Rr})\sqrt{r(2R-r-2\sqrt{R^2-2Rr})}.$$

К. Щиголевъ (Курсъ); *Н. С.*, *С. Бабанская* (Тифлисъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *П. Ивановъ* (Одесса); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 527 (1 сер.). Рѣшить уравненія

$$x+y+z+t=-a,$$
$$x^2+y^2+z^2+t^2=a^2-2b^2,$$
$$x^3+y^3+z^3+t^3=2a^3+3ab^2,$$
$$x^4+y^4+z^4+t^4=a^4+2b^4.$$

Поступая, какъ и при рѣшеніи задачи № 381 (2 сер.) (напечатано въ этомъ же № „В. О. Ф.“), легко найдемъ:

$$xy+xz+xt+yz+yt+zt=b^2,$$
$$xyz+xyt+xzt+yzt=a^3,$$
$$xyzt=-a^4-a^2b^2,$$

а потому x, y, z и t суть корни уравненія

$$X^4+aX^3+b^2X^2-a^3X-a^4-a^2b^2=0,$$

которое разлагается на множители

$$(X+a)(X-a)(X^2+aX+a^2+b^2)=0.$$

В. Х. (Курскъ).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 3-го Сентября 1894 г.
„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

Solutions de questions proposées. №№ 822, 829, 833, 846, 859.
Questions d'examen. №№ 604—608.
Questions proposées. №№ 909—918.

Д. Е.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ
НОВѢЙШИХЪ РУССКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Колотильщиковъ. Самодѣльная ручная моментальная камера. Съ 8 рис. въ текстѣ.

Лилиэнталь, С. Я. Основательное обученіе двойной итальянской бухгалтеріи посредствомъ лекцій-корреспонденцій, вполнѣ замѣняющихъ устное преподаваніе. Изд. 11-е. Москва. 1894.

Некрасовъ, П. А. Термодинамика и электричество. По поводу изслѣдованій кн. Б. Голицына по математической физикѣ. (Изъ „Ученыхъ Записокъ" Имп. моск. унив., отд. физ.-мат.). Москва. 1894.

Покровскій, Ѳ. Ариѳметика. Ея основанія и главныя приложенія. Спб. 1894. Ц. 55 к.

Ратнеръ, И. Н. Таблицы обыкновенныхъ логариѳмовъ о десяти знакахъ. Сост. по новому методу. Варшава. 1894.

Рыбкинъ, Н. Прямолинейная тригонометрія. Вып. 1-й, содержащій курсъ гимназій. Изд. магазина „Сотрудникъ школъ" А. Залѣсской. Москва. 1894. Ц. 60 к.

Слудскій, Ѳ. А., засл. проф. Лекціи по высшей геодезіи. Москва. 1894. Ц. 1 р. 50 к.

Фламмаріонъ, Камиллъ. Конецъ міра. Астрономическій романъ въ двухъ частяхъ, съ эпилогомъ. (Часть 1-я. Въ двадцать пятомъ столѣтіи—теоріи. Часть 2-я. Черезъ десять милліоновъ лѣтъ). Съ 49 рис. А. Робида и др. Спб Изд. М. О. Вольфъ. Ц. 20 к.

Воейковъ, А. И. Наблюденія надъ снѣжнымъ покровомъ въ Россіи въ 1892—93 гг. (Отд. отт. изъ „Метеорологическаго Вѣстника", 1894 г.). Спб. 1894.

Извѣстія физико-математическаго общества при Имп. казанскомъ университетѣ. Вторая серія. Томъ IV. № 1. Казань. 1894.

Карповъ, И. И. Руководство къ изученію практической фотографіи для начинающихъ и любителей. Изд. 5-е безъ перемѣнъ, съ рисунками въ текстѣ. Спб. 1894. Ц. 2 р., съ перес. 2 р. 35 к.

Лавровъ, А. М. Спутникъ фотографа. Спб. 1894.

Леви, В. и *Николаевъ, С* Повторительный курсъ по аналитической геометріи, съ приложеніемъ вопросовъ для повторенія. (Для высшихъ учебныхъ заведеній). Составл. по Андрееву, Briot et Bouquet, Сомову и др. Подъ ред. горн. инж. Н. Ф. Мещерина. Часть 1-я Спб. 1894. Ц. 1 р. 50 к.

Меншуткинъ, Н., проф. Имп. спб. универс. Аналитическая химія. Изд. 7-е. Спб. 1894. Ц. 2 р.

Временникъ главной палаты мѣръ и вѣсовъ. Часть I (Министерство финансовъ по департаменту торговли и мануфактуръ). Спб. 1894.

Мерчингъ, Г. К. Міровой эфиръ по гипотезамъ механики. Этюдъ. Изд. собранія инженеровъ путей сообщенія. Спб. 1894.

Наблюденія метеорологической обсерваторіи Имп. казанскаго университета, издаваемыя проф. Д. А. Гольдгаммеромъ. Годъ 1894. Казань. 1894.

Отчетъ о дѣятельности физико-математическаго общества при Императорскомъ казанскомъ университетѣ за 3-й годъ его существованія. Казань. 1894.

Пергаментъ, О. Исторія барометра и его примѣненій (по поводу 250-лѣтія его существованія). 1643 - 1893. (Отд. отт. изъ популярно-научнаго журнала „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики"). Одесса. 1894.

Труды приднѣпровской метеорологической сѣти. Томъ I, вып. 9. Грозовая дѣятельность въ бассейнѣ Днѣпра въ 1893 г. *П. И. Броунова.* (Отт. изъ „Университетскихъ Извѣстій" за 1893 г.). Кіевъ. 1893.

Уставъ Императорскаго московскаго общества испытателей природы. Москва. 1894.

Винклеръ, Кл., проф. Руководство къ химическому изслѣдованію газовъ при техническихъ производствахъ. (Съ политип. въ текстѣ). Переводъ горн. инж. К. Флуга. Изд. 2-е. Спб. 1894.

Головинъ, Е. П. Словарь фотографической химіи русско-латинско-французско-нѣмецко-англійскій. Изд- автора. Спб. 1894.

Извѣстія Имп. общества любителей естествознанія, антропологіи и этнографіи, состоящаго при Имп. московскомъ университетѣ. Томъ LXXVIII, вып. 2. Труды отдѣленія физическихъ наукъ общества любителей естествознанія. Томъ 6-й. Вып. 2. Подъ ред. Н. Е. Жуковскаго и П. В. Преображенскаго. Москва. 1894.

Ковальскій, Я. И. Краткій очеркъ химическихъ явленій. Изъ курса физики въ пріютѣ Принца Ольденбургскаго. (Въ объемѣ средн. учебн. заведеній). Спб. 1894.

Райскій, Н. Д. Ариѳметика въ примѣрахъ и задачахъ. Кіевъ. 1894 г. Ц. 60 к.

Садовскій, А. И. Къ вопросу о сопротивленіи висмута перемѣнному току. Диссертація, представленная для полученія степени магистра физики. Спб. 1894.

Соколовъ, Н. Основныя дѣйствія надъ періодическими десятичными дробями. Спб. 1894.

Тицъ, Б. Н. Землемѣріе. Какъ мѣрить землю и что для этого нужно знать? Со многими чертежами и рисунками. Москва. 1894.

Флавицкій, Ф. М., проф. Имп. каз. унив. Общая или неорганическая химія. Лекціи. Вып. II. (Окончаніе). Съ 14 рис. въ текстѣ. Казань, 1894.

Флоровъ, П. С. Приложеніе алгебры къ геометріи. По программѣ реальныхъ училищъ. Харьковъ. 1894.

Хайловъ, Н. Сборникъ геометрическихъ задачъ. Изд. автора. Губ. гор. Владиміръ. 1894. Ц. 50 к.

Шатуновскій, С. Объ одномъ признакѣ сходимости рядовъ съ положительными членами. (Отд. отт. изъ попул.-научнаго журнала „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики"). Одесса.

Шидловскій, Вл. Изъ области элементарной алгебры. Къ вопросу о нѣкоторыхъ случаяхъ дѣлимости многочленовъ. (Отд. отт. изъ попул.-научнаго журнала „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики"). Одесса.

Войнаровскій, П., телегр. инж. Электрическая передача силы на разстояніе перемѣнными однофазнымъ и многофазнымъ токами. Спб. 1894.

Евтушевскій, В. А. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ и численныхъ примѣровъ для приготовительнаго и систематическаго курса. Первая часть—цѣлыя числа. Изд. 47-е, Д. Полубояринова. Спб. 1894. Ц. 35.

Жизнь замѣчательныхъ людей. Біографическая библіотека Ф. Павленкова. С. В. Ковалевская, ея жизнь и научная дѣятельность. Біографическій очеркъ *Е. Ѳ. Литвиновой*. Съ портретомъ Ковалевской, гравир. Геданомъ. Спб. 1894. Ц. 25 к.

Кушниръ, С. А. Учебникъ для легкаго изученія двойной бухгалтеріи (итальянской). Сост. по источникамъ авторитетныхъ бухгалтеровъ. Изд. Б. Сапожникова. Одесса. 1894. Ц. 1 р.

Новая и наилучшая система желѣзныхъ дорогъ. Электрическая и экономическая желѣзная дорога системы инж. Ѳ. Б. Бастамова. Спб. 1894.

Розенбергеръ, Фердинандъ. Очеркъ исторіи физики съ синхронистическими таблицами по математикѣ, химіи, описательнымъ наукамъ и всеобщей исторіи. Часть 3-я. Исторія физики въ послѣднее столѣтіе. Выпускъ 2-й. Переводъ съ нѣмецкаго подъ ред. И. М. Сѣченова. Изд. К. Риккера. Спб. 1894.

Богородскій, А., студ. Полученіе трехводныхъ гидратовъ бромистаго и хлористаго лития и пятиводной двойной соли іодистаго лития съ іодистымъ свинцомъ. Казань. 1894.

Вильке, А. Электричество, его источники и примѣненія въ промышленности. Перевелъ и дополнилъ Д. Головъ. Вып. IX и X. Изд. Ф. Щепанскаго. Спб.

Виноградовъ, С. П., прив.-доц. Имп. моск. универс. Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій. Курсъ лекцій. Москва. 1894.

Гартманъ, Е., инж. О примѣненіи электрической передачи силы. изд. техн. конторы В. И. Щербакова. Москва. 1894.

Hoorweg, I. S., д-ръ. Медицинская электро-техника и ея физическія основы. Перевелъ съ нѣм. д-ръ А. Самойловъ. Съ 77 рис. въ текстѣ. Изд. К. Риккера. Спб. 1894. Ц. 1 р. 20 к.

Делоне, Н. Б., прив.-доц. Имп. спб. унив. Передача вращенія и механическое черченіе кривыхъ шарнирно-рычажными механизмами. Съ 4 листами чертежей. Спб. 1894.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1894. — № 3.

Sur une proposition fondamentale du calcul asymptotique; par M. *E. Cesàro.* Положимъ, что a и b имѣютъ общимъ предѣломъ t_0 и что при этомъ условіи интегралы съ положительн. элементами

$$F(x)=\int_a^b f(x,t)dt,\ G=\int_a^b g(x,t)dt$$

безконечно возрастаютъ при приближеніи x къ x_0. Авторъ задается отысканіемъ предѣла отношенія $\frac{F(x)}{G(x)}$ при $x=x_0$ и находитъ слѣдующую теорему:

Если отношеніе $\frac{f(x,t)}{g(x,t)}$ *при* $t=t_0$ *имѣетъ предѣломъ ф-цію* $k(x)$, *то* $\lim\limits_{x=x_0}\frac{F(x)}{G(x)}=k$, *гдѣ* k *есть предѣлъ ф-ціи* $k(x)$ *при* $x=x_0$.

Теорема эта справедлива для рядовъ

$$F(x)=\sum_0^\infty u_n(x) \text{ и } G(x)=\sum_0^\infty v_n(x),$$

если при приближеніи x къ x_0 члены ихъ имѣютъ конечныя значенія а самые ряды дѣлаются расходящимися. Пользуясь этой теоремой и свойствами ф-цій Г, авторъ получаетъ слѣдующія ассимптотическія равенства:

$$\lim_{x=1}(x-1)\left(\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right)=1;$$

$$\lim_{q=1}(1+2q+2q^4+2q^9+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)\sqrt{1-q}=\sqrt{\pi};$$

$$\lim_{q=1}\frac{q+q^2+q^4+q^8+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\lg\frac{1}{\lg\frac{1}{q}}}=\frac{1}{\lg 2}\ (\text{рядъ } Catalan\text{'a});$$

$$\lim_{t=0}\left[t.\lambda(e^{-t})+e^{-t}\lg t\right]=C,$$ гдѣ C—*Эйлерова постоянная* и

$$\lambda(q)=\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^3}{1-q^3}+\cdot\cdot\cdot\cdot\ (\text{рядъ } Lambert\text{'a}).$$

Applications d'un théorème de Chasles; par *M. Balitrand.* Теорема *Chasles*'я: *Прямыя, соединяющія гомологичныя точки двухъ гомографическихъ рядовъ, обертываютъ коническое сѣченіе, касательное къ основаніямъ этихъ рядовъ.* Авторъ пользуется этой теоремой для рѣшенія задачи: „даны четыре кривыя C, C_1, C_2, C_3; касательная $\triangle$ къ C пересѣкаетъ C_1, C_2, C_3 въ точкахъ M_1, M_2, M_3; на этой касательной задается точка M_4 такъ, что ангарм. отнош. $(M_1M_2M_3M_4)$=постоян.; требуется найти касательную къ геометрич. мѣсту C_4 точки M''_4,—и выводитъ затѣмъ теорему: „если прямая $\triangle$, обертывающая кривую C, пересѣкается кривыми C_1, C_2, C_3 въ M_1, M_2, M_3 такъ что $\frac{M_2M_1}{M_2M_3}$= пост., то эта прямая и касательныя къ C_1, C_2, C_3 въ M_1, M_2, M_3 обертываютъ параболу, касательную къ $\triangle$ въ той-же точкѣ M, въ которой $\triangle$ касается C.

При взаимномъ преобразованіи фигуръ (transformation réciproque) соотвѣтственныя точки M_1 и M_2 двухъ соотвѣтственныхъ кривыхъ C_1 и C_2 лежатъ на одной прямой съ нѣкоторой постоянной точкой S и видимы подъ прямымъ угломъ изъ другой постоянной точки O. Отсюда слѣдуетъ, что существуетъ конич. сѣченіе, имѣющее фокусъ въ O и касающееся касательныхъ къ C_1 и C_2 въ M_1 и M_2 и прямой M_1M_2 въ точкѣ S.

Преобразованіе съ ортогональными касательными (transformation orthotangentielle) получается изъ предыдущаго и имѣетъ то свойство, что соотвѣтственн. касательныя соотвѣтственныхъ кривыхъ ортогональны и пересѣкаются на постоянной прямой. Это преобразованіе приводитъ къ слѣдующимъ теоремамъ. Пусть касательная въ σ къ гипоциклоидѣ съ тремя точками возврата пересѣкаетъ эту кривую еще въ α и β; касательныя въ этихъ точкахъ ортогональны и пересѣченіе ихъ γ лежитъ на окружности, вписанной въ гипоциклоиду.

Теор. I. Черезъ точку π на прямой $\alpha\beta$ проведены касательныя $\pi\mu$ и $\pi\nu$ къ гипоциклоидѣ; ассимптоты равнобочной гиперболы, касательной въ σ къ гипоциклоидѣ и проходящей черезъ μ и ν, параллельны касательнымъ къ гипоциклоидѣ въ α и β.

Теор. II. Окружность $\alpha\beta\gamma$ касается въ γ къ окружности, вписанной въ гипоциклоиду.

Bibliographie. An elementary Treatise on Modern Pure Geometry, by R. Lachlan (London. 1893. Prix: 9 sh). Оглавленіе.

Notes mathématiques. 5. *Théorème de Trigonométrie.* Если дуга x заключается между O и $^1/_3\pi$, то $^1/_3 x^3 < \operatorname{tg} x - x < ^2/_3 x^3$. (*P. Delens*).

6. *Sur le tétraèdre isoscèle.* Равногранным тетраэдромъ наз. такой, у котораго противоположныя ребра равны (у такого тетраэдра всѣ грани равны). Если въ прямоугольномъ параллелепипедѣ ABCDA'B'C'D' провести на граняхъ непараллельныя діагонали, то получится равногранный тетраэдръ (ACB'D' или A'C'BD). Если ребра параллелепипеда суть α, β, γ, то ребра полученнаго тетраэдра суть

$$a = \sqrt{\beta^2+\gamma^2},\ b = \sqrt{\gamma^2+\alpha^2},\ c = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Центръ O параллелепипеда служитъ центромъ шара, описаннаго около равнограннаго тетраэдра и вписаннаго въ него. Эта точка O находится на пересѣченіи прямыхъ, соединяющихъ средины противоположныхъ реберъ тетраэдра; прямыя эти взаимно перпендикулярны. Центры шаровъ, внѣвписанныхъ въ тетраэдръ ACB'D' суть вершины A',C',B,D параллелепипеда.

7. *Construction d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués* AA', BB' *en grandeur et en position*. Пусть O есть центръ эллипса; построимъ параллелограммъ OACB и раздѣлимъ стороны его OA и AC на одно и то же число равныхъ частей и отмѣтимъ точки дѣленія отъ A къ O и отъ A къ C цифрами 1,2,3.... и 1',2',3',...., прямыя B'1 и B1', B'2 и B2',.... пересѣкаются на эллипсѣ.

Раздѣлимъ AC на нѣсколько равныхъ частей въ точкахъ 1,2,3,..., и проведемъ прямыя B1,B2,B3,...; пересѣченія ихъ съ CA' пусть будутъ 1',2',3',.... Прямыя B1 и A1', B2 и A2',... пересѣкаются на эллипсѣ (*D'Ocagne*).

Solutions de questions proposées. №№ 634, 829, 839, 870. Заимствуемъ изъ № 634 равенства *Cl. Servais* при m цѣломъ:

$$\frac{1.3.5\ldots.(2m+1)}{2.4.6\ldots.(2m+2)} = \frac{1}{2} - \frac{m}{1}\,\frac{1}{2.4} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{1.3}{2.4.6} - \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad (1)$$

$$\frac{2.4.6\ldots.(2m)}{3.5.7\ldots\ldots(2m+1)} = 1 - \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{3} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{1}{5} - \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad (2)$$

Второе изъ нихъ, какъ замѣтилъ *Déprez*, есть частный случай равенства *Hermite*'а:

$$\frac{2.4.6\ldots.2n}{1.3.5\ldots\ldots(2n+1)}\left[1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{1.3\ldots.(2n-1)}{2.4\ldots.2n}x^n\right] =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}C_{n,1}(x-1) + \frac{1}{5}C_{n,2}(x-1)^2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{1}{2n+1}(x-1)^n.$$

Questions proposées. №№ 919—927.

Questions d'examen. №№ 609—616. *Д. Е.*

Обложка
пщется

Обложка
ищется