Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XII Сем. **№ 141.** № 9.

ОСНОВЫ УЧЕНІЯ О ВЕЛИЧИНАХЪ.

(Продолженіе).

55. Разсужденіе, посредствомъ котораго отыскиваются средства, называютъ *анализомъ*. Частный случай анализа открытъ древне-греческимъ философомъ Платономъ. Анализъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Какъ только указана цѣль U, мы ищемъ, что нужно предварительно осуществить для ея достиженія. Принимая во вниманіе каузальную или раціональную связь съ другими предметами, мы находимъ, что для достиженія цѣли U надо предварительно осуществить A, B, C.... Если A, B, C.... находятся въ нашемъ распоряженіи, то A, B, C.... будутъ средствами для цѣли U. Если же A, B, C.... не находятся въ нашемъ распоряженіи, то тогда мы ищемъ, что нужно имѣть раньше для осуществленія A, B, C... Находимъ, что для этого надо предварительно имѣть M, N, O.... Если M, N, O.... въ свою очередь не находятся въ нашемъ распоряженіи, то мы ищемъ, что нужно для осуществленія M, N, O... Находимъ, что M, N, O... будутъ осуществлены, если предварительно мы осуществимъ R, S, T... и т. д. Такимъ образомъ мы подвигаемся впередъ до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до нѣкоторыхъ предметовъ X, Y, Z..., находящихся уже въ нашемъ распоряженіи. Тогда X, Y, Z... будутъ средствами для R, S, T..., а R, S, T... въ свою очередь будутъ средствами для M, N, O..., а M, N, O... будутъ средствами для A, B, C..., и наконецъ A, B, C... будутъ средствами для U. Въ этомъ и состоитъ анализъ.

56. Цѣль U осуществляется такимъ образомъ: Посредствомъ находящихся въ нашемъ распоряженіи X, Y, Z... мы осуществля-

емъ сперва R, S, T..., а потомъ посредствомъ R, S, T... осуществляемъ M, N, O..., а посредствомъ M, N, O... осуществляемъ A, B, C... и, наконецъ, посредствомъ A, B, C... осуществляемъ цѣль U. Умственный процессъ, совершаемый при осуществленіи цѣли, называется *синтезомъ*. Надо различать осуществленіе цѣли въ представленіи отъ ея осуществленія на самомъ дѣлѣ. Осуществленіе цѣли въ представленіи называется часто проектомъ или планомъ.

57. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что синтезъ есть разсужденіе обратное анализу. Въ анализѣ мы исходимъ отъ цѣли и приходимъ къ средствамъ, въ синтезѣ же, наоборотъ, мы идемъ отъ имѣющихся въ нашемъ распоряженіи средствъ и приходимъ къ цѣли. Анализъ есть непремѣнно субъективный процессъ, такъ какъ исходный пунктъ анализа — цѣль U существуетъ только въ представленіи и въ представленіи же создаются для нея средства A, B, C..., а для A, B, C... создаются средства M, N, O... и т. д. Словомъ анализъ оперируетъ только надъ представленіями. Синтезъ же можетъ быть совершенъ или только надъ представленіями, или же можетъ сопровождаться дѣйствительнымъ осуществленіемъ цѣли, а потому надо различать субъективный и объективный синтезы.

58. Выше мы сказали, что между средствами и цѣлью существуетъ такая же связь, какъ между причиной и ея проявленіемъ, или же какъ между основаніемъ и его слѣдствіемъ. Поэтому мы въ одномъ случаѣ называемъ A, B, C... средствами для U, а въ другомъ—причиной или основаніемъ для U. Если A, B, C... существуютъ независимо отъ кого бы то ни было, т. е. независимо отъ какого бы то ни было существа, одареннаго умомъ и волею, и если ихъ существованіе влечетъ за собою необходимо существованіе U, то A, B, C... называются причиной (основаніемъ), а U ея эффектомъ (resp слѣдствіемъ). Если же существованію A, B, C... предшествуетъ представленіе U и если A, B, C... вызваны къ существованію представленіемъ вытекающаго изъ нихъ эффекта, или слѣдствія U, то мы называемъ A, B, C... средствами, а U цѣлью.

59. Одно и то же слѣдствіе часто вытекаетъ изъ различныхъ основаній, а одинъ и тотъ же эффектъ производится различными причинами; точно также одна и та же цѣль можетъ быть достигнута различными средствами. Возможность найти нѣсколько различныхъ системъ средствъ для достиженія одной и той же цѣли влечетъ за собою *необходимость дѣлать выборъ средствъ* и, слѣдовательно, отдавать предпочтеніе одной системѣ средствъ предъ другими. Чѣмъ же мы руководствуемся при выборѣ средствъ? Обыкновенно мы предпочитаемъ ту систему средствъ, которая ведетъ къ цѣли или *наипроще*, или *наилегче*, или *наискорѣе* и т. п. Экономія во времени, въ трудѣ, въ живой или потенціальной энергіи, въ матеріалѣ, въ расходахъ и пр. — вотъ требованія, коими ограничивается свобода выбора средствъ. Эти требованія

называются началами цѣлесообразности или финальными, телеологическими началами.

60. Очень часто мы осуществляемъ цѣль не вполнѣ, а только *приблизительно*, или потому что полное (идеальное) осуществленіе ея невозможно вслѣдствіе недостаточности средствъ (напр. невозможно найти точное произведеніе двухъ приближенныхъ чиселъ), или же потому, что приблизительное осуществленіе цѣли легче, проще, дешевле и т. п. полнаго осуществленія цѣли (т. е. осуществленія идеала); напр. вычисленіе произведенія 2,34785963 на 8,413728407 съ точностью до 0,01 легче вычисленія точнаго произведенія. Въ случаѣ невозможности достигнуть идеала вслѣдствіе недостаточности средствъ, предъявляется требованіе *приблизиться къ идеалу какъ можно болѣе*. Когда же мы довольствуемся приблизительнымъ осуществленіемъ цѣли ради простоты средствъ, мы предъявляемъ требованіе *выбрать* для достиженія намѣченной цѣли *самыя простыя средства*. Итакъ, въ этихъ случаяхъ мы стремимся привести въ возможно большее соотвѣтствіе степень приближенія къ идеалу съ находящимися въ нашемъ распоряженіи средствами, или же простоту средствъ съ намѣченной степенью приближенія къ идеалу. Отсутствіе такого соотвѣтствія есть нарушеніе началъ цѣлесообразности (финальныхъ началъ). Сравнивая средства съ дѣйствіемъ (actio), а цѣль съ производимымъ имъ эффектомъ, послѣднее требованіе цѣлесообразности называютъ началомъ наименьшаго дѣйствія и наибольшаго эффекта, разумѣя подъ наименьшимъ дѣйствіемъ простѣйшія средства, а подъ наибольшимъ эффектомъ наивысшую степень приближенія къ идеалу.

61. Логическая послѣдовательность математическихъ выводовъ и убѣдительность доказательствъ во многихъ случаяхъ недостижима безъ отчетливаго различенія обосновыванія и цѣлесообразности. Между тѣмъ очень часто раціональныя и финальныя начала смѣшиваются и отъ такого смѣшенія происходятъ неточности и даже невѣрныя объясненія и ошибки. Чаще всего пренебрегаютъ финальными началами и вещи, оправдываемыя только цѣлесообразностью, объясняютъ раціональными началами. Примѣръ: обыкновенный способъ дѣленія многозначныхъ чиселъ есть одинъ изъ множества другихъ возможныхъ способовъ дѣленія чиселъ; этотъ способъ дѣленія предпочитается всѣмъ остальнымъ, какъ простѣйшій: между тѣмъ въ учебникахъ выясняется дѣленіе многозначныхъ чиселъ такъ, какъ будто бы иначе дѣлить и нельзя. Словомъ, въ дѣленіи многозначныхъ чиселъ выясняется раціональными началами то, что должно быть выяснено началами цѣлесообразности. Другой примѣръ: десятичныя дроби вводятся въ ариѳметику ради упрощенія вычисленій; а между тѣмъ въ учебникахъ ариѳметики для вычисленій съ періодическими дробями предлагаются такіе пріемы вычисленія, которые никогда не примѣняются на практикѣ и которые способны внушить убѣжденіе учащимся, что десятичныя дроби введены не для упрощенія,

а для усложненія вычисленій. Такая ошибка была бы немыслима при строгомъ соблюденіи началъ цѣлесообразности.

62. Теперь перейдемъ къ *иносказаніямъ*, для выясненія которыхъ мы нашли нужнымъ уклониться въ сторону.

Рѣшимъ слѣдующія двѣ задачи:

α) Задача. — Въ кускѣ сукна 7 аршинъ, каждый аршинъ стоитъ 6 рублей. Сколько стоитъ весь кусокъ сукна?

Рѣшеніе. — Стоимость всего сукна есть 7 разъ 6 рублей, т. е. 42 рубля.

β) Задача. — Въ кускѣ сукна $^2/_3$ аршина, а каждый аршинъ стоитъ 6 рублей. Сколько стоитъ кусокъ сукна?

Рѣшеніе. — Одинъ аршинъ сукна стоитъ 6 рублей, треть аршина стоитъ 6 руб. : 3, или 2 рубля, а $^2/_3$ аршина стоятъ 2 раза 2 рубля, т. е. 4 рубля.

Обѣ эти задачи по содержанію одинаковы; какъ въ одной такъ и въ другой изъ нихъ требуется опредѣлить стоимость куска матеріи, зная число аршинъ въ кускѣ и стоимость одного аршина сукна. Но первая задача (α) рѣшается однимъ дѣйствіемъ— умноженіемъ, а вторая (β) двумя дѣйствіями — дѣленіемъ и умноженіемъ.

Общее выраженіе этихъ двухъ задачъ таково:

Задача γ. — Въ кускѣ сукна n аршинъ, а каждый аршинъ стоитъ 6 рублей. Сколько стоитъ весь кусокъ сукна?

Рѣшеніе. — Если n цѣлое число, то стоимость куска сукна будетъ n разъ b рублей, т. е. nb рублей. Слѣд. при n цѣломъ наша задача рѣшается умноженіемъ. Какъ же выразится рѣшеніе задачи, если n дробь? Мы выше видѣли (рѣшая задачу β), что если число аршинъ въ кускѣ сукна выражается дробью, искомое число опредѣляется двумя дѣйствіями — дѣленіемъ на знаменателя дроби и умноженіемъ на ея числителя. Поэтому надо знать числителя и знаменателя дроби n. Пусть $n = \frac{p}{q}$, гдѣ p и q цѣлыя числа. Тогда рѣшеніе задачи выразится формулой $\frac{bp}{q}$.

Вотъ какъ мы должны рѣшать задачу γ, строго придерживаясь понятій объ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ, вытекающихъ изъ изслѣдованія ариѳметической совокупности величинъ, выражаемой предложеніемъ: цѣлое состоитъ изъ нѣсколькихъ частей; иначе говоря, такъ слѣдуетъ рѣшать задачу γ, руководствуясь раціональными началами. Но строгое соблюденіе раціональныхъ началъ въ разсматриваемомъ случаѣ создаетъ затрудненіе, отъ устраненія котораго зависитъ будущность цѣлой науки—алгебры. Затрудненіе заключается въ рѣшеніи слѣдующаго вопроса: какъ выразить рѣшеніе задачи γ, если относительно n неизвѣстно, цѣлое ли оно число или дробное? Пока не выяснено, цѣлое ли число n, или дробное, формулы рѣшенія написать нельзя. Но если выяснено, что n дробь, то и тогда нельзя будетъ выразить рѣшеніе формулой, пока мы не замѣнимъ n формулой $\frac{p}{q}$, гдѣ p и q цѣлыя числа. Словомъ, для рѣшенія задачи γ въ общемъ видѣ мы должны ввести ограниченіе относительно значенія буквы n: она должна означать цѣлое число; если же число аршинъ дробное, то оно должно быть выражено такъ, чтобы извѣстны были его числитель и знаменатель. Введеніе же подобныхъ ограниченій относительно численныхъ значеній буквъ повело бы къ такимъ усложеніямъ въ алгебрѣ, которыя сдѣлали бы эту науку почти невозможной. Вслѣдствіе этого оказалось необходимымъ ввести въ алгебру, а вмѣстѣ съ тѣмъ и въ ариѳметику нижеслѣдующее *иносказаніе*, лучше всего выясняемое на задачѣ β. Рѣшеніе этой задачи можно выразить такъ: стоимость куска сукна есть двѣ трети шести ~~аршинъ~~. Условимся называть нахожденіе двухъ третей шести умноженіемъ 6 на $^2/_3$. Тогда рѣшеніе задачи β выразится формулой $6 \cdot {}^2/_3$. Принявъ это иносказаніе, мы можемъ уже выразить рѣшеніе задачи γ формулой $b \cdot n$, независимо отъ того, цѣлое ли число n, или дробное. Таково происхожденіе иносказанія—умноженія на дробь. Мы видимъ, что это иносказаніе, находясь въ противорѣчіи съ раціональными началами, вполнѣ оправдывается цѣлью—выразить рѣшеніе задачи въ самомъ общемъ видѣ.

63. Теперь надо выяснить, какъ *примѣняется* на практикѣ это *иносказаніе*, т. е., какъ производится умноженіе на дробь, и какія соотношенія между величинами подводятся подъ это иносказаніе. Выяснимъ дѣло на частныхъ примѣрахъ.

Задача α. — Требуется умножить 15 на $^2/_5$.

Рѣшеніе. Требованіе это выражено иносказательно. Чтобы рѣшить задачу, надо предварительно перевести это иносказаніе на обыкновенный языкъ. Въ переводѣ задача α выражается такимъ образомъ: требуется найти $^2/_5$ пятнадцати. — Рѣшеніе задачи: $^1/_5$ пятнадцати равна $15 : 5 = 3$, а $^2/_5$ пятнадцати есть 2 раза 3 т. е. 6. Итакъ, $^2/_5$ пятнадцати есть 6, или, выражаясь иносказательно, отъ умноженія 15 на $^2/_5$ получаемъ 6. Отсюда вытекаетъ правило: чтобы умножить цѣлое число (15) на дробь ($^2/_5$), надо цѣлое число раздѣлить на знаменателя дроби и полученное частное умножить на ея числителя.

Задача β. — Требуется умножить $^2/_3$ на $^7/_{11}$.

Рѣшеніе. — Переводимъ это иноскзательно выраженное требованіе на обыкновенный языкъ. Требуется найти $^7/_{11}$ двухъ третей. Разсуждаемъ: $^1/_{11}$ двухъ третей равна $^2/_{33}$, а $^7/_{11}$ двухъ третей будетъ 7 разъ $^2/_{33}$, т. е. будетъ $^{14}/_{33}$. Итакъ, $^7/_{11}$ двухъ третей, или, выражаясь иносказательно, словами предложенной задачи, произведеніе $^2/_3$ на $^7/_{11}$, равно $^{14}/_{33}$. Отсюда вытекаетъ правило: произведеніе двухъ дробей равно произведенію ихъ числителей, дѣленному на произведеніе ихъ знаменателей.

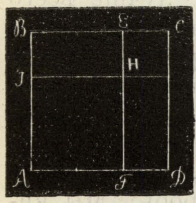
64. Теперь разсмотримъ, какъ примѣняется это иносказаніе, при рѣшеніи задачъ.

Задача γ.—Поѣздъ, равномѣрно двигаясь, проходитъ въ часъ 40 верстъ. Сколько верстъ онъ пройдетъ въ $^2/_5$ часа?

Рѣшеніе. — Въ $^2/_5$ часа поѣздъ пройдетъ $^2/_5$ сорока верстъ. Найти же $^2/_5$ сорока значитъ иносказательно умножить 40 на $^2/_5$. Примѣняя же правило умноженія на дробь, найдемъ: $40 \,.\, ^2/_5 = {}^{40}/_5 \,.\, 2 = 16$, т. е. въ $^2/_5$ часа поѣздъ проходитъ 16 верстъ.

Задача δ.—Опредѣлить площадь прямоугольника, у котораго основаніе $^2/_3$ метра, а высота $^5/_7$ метра.

Рѣшеніе. — Пусть ABCD (фиг. 32) изображаетъ въ уменьшенномъ масштабѣ одинъ квадратный метръ. Раздѣлимъ основаніе этого квадрата на трети метра, а высоту на седьмыя доли и проведемъ прямую EF параллельно AB и прямую GH параллельно BC; тогда прямоугольникъ AGHF будетъ искомой площадью. Прямоугольникъ ABEF составляетъ $^2/_3$ квадратнаго метра ABCD, а прямоугольникъ AGHF составляетъ $^5/_7$ прямоугольника ABEF, или $^5/_7$ двухъ третей квадратнаго метра. Итакъ, искомая площадь равна $^5/_7$ двухъ третей квадратнаго метра, или, выражаясь иносказательно, равна произведенію $^2/_3$ кв. метра на $^5/_7$, т. е. равна $^{10}/_{21}$ кв. метра.



Фиг. 32.

65. Мы выяснили происхожденіе и иносказательный смыслъ умноженія на дробь, вывели правило умноженія на дробь и, наконецъ, выяснили на задачахъ γ и δ, какія соотношенія между величинами подводятся подъ умноженіе на дробь. — Наше объясненіе умноженія на дробь рѣзко отличается отъ общепринятаго объясненія. Поэтому мы обязаны разъяснить причину предлагаемаго нами нововведенія.

Обыкновенно умноженіе опредѣляютъ слѣдующимъ образомъ: умножить одно число на другое значитъ составить изъ множимаго число, называемое произведеніемъ, такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы. Противъ этого опредѣленія умноженія можно сдѣлать возраженіе съ трехъ точекъ зрѣнія: *a*) съ точки зрѣнія его происхожденія, *b*) съ точки зрѣнія вывода правила для умноженія и *c*) съ точки зрѣнія подведенія подъ это опредѣленіе реальныхъ соотношеній между величинами.

a) Разсматриваемое нами опредѣленіе умноженія получено путемъ расширенія первоначальнаго понятія объ умноженіи съ цѣлью сдѣлать возможнымъ умноженіе на дробь и на отрицательное число. Но это расширеніе первоначальнаго понятія объ умноженіи произведено не соединеніемъ въ одно понятіе сходныхъ соотношеній между величинами, а замѣной вполнѣ опредѣленнаго понятія — составленія цѣлаго изъ равныхъ частей, неопредѣленнымъ понятіемъ — составленіемъ новаго числа изъ множимаго такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы. Вслѣдствіе этой неопредѣленности окончательно разорвана связь между понятіемъ объ умноженіи и тѣмъ разрядомъ реальныхъ соотношеній между величинами, выраженіемъ которыхъ должно быть умноженіе.

b) Правило умноженія на дробь выводится изъ разсматриваемаго опредѣленія слѣдующимъ образомъ:

Умножить, напр., 15 на $^2/_5$ значитъ составить изъ множимаго 15 новое число такъ, какъ множитель $^2/_5$ составленъ изъ 1.

Множитель $^2/_5$ составленъ изъ единицы слѣдующимъ образомъ:

α) 1 раздѣлена на 5 равныхъ частей и такимъ образомъ получено число $^1/_5$.

β) Найденное число $^1/_5$ взято 2 раза и полученъ множитель $^2/_5$.

Составляемъ по этому образцу произведеніе 15 на $^2/_5$:

α) 15 дѣлимъ на 5 равныхъ частей и получаемъ число 3.

β) Найденное число 3 беремъ два раза и получаемъ искомое произведеніе 6.

Отсюда вытекаетъ правило: чтобы умножить цѣлое число на дробь, надо цѣлое число раздѣлить на знаменателя дроби и полученное частное умножить на числителя дроби.

Правило это, выведенное изъ разсматриваемаго опредѣленія умноженія, вѣрно, но выводъ его очень искусственный. Съ этимъ искусственнымъ выводомъ можно было бы примириться, если бы примѣненіе этого опредѣленія приводило всегда къ вѣрному заключенію. Но оказывается, что это опредѣленіе, имѣющее притязаніе на самую обширную общность, во многихъ случаяхъ приводитъ къ невѣрному заключенію. Достаточно указать на одинъ только примѣръ: найдемъ произведеніе 2 на $\sqrt{18}$.

Произведеніе 2 на $\sqrt{18}$ должно быть составлено изъ 2 такъ, какъ $\sqrt{18}$ составленъ изъ 1.

$\sqrt{18}$ составленъ изъ 1 слѣдующимъ образомъ:

α) 1 взята 18 разъ и получено число 18.

β) Изъ найденнаго числа 18 извлеченъ квадратный корень и получено число $\sqrt{18}$.

По этому образцу составляемъ искомое произведеніе 2 на $\sqrt{18}$.

α) Множимое 2 беремъ 18 разъ и получаемъ число 36.

β) Изъ найденнаго числа 36 извлекаемъ квадратный корень и получаемъ $\sqrt{36} = 6$.

Итакъ, выходитъ, что произведеніе 2 на $\sqrt{18}$ равно 6; а между тѣмъ оно болѣе 8.

Итакъ, разсматриваемое нами опредѣленіе умноженія иногда приводитъ къ вѣрному произведенію, а иногда къ невѣрному. Такое опредѣленіе никуда не годится, ибо, получивъ при помощи его произведеніе, мы не можемъ быть убѣждены въ его вѣрности даже тогда, когда оно дѣйствительно вѣрно.

c) Теперь разсмотримъ, какъ подъ опредѣляемое такимъ образомъ умноженіе, подводятся соотвѣтствующія реальныя соотношенія между величинами. Для этого рѣшимъ задачу: Поѣздъ, двигаясь равномѣрно, проходитъ въ часъ 40 верстъ. Сколько верстъ прошелъ поѣздъ въ $^2/_5$ часа?

Рѣшеніе. — Надо прежде всего доказать, что искомое число въ этой задачѣ есть произведеніе 40 вер. на $^2/_5$, т. е. надо доказать, что искомое число составлено изъ 40 верстъ такъ, какъ $^2/_5$ составлено изъ 1. Доказываемъ: Поѣздъ проходитъ въ часъ 40 верстъ, и въ $^1/_5$ часа пройдетъ 40 : 5, т. е. 8 верстъ, а въ $^2/_5$ часа пройдетъ 2 раза 8 верстъ, т. е. 16 верстъ. Итакъ, искомое число составлено изъ 40 верстъ слѣдующимъ образомъ: α) 40 верстъ раздѣлены на 5 равныхъ частей и β) каждая часть взята 2 раза. Но $^2/_5$ такимъ же образомъ составлено изъ 1, потому что, α) раздѣливъ 1 на 5 равныхъ частей и β) взявъ $^1/_5$ два раза, мы получаемъ $^2/_5$. Слѣд., искомое число есть произведеніе 40 верстъ на $^2/_5$. Умноживъ 40 верстъ на $^2/_5$ по данному выше правилу, получаемъ 16 верстъ.

Изъ этого разсужденія видно, что для доказательства того, что искомое число есть произведеніе, надо предварительно рѣшить задачу. А если задача рѣшена, то нѣтъ надобности знать, что искомое число есть произведеніе. Опредѣленіе ариѳметическаго дѣйствія должно быть таково, чтобы подведеніе подъ него, какъ подъ обще-ариѳметическую норму, соотвѣствующаго соотношенія между величинами не представляло никакихъ затрудненій и могло быть выполнено сразу безъ всякихъ длинныхъ разсужденій. Между тѣмъ подъ разсматриваемое нами опредѣленіе умноженія соотвѣтствующее соотношеніе между величинами можетъ быть подведено только послѣ рѣшенія задачи, т. е. тогда, когда уже нѣтъ надобности въ этомъ подведеніи. Сопоставляя все сказанное о разсматриваемомъ опредѣленіи умноженія, мы приходимъ къ заключенію, что оно не выдерживаетъ критики ни съ точки зрѣнія его происхожденія, ни съ точки зрѣнія средства для вывода правила умноженія, ни съ точки зрѣнія средства для рѣшенія практической задачи, а потому оно должно быть отброшено и какъ ложное и какъ безполезное.

66. Перейдемъ теперь къ иносказанію въ дѣленіи. Рѣшимъ слѣдующія двѣ задачи.

Задача α. — Кусокъ сукна, содержащій 8 аршинъ, стоитъ 32 рубля. Сколько стоитъ одинъ аршинъ сукна?

Рѣшеніе. — Чтобы найти стоимость одного аршина сукна, надо 32 рубля раздѣлить на 8 равныхъ частей и тогда получимъ 4 рубля.

Задача β. — Кусокъ матеріи, содержащій $^5/_7$ аршина, стоитъ 2 рубля. Сколько стоитъ 1 аршинъ матеріи?

Рѣшеніе. — Если $^5/_7$ аршина стоятъ 2 рубля, то $^1/_7$ аршина стоитъ $^2/_5$ рубля, а 1 аршинъ или $^7/_7$ аршина стоятъ 7 разъ $^2/_5$ рубля, т. е. $^{14}/_5$ руб. $= 2^4/_5$ рубля.

Обѣ эти задачи по содержанію одинаковы и отличаются другъ отъ друга только численными значеніями извѣстныхъ величинъ. Въ каждой изъ нихъ требуется опредѣлить стоимость одного аршина сукна, зная стоимость куска сукна и число аршинъ въ немъ. Не смотря на это, задача α рѣшается однимъ дѣйствіемъ — дѣленіемъ, а задача β двумя дѣйствіями — умноженіемъ и дѣленіемъ. Выражаемъ эту задачу въ общихъ числахъ.

Задача γ. — Кусокъ сукна, содержащій n аршинъ, стоитъ b рублей. Сколько стоитъ 1 аршинъ?

Рѣшеніе. —Если n цѣлое число, то стоимость одного аршина выразится формулой $\dfrac{b}{n}$ рублей. Если же n дробь, то формулы рѣшенія написать нельзя, если мы не условимся называть иносказательно дѣленіемъ то дѣйствіе, посредствомъ котораго опредѣляется стоимость одного аршина сукна въ томъ случаѣ, когда въ кускѣ число аршинъ дробное. Для выясненія этого иносказанія обращаемся опять къ задачѣ β. Ее можно выразить такъ: $^5/_7$ стоимости одного аршина сукна составляетъ 2 руб. Сколько стоитъ 1 аршинъ сукна? — Условимся называть дѣленіемъ 2 руб. на $^5/_7$ то дѣйствіе, посредствомъ котораго опредѣляется число (или величина), $^5/_7$ котораго составляетъ 2 руб. Тогда рѣшеніе задачи β выразится формулой 2 р. : $^5/_7$, а задачи γ — формулой $\dfrac{b}{n}$.

(Окончаніе слѣдуетъ).

КАКЪ СЛѢДУЕТЪ НАЧИНАТЬ

ПРЕПОДАВАНІЕ ГЕОМЕТРІИ?

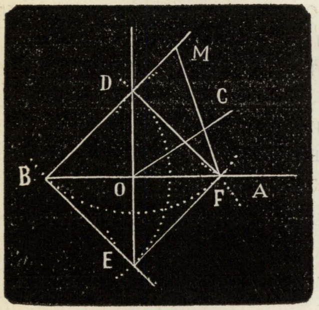
(Окончаніе) *).

Въ предыдущей статьѣ мы указали рядъ простѣйшихъ построеній, которыя привели насъ, между прочимъ, къ установленію первыхъ трехъ условій равенства треугольниковъ и производству первыхъ трехъ дѣйствій надъ углами. Теперь перейдемъ къ дѣленію угла пополамъ и построенію перпендикуляра, что значительно расширитъ сферу доступныхъ для рѣшенія задачъ.

---

*) См. В. О. Ф. №№ 133 и 134.

Пусть данъ уголъ DBA (черт. 33) и требуется его удвоить.



Фиг. 33.

Проведя для этого произвольную сѣкущую DF и построивъ треугольникъ симметричный съ BDF, найдемъ $\angle DBE = 2\angle DBF$.

Теперь сотремъ прямую BF также какъ и вспомогательныя DF и FE, тогда у насъ останется уголъ DBE. Предложимъ ученикамъ возстановить стертую прямую BF. Припоминая, что на чертежѣ было два симметрично расположенныхъ треугольника и что на сторонахъ угла BD и DE лежали равныя стороны этихъ треугольниковъ, ученики засѣкутъ изъ центра B однимъ и тѣмъ же произвольнымъ радіусомъ отрѣзки BD и BE и найдутъ вершины искомыхъ треугольниковъ D и E. Третья вершина должна лежать отъ D и E на равномъ разстояніи. Для отысканія ея проводятъ изъ D и E дуги однимъ и тѣмъ же радіусомъ и въ точкѣ ихъ пересѣченія находятъ искомую вершину F, а слѣдовательно и линію BF, которая дѣлитъ уголъ DBE пополамъ.

Давъ послѣ этого рядъ упражненій въ дѣленіи остраго и тупого угла на 2^n частей, перейдемъ къ построенію прямого угла.

Въ предыдущей статьѣ было указано, какъ установить понятіе о равенствѣ угловъ. Давъ понятіе о развернутомъ углѣ, т. е. объ углѣ, стороны котораго лежатъ на одной прямой и направлены противоположно или, говоря иначе, стороны котораго составляютъ продолженіе другъ друга, легко установить понятіе о равенствѣ всѣхъ развернутыхъ угловъ или о постоянствѣ его величины *). Раздѣливъ теперь такой уголъ пополамъ, мы получимъ прямой уголъ. Изъ предыдущихъ упражненій ученики знаютъ, что для раздѣленія угла пополамъ надо на сторонахъ его отъ вершины отложить равные отрѣзки, изъ концовъ этихъ отрѣзковъ засѣчь дуги одного и того же радіуса и точку ихъ пересѣченія соединить съ вершиною угла. Это же построеніе они примѣнятъ и при дѣленіи развернутаго угла пополамъ.

Такъ какъ всѣ развернутые углы равны между собою, то и половины ихъ равны, и потому всѣ прямые углы равны между собою.

Отсюда переходимъ къ классификаціи угловъ въ зависимости отъ величины ихъ по отношенію къ прямому и развернутому углу. Уголъ меньшій развернутаго — выпуклый, большій развернутаго — вогнутый или входящій, развернутый же уголъ равенъ двумъ прямымъ.

---

*) Чтобы понятіе о развернутомъ углѣ было для учениковъ яснѣе, можно его первоначально получить, какъ сумму нѣсколькихъ угловъ. Сумма угловъ должна быть уголъ.

Соотвѣтственно этому рядъ задачъ, предлагаемыхъ ученику, будетъ таковъ:

1. Удвоить данный уголъ, не пользуясь построеніемъ равнобедреннаго треугольника.

2. Данъ удвоенный уголъ предыдущей задачи; найти прямую, служившую въ этой задачѣ общею стороною угловъ.

3. Раздѣлить данный уголъ пополамъ.

4. Раздѣлить данный уголъ на 2, 4, 8 и т. д. равныхъ частей.

5. Дана вершина и одна сторона угла. Другая сторона его составляетъ продолженіе первой. Начертить этотъ уголъ.

NB. Такой уголъ называется развернутымъ.

6. Подобно предыдущему начертить двѣ пары развернутыхъ угловъ и сравнить ихъ величину между собою.

NB. Всѣ развернутые углы равны между собою.

7. Раздѣлить развернутый уголъ пополамъ.

NB. Половина развернутаго угла наз. прямымъ угломъ. Всѣ прямые углы равны между собою, какъ половины равныхъ угловъ.

8. Построить: а) прямой уголъ, б) уголъ меньшій прямого (острый), в) уголъ большій прямого, но меньшій развернутаго (тупой), г) уголъ равный двумъ прямымъ угламъ (развернутый), д) уголъ большій развернутаго, большій двухъ прямыхъ (входящій, вогнутый).

9. Дана прямая и точка на ней. Провести черезъ эту точку прямую такъ, чтобы она составляла съ данною прямой уголъ.

NB. Двѣ пересѣкающіяся прямыя, образующія прямой уголъ, называются перпендикулярными.

10. Дана прямая и точка на ней. Провести чрезъ эту точку прямую такъ, чтобы она составляла съ данною прямою непрямой (косой) уголъ.

NB. Двѣ прямыя, пересѣкающіяся подъ косымъ угломъ, называются наклонными.

Теперь разсмотримъ нѣкоторыя свойства смежныхъ угловъ и установимъ понятіе о взаимной перпендикулярности прямыхъ (зад. № 13).

11. Дана прямая и точка на ней. Провести черезъ данную точку наклонную такъ, чтобы она пересѣкала данную прямую подъ угломъ равнымъ а) половинѣ прямого, б) полутора прямымъ, в) четверти прямого, г) тремъ четвертямъ прямого, д) одному и тремъ четвертямъ прямого, е) одному съ четвертью прямого.

NB. Нельзя ли найти прямыя, которыя удовлетворяли бы одновременно двумъ требованіямъ этой задачи?

12. Дана прямая AB и точка O на ней. Черезъ данную точку O провести наклонную CO такъ, чтобы уголъ COA былъ острый. (Для рѣшенія, какъ и въ задачѣ №№ 8 и 10, строится предварительно перпендикуляръ). Каковъ уголъ COB? Чему равна сумма угловъ COA и COB? (Развернутому или двумъ прямымъ).

13. Дана прямая АВ и точка О на ней. Черезъ эту точку провести прямую DO такъ, чтобы уголъ DOB былъ прямой. Каковъ уголъ DOA?

Продолжимъ прямую DO за линію АВ. Пусть продолженіе обозначено ОЕ. Чему равна сумма угловъ DOA и АОЕ? Чему равенъ уголъ АОЕ? Чему равенъ уголъ ВОЕ?

NB. Прямыя АВ и DE взаимно перпендикулярны.

Въ задачахъ №№ 14, 15 и 16 доказывается существованіе прямоугольнаго и тупоугольнаго треугольника.

14. Построить треугольникъ, у котораго одинъ уголъ прямой. (Прямоугольный треугольникъ).

NB. Строимъ прямой уголъ и произвольныя точки его сторонъ соединяемъ прямою.

15. Построить прямоугольный треугольникъ по даннымъ катетамъ.

16. Построить треугольникъ, у котораго одинъ уголъ тупой. (Тупоугольный треугольникъ).

Задачи №№ 17 и 18 выясняютъ свойство равнодѣлящей угла при вершинѣ равнобедреннаго треугольника, что приводитъ къ зад. №№ 19 и 20. Послѣдующія служатъ приложеніемъ и закрѣпленіемъ усвоеннаго.

17. Построить прямоугольный треугольникъ BOD съ прямымъ угломъ при точкѣ О. На катетѣ DO построить симметричный ему треугольникъ DOF. а) Отмѣтить прямые углы. б) Чему равна сумма угловъ BOD и DOF? в) Чему равенъ уголъ BOF? г) Какова линія BOF? (прямая). д) Каковъ треугольникъ BDF? (равнобедренный). е) Указать равные углы при точкѣ D. ж) На какія части дѣлитъ линія DO уголъ BDF?

18. Построить равнобедренный треугольникъ BDF (D вершина его) и раздѣлить уголъ при вершинѣ его пополамъ. (Точка О—пересѣченіе равнодѣлящей съ основаніемъ). а) Указать равныя по построенію стороны и углы въ треугольникахъ BDO и DOF. б) Сравнить между собою углы при точкѣ О. в) Сравнить между собою отрѣзки основанія ВО и OF.

NB. Равнодѣлящая угла при вершинѣ равнобедреннаго треугольника перпендикулярна къ его основанію и дѣлитъ основаніе пополамъ.

19. Изъ точки внѣ прямой опустить на эту прямую перпендикуляръ.

20. Данный отрѣзокъ прямой раздѣлить пополамъ, на 4, 8 и т. д. частей.

21· Найти высоты остроугольнаго, тупоугольнаго и прямоугольнаго треугольниковъ.

22. Построить прямоугольный треугольникъ по данному катету и гипотенузѣ.

NB. По этимъ даннымъ можно построить только одинъ треугольникъ, и потому прямоугольные треугольники равны между собою, если катетъ и гипотенуза одного равна катету и гипотенузѣ другого.

23. Построить треугольникъ по высотѣ и выходящимъ изъ той же вершины сторонамъ.

24. Построить равнобедренный треугольникъ по высотѣ и боку.

25. Построить треугольникъ по высотѣ, боку и углу противъ основанія.

26. Построить треугольникъ по высотѣ, боку и основанію.

27. Построить прямоугольный треугольникъ по катету и высотѣ на гипотенузу.

28. Построить прямоугольный треугольникъ по данной гипотенузѣ и прилежащему къ ней углу.

29. Дана гипотенуза прямоугольнаго треугольника; катетъ его вдвое меньше гипотенузы. Построить этотъ треугольникъ.

30. Данъ бокъ равнобедреннаго треугольника. Высота его составляетъ три четверти бока. Построить этотъ треугольникъ.

31. Данъ треугольникъ; найти линію, соединяющую одну изъ вершинъ его съ серединою противоположной стороны. (Найти равносѣкущую стороны треугольника).

32. Дана сторона, равносѣкущая ея и бокъ треугольника. Построить треугольникъ.

33. Дано основаніе треугольника; равносѣкущая основанія равна тремъ восьмымъ его, а бокъ пяти восьмымъ основанія. Построить этотъ треугольникъ.

34. Дано основаніе треугольника. Равносѣкущая основанія равна половинѣ его и перпендикулярна къ основанію. Построить этотъ треугольникъ.

35. Построить треугольникъ по углу, его равнодѣлящей и боку, прилежащему къ этому углу.

36. Построить треугольникъ по углу, его равнодѣлящей, при чемъ извѣстно, что эта равнодѣлящая перпендикулярна къ основанію. Какого вида будетъ этотъ треугольникъ?

37. Построить равнобедренный треугольникъ по боковой сторонѣ и высотѣ на нее.

38. Построить прямоугольный треугольникъ по катету и прилежащему къ нему острому углу.

39. Построить прямоугольный треугольникъ по высотѣ и одной части прямого угла, отсѣкаемой высотою.

40. Построить прямоугольный треугольникъ по высотѣ и одному отрѣзку гипотенузы, отсѣкаемому этою высотою.

41. Построить треугольникъ по сторонѣ, прилежащему къ ней углу и равносѣкущей этой стороны.

Въ задачахъ №№ 42—44 устанавливается понятіе о перпендикулярѣ, какъ кратчайшемъ разстояніи отъ точки до прямой. въ задачахъ же №№ 45—47 дается понятіе о геометрическомъ мѣстѣ точекъ, равноотстоящихъ отъ концовъ отрѣзка. Послѣдующія служатъ закрѣпленіемъ и приложеніемъ усвоеннаго.

42 Изъ точки D внѣ прямой BA опустить на нее перпендикуляръ DO и изъ той же точки провести наклонную DB къ этой прямой.

Построить другой прямоугольный треугольникъ BOE, симметричный съ полученнымъ относительно данной прямой BA.

$$DE < DBE, \text{ слѣд. } \tfrac{1}{2}DE < \tfrac{1}{2}DBE, \text{ т. е. } DO < DB.$$

Перпендикуляръ короче всякой наклонной, проведенной изъ той же точки къ той же прямой.

43. Найти разстояніе отъ точки до прямой.

44. Данъ треугольникъ, найти разстояніе его вершинъ отъ противоположныхъ сторонъ (Рѣшить для треугольниковъ всѣхъ трехъ видовъ).

45. Построить треугольникъ по данному основанію, если извѣстно, что высота его проходитъ чрезъ средину основанія.

NB. Будетъ ли данная задача опредѣленною? Какого вида треугольники получатся? Сравнить между собою разстояніе каждой точки проведеннаго перпендикуляра отъ концовъ основанія.

Всѣ точки перпендикуляра, проведеннаго къ отрѣзку прямой чрезъ его середину, равно отстоятъ отъ концовъ его.

46. Построить равнобедренный треугольникъ по основанію и высотѣ его.

47. Чрезъ средину отрѣзка BF провести перпендикуляръ къ нему, взять точку M внѣ его, соединить ее съ концами отрѣзка и сравнить разстояніе этой точки отъ концовъ отрѣзка.

NB. Для сравненія проведемъ DF. Тогда $MB = MD + DF > MF$.

Всѣ точки, лежащія внѣ OD не равно отстоятъ отъ концовъ отрѣзка BF, или внѣ перпендикуляра OD нѣтъ точекъ, равноотстоящихъ отъ концовъ отрѣзка.

Соединяя это съ № 45, находимъ, что всѣ точки, равноотстоящія отъ концовъ отрѣзка, лежатъ на перпендикулярѣ къ нему, проходящему чрезъ его середину.

48. Дана прямая и двѣ точки внѣ ея, найти на ней точку, равноотстоящую отъ данныхъ точекъ.

49. Дана окружность и двѣ точки, найти на ней точки, равноотстоящія отъ двухъ данныхъ точекъ.

Разсмотрѣть вопросъ для того случая, когда данныя точки лежатъ на окружности.

50. Найти точку, равноотстоящую отъ трехъ данныхъ точекъ, не лежащихъ на одной прямой.

51. Найти точку, равноотстоящую отъ трехъ вершинъ треугольника.

52. Черезъ двѣ данныя точки провести окружность. *a*) Будетъ ли эта задача опредѣленною? *b*) Гдѣ лежатъ центры всѣхъ окружностей, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки?

53. Провести окружность черезъ три данныя точки.

54. Описать окружность около треугольника. (Рѣшить эту задачу для треугольниковъ всѣхъ трехъ видовъ).

Переходя теперь къ установленiю понятiя о параллельныхъ прямыхъ, мы прежде всего доказываемъ, что изъ точки внѣ прямой можетъ быть опущенъ на нее только одинъ перпендикуляръ и затѣмъ строимъ параллельныя, проведя перпендикуляры къ одной прямой №№ 55—59. Закрѣпивъ это рѣшенiемъ задачъ №№ 60—75 въ связи съ понятiемъ о прямоугольникѣ и о параллельныхъ, какъ геометрическомъ мѣстѣ точекъ, равноотстоящихъ отъ данной прямой, переходимъ къ установленiю условiя параллельности прямыхъ въ зависимости отъ ихъ наклона къ сѣкущей №№ 76—78. На рядѣ задачъ №№ 79 — 100 въ связи съ понятiемъ о различныхъ видахъ параллелограмма, мы закрѣпляемъ понятiя о параллельныхъ прямыхъ и устанавливаемъ главнѣйшiя свойства параллелограммовъ.

55. Дана прямая BA и точка D внѣ ея. Опустить изъ точки D перпендикуляръ DO на прямую BA и соединить D съ произвольною точкою B прямой BA. Можетъ ли случиться, чтобы уголъ DBO былъ прямой?

NB. Построимъ треугольникъ BOE, симметричный съ BDO, тогда увидимъ, что DE всегда прямая, а DBE ломаная, слѣд. уголъ DBE не развернутый, а потому половина его DBE не прямой.

Изъ точки внѣ прямой можно на нее опустить только одинъ перпендикуляръ.

56. Дана прямая и изъ двухъ различныхъ точекъ ея возставить перпендикуляры къ этой прямой. Могутъ ли эти перпендикуляры пересѣчься?

57. Дана прямая и двѣ точки на ней; изъ одной точки возставить перпендикуляръ, чрезъ другую провести наклонную къ этой прямой. Могутъ ли этотъ перпендикуляръ и наклонная не пересѣчься?

Линiи, не пересѣкающiяся на плоскости при всемъ ихъ продолженiи, называются параллельными.

58. Черезъ точку внѣ прямой провести къ ней параллельную.

NB. Сколько такихъ параллельныхъ можно провести.

59. Провести двѣ параллельныхъ; изъ точки на одной изъ нихъ возставить перпендикуляръ и продолжить его до пересѣченiя съ другой. Можетъ ли этотъ перпендикуляръ встрѣтить другую паралельную не подъ прямымъ угломъ? Какой же уголъ онъ образуетъ съ другою парараллельною?

60. Провести двѣ параллельныхъ, на одной изъ нихъ взять двѣ точки и опустить изъ нихъ перпендикуляры на другую параллельную. а) Какiе внутреннiе углы будутъ у полученнаго такимъ образомъ четыреугольника? б) Сравнить треугольники, на которые онъ разбивается дiагональю? в) Сравнить между собою противоположныя стороны этого четыреугольника (прямоугольника).

г) *Сравнить углы, образуемые діагональю съ противоположными сторонами прямоугольника.*

61. Построить прямоугольникъ по двумъ даннымъ сторонамъ его.

62. Данъ отрѣзокъ прямой. Построить прямоугольникъ, двѣ смежныя стороны котораго равны этому отрѣзку. Сравнить между собою остальныя стороны этого прямоугольника (квадрата).

63. Построить четыреугольникъ, у котораго двѣ противоположныя стороны равны между собою и перпендикулярны къ третьей. Какой это будетъ четыреугольникъ?

NB. Проведя діагональ и пользуясь примѣчаніемъ къ № 22, найдемъ, что этотъ четыреугольникъ будетъ прямоугольникомъ.

64. Дана прямая L; провести параллельную ей черезъ точку, отстоящую отъ нея на данномъ разстояніи m.

а) Найти разстояніе двухъ точекъ этой параллельной отъ данной прямой L и сравнить эти разстоянія съ даннымъ m.

б) Провести по другую сторону L параллельную ей на томъ же разстояніи m отъ нея.

в) Найти точки, отстоящія отъ L на разстояніи большемъ m.

г) Найти точки, отстоящія отъ L на разстояніи меньшемъ m.

д) *Гдѣ лежатъ всѣ точки, отстоящія отъ прямой L на данномъ разстояніи m?*

65. Построить на данномъ основаніи a рядъ треугольниковъ, имѣющихъ данную высоту h.

66. Построить треугольникъ по данному основанію, высотѣ и боку.

67. Построить треугольникъ по данному основанію, высотѣ и углу при основаніи.

68. Построить треугольникъ по основанію, высотѣ и равносѣкущей основанія.

69. Найти точки, отстоящія отъ данной прямой L на данномъ разстояніи m и лежащія на другой данной прямой L′.

70. Найти точки, отстоящія отъ данной прямой L на разстояніи m и лежащія на данной окружности.

71. Найти точки, отстоящія отъ данной прямой L и отъ данной точки A на одномъ и томъ же разстояніи m.

72. Найти точки, равноотстоящія отъ двухъ данныхъ точекъ и отъ прямой L на разстояніи m.

73. Найти точку, стстоящую отъ сторонъ угла на разстояніи m.

74. Найти точки, отстоящія отъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ на данномъ разстояніи m.

75. Найти точки, равноотстоящія отъ двухъ параллельныхъ прямыхъ.

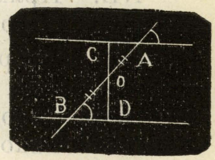
Если вращать двѣ прямыхъ около точки ихъ пересѣченія, то получимъ *двѣ пары противуположныхъ въ вершинѣ угловъ, которые* во все время вращенія прямыхъ будутъ *попарно равны между собою.*

Доказательство этой теоремы можетъ быть и опущено или же доказано путемъ сравненія дополнительныхъ угловъ.

76. *Дана прямая; черезъ двѣ точки на ней провести прямыя, одинаково къ ней наклоненныя. Могутъ ли эти прямыя пересѣчься?*

Теорему эту можно до поры до времени оставить безъ доказательства, или же доказать ее такъ:

Дѣлимъ сѣкущую AB пополамъ въ точкѣ O; изъ O опускаемъ перпендикуляръ на AC и продолжаемъ его до пересѣченія съ BD. Тогда $\angle CAO = \angle DBO$, $\angle COA = \angle BOD$ и $BO = AO$, слѣд $\triangle AOC \cong \triangle BOD$, $\angle ODB =$ $= \angle ACO = d$.



Фиг. 34.

77. Провести двѣ параллельныхъ и пепересѣчь ихъ наклонною прямою. Какъ наклонены эти параллельныя по отношенію къ сѣкущей? NB. См. № 60.

78. Черезъ данную внѣ прямой точку провести параллельную ей, не строя перпендикуляровъ.

79. Провести двѣ параллельныхъ и пересѣчь ихъ двумя другими параллельными.

Полученный четыреугольникъ называется параллелограммомъ.

а) Провести въ немъ діагональ и разсмотрѣть полученные треугольники.

б) Сравнить противоположные стороны параллелограмма.

в) Сравнить углы параллелограмма между собою.

80. Построить четыреугольникъ, у котораго двѣ стороны равны и параллельны между собою.

а) Сравнить треугольники, на которые разбивается этотъ четыреугольникъ діагональю.

б) Сравнить относительное положеніе двухъ другихъ сторонъ его.

в) Какого вида этотъ четыреугольникъ?

г) Сравнить относительную величину противоположныхъ сторонъ его.

81. Даны двѣ смежныя стороны четыреугольника, противоположные стороны его равны между собою. Построить этотъ четыреугольникъ

а) Сравнить треугольники, на которые этотъ четыреугольникъ разбивается діагональю.

б) Сравнить относительное положеніе сторонъ этого четыреугольника. Какого вида этотъ четыреугольникъ?

в) Пользуясь сейчасъ разсмотрѣнной задачей, провести черезъ данную внѣ прямой точку параллельную ей, не проводя перпендикуляровъ и не строя равныхъ угловъ.

82. Построить параллелограммы и найти высоту его а) по отношенію къ одной сторонѣ, б) по отношенію къ смежной съ нею сторонѣ.

*

83. Построить параллелограммъ по основанію, высотѣ и боковой сторонѣ его.

84. Построить параллелограммъ по двумъ сторонамъ его и углу между ними.

85. Построить параллелограммъ, у котораго двѣ стороны взаимно перпендикулярны. Каковъ видъ этого параллелограмма?

NB. Прямоугольникъ есть параллелограммъ, у котораго одинъ уголъ прямой.

86. Построить параллелограммъ, у котораго двѣ смежныхъ стороны равны между собою. Сравнить между собою стороны этого параллелограмма.

NB. Такой параллелограммъ называется ромбомъ.

87. Построить ромбъ по данной сторонѣ и одному изъ угловъ его.

88. Построить ромбъ, у котораго одинъ уголъ прямой.

NB. Такой ромбъ есть квадратъ.

89. Построить квадратъ по данной сторонѣ его.

90. Построить параллелограммъ, провести его діагонали и сравнить между собою отрѣзки, на которые дѣлятся каждая изъ нихъ.

91. Построить четыреугольникъ по двумъ даннымъ его діагоналямъ такъ, чтобы онѣ взаимно дѣлились пополамъ.

Какого вида будетъ этотъ четыреугольникъ?

92. Построить параллелограммъ по двумъ даннымъ діагоналямъ его и углу между ними.

93. Построить параллелограммъ по двумъ даннымъ діагоналямъ его и сторонѣ.

94. Построить прямоугольникъ, провести обѣ діагонали его и сравнить ихъ величину между собою.

95. Построить параллелограммъ, у котораго діагонали равны между собою. Какой видъ параллелограмма представитъ этотъ четыреугольникъ?

96. Построить четыреугольникъ, у котораго діагонали равны между собою и взаимно дѣлятся пополамъ.

Какой видъ четыреугольникъ получитъ?

97. Построить прямоугольникъ по сторонѣ и діагонали.

98. Построить ромбъ, провести его діагонали. Каковъ уголъ между его діагоналями.

99. Построить ромбъ по двумъ даннымъ его діагоналямъ.

100. Построить квадратъ по данной его діагонали.

Серію этихъ задачъ можно значительно расширить, но мы считаемъ указаннаго здѣсь достаточнымъ какъ для того, чтобы уяснить сущность намѣчаемой системы, такъ и для того, чтобы послѣ рѣшенія этихъ задачъ можно было приступить къ повторенію въ болѣе краткой и строгой системѣ всего усвоеннаго учениками и продолжить курсъ въ общепринятой системѣ. Эта предварительная работа ознакомила учениковъ со многими геометрическими понятіями, пріучила ихъ къ геометрическимъ построеніямъ и дала понятіе о доказательствахъ теоремъ.

Послѣ такого предварительнаго ознакомленія съ геометрическимъ матеріаломъ, который не ошеломляетъ сразу учениковъ непонятными для нихъ требованіями, можно надѣяться, что дальнѣйшее, въ какой бы оно системѣ не было изложено, не представитъ затрудненія для учениковъ.

Замѣтимъ, что такое прохожденіе начала геометріи не можетъ замедлить движенія курса, такъ какъ съ одной стороны рѣшеніе задачъ на построеніе должно входить въ курсъ геометріи, въ какой бы системѣ онъ ни излагался, съ другой же стороны, устраняя первоначальныя затрудненія при прохожденіи курса, эти предварительныя занятія облегчаютъ усвоеніе его, а потому никоимъ образомъ не могутъ его затормозить. *С. Житковъ* (Одесса).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Награды на IV электрической выставкѣ въ С.-Петербургѣ получили: высшія: *Н. Н. Бенардосъ* — за удачное примѣненіе вольтовой дуги къ спаиванію металловъ и наплавленію одного металла на другой, и *Н. Г. Славяновъ* — за удачное примѣненіе вольтовой дуги къ производству металлическихъ отливокъ и къ послѣдующей ихъ обработкѣ, съ цѣлью измѣненія химическаго состава металла и улучшенія его механическихъ свойствъ. Золотыми медалями награждены: *Г. Г. Игнатьевъ*—за способъ вполнѣ успѣшнаго телеграфированія и телефонированія по одному проводу, *А. М. Имшенецкій* — за тщательное научно-техническое изслѣдованіе и хорошее качество элемента его системы, *А. И. Полешко*—за оригинальный и удачно конструированный трансформаторъ съ разомкнутой магнитной цѣпью.

Электротехническій конгрессъ въ Чикаго состоится во время предстоящей въ будущемъ году всемірной выставки. Президентомъ распорядительнаго комитета состоитъ проф. Е. Грэй.

Математическая выставка инструментовъ, приборовъ и моделей открывается въ Сентябрѣ текущаго года въ Нюрембергѣ (съ 1-го по 8-е число ст. ст.) во время предстоящаго 65-го съѣзда нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей. Предположено предметы выставки раздѣлить на 3 группы: 1) Геометрія, 2) Ариѳметика, Алгебра и 3) Механика и Математическая Физика.

„Техническія Новости“ разрѣшено издавать Г. Г. Мейеру въ г. Ригѣ, подъ редакторствомъ Г. Р. Вуттке, по слѣдующей программѣ: Чертежи различныхъ машинъ, снарядовъ и предметовъ потребленія изъ области промышленности, ремеслъ и домашняго хозяйства, съ описаніями таковыхъ. Новый журналъ будетъ выходить ежемѣсячно. Подписная цѣна 2 р. въ годъ и 1 р. въ полугодіе.

Новый островъ, весьма небольшихъ размѣровъ (около 25 саж. въ длину и 14 въ ширину) эллиптической формы, возникъ недавно на Каспійскомъ морѣ, близъ Апшеронскаго полуострова. Возвышается онъ надъ уровнемъ моря сажени на три. Островокъ этотъ безспорно вулканическаго происхожденія.

Вулканическая дѣятельность Везувія возобновилась съ необычайной силой въ послѣднихъ числахъ Мая мѣсяца. Въ Апуліи были землетрясенія, не причинившія, впрочемъ, особеннаго вреда. Проф. Пальміери считаетъ возможнымъ предполагать, что дѣйствіе подземныхъ силъ этимъ не ограничится *).

Василій Григорьевичъ Имшенецкій, ординарный академикъ Имп. Академіи Наукъ, бывшій профессоръ математики въ Казанскомъ университетѣ, а потомъ — механики въ Харьковскомъ, скончался въ Москвѣ 24 мая.

Андрей Петровичъ Шидловскій, заслуженный профессоръ Кіевскаго университета, занимавшій каѳедру астрономіи съ 1856 по 1868 годъ и издавшій довольно популярный въ свое время „Курсъ сферической астрономіи", скончался 7 мая тек. года въ с. Карабачинѣ (Кіевской губ., Радомысльскаго уѣзда).

A. W. von Hofmann, извѣстный нѣмецкій химикъ, скончался въ концѣ апрѣля, на 74-мъ году жизни.

ЗАДАЧИ.

№ 339. Требуется построить симметрично расположенный звѣздчатый 12-иугольникъ ABCDEFGHIKLM, съ равными сторонами, нечетныя вершины котораго расположены на одной окружности, радіуса r, а четныя—на другой, радіуса $r\sqrt{3}$, концентрической съ первой; показать, что сторона такого 12-иугольника $= r\sqrt{7}$, вычислить его острые углы, показать, что всякіе два сосѣдніе угла даютъ въ суммѣ 60°, и что синусы этихъ угловъ относятся какъ 3 : 5, а косинусы — какъ 13 : 11. *Ш.*

№ 340. Рѣшить уравненіе

$$a(x^2 - px + q)^2 + b(x^2 + px + q)^2 = x^2.$$

(Заимств.) *П. П.*

№ 341. Показать, что сумма n членовъ ряда

$$\lg 1,\ \lg 2,\ \lg 3,\ \lg 4,\ \ldots$$

меньше, чѣмъ $n \lg n$. *М. Фридманъ* (Кіевъ).

№ 342. Даны двѣ концентрическія окружности радіусовъ R и r. Опредѣлить сторону такого равносторонняго треугольника, у котораго одна вершина расположена на одной окружности, а противоположная сторона представляетъ хорду другой окружности. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

*) Что и оправдывается телеграммами послѣднихъ дней, извѣщающими объ изверженіи Этны и о землетрясеніяхъ въ Сициліи.

№ 343. Черезъ точку A пересѣченія двухъ окружностей проведены сѣкущія BAC и DAE. Показать, что хорды BD и EC при продолженіи пересѣкаются въ точкѣ F подъ постояннымъ угломъ. *А. Воиновъ* (Харьковъ).

№ 344. Найти стороны треугольника, которыя выразились бы тремя послѣдовательными цѣлыми раціональными числами, и въ которомъ уголъ, лежащій противъ большей стороны, былъ бы вдвое болѣе угла противъ меньшей стороны.

А. Бобятинскій (Барнаулъ).

ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ.

Въ Харьковскомъ учебномъ округѣ въ прошломъ 1891 г. ученикамъ дополнительнаго класса была предложена на окончательныхъ испытаніяхъ слѣдующая задача:

„Вывести формулу объема прямаго усѣченнаго конуса, разсматривая этотъ объемъ, какъ предѣлъ суммы объемовъ элементарныхъ цилиндровъ, имѣющихъ основаніемъ сѣченія, параллельныя основаніямъ конуса, когда число элементарныхъ цилиндровъ безпредѣльно увеличивается".

Какъ намъ сообщали, задача эта ни въ одномъ реальномъ училищѣ названнаго округа, кромѣ *Тамбовскаго*, своевременно разрѣшена не была. Въ виду этого, считаемъ умѣстнымъ помѣстить здѣсь (въ нѣсколько сокращенномъ видѣ) ея рѣшеніе, принадлежащее бывшему ученику Тамбовскаго реальнаго училища *Тихону Оболдуеву*.

Назовемъ высоту усѣч. конуса черезъ h и радіусы верхняго основанія, параллельныхъ сѣченій и нижняго основанія соотв. черезъ r, r_1, r_2, $r_3 \ldots r_{n-1}$, r_n $(= R)$. Строимъ двѣ серіи цилиндровъ: выходящихъ и входящихъ. Суммы объемовъ будутъ:

$$\text{Для выход. цил.} = \pi\frac{h}{n}(r_1{}^2 + r_2{}^2 + r_3{}^2 + \ldots + r_n{}^2) > v$$

$$\text{и для вход. цил.} = \pi\frac{h}{n}(r^2 + r_1{}^2 + r_2{}^2 + \ldots + r^2{}_{n-1}) < v,$$

гдѣ v есть иск. объемъ усѣч. конуса. Отсюда

$$\pi\frac{h}{n}r_n{}^2 > \pi\frac{h}{n}(r^2 + r_1{}^2 + r_2{}^2 + \ldots + r_n{}^2) - v > 0 \;.\;.\; (1).$$

Обозначивъ высоту отсѣченной части конуса черезъ x, находимъ изъ подобія треугольниковъ:

$$\frac{h + x}{x} = \frac{R}{r},$$

откуда:

$$x = \frac{rh}{R - r} \text{ и } h + x = \frac{Rh}{R - r}; \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Точно также находимъ:

$$\frac{h + x}{x + \frac{h}{n}} = \frac{R}{r_1},$$

откуда:

$$r_1^{\ 2} = \frac{R^2}{(h + x)^2}\left(x^2 + \frac{2hx}{n} + \frac{h^2}{n^2}\right)$$

и такъ далѣе:

$$r_2^{\ 2} = \frac{R^2}{(h + x)^2}\left(x^2 + \frac{4hx}{n} + \frac{4h^2}{n^2}\right)$$

. . . .

$$r^2_{\ n-1} = \frac{R^2}{(h + x)^2}\left(x^2 + \frac{2(n - 1)hx}{n} + \frac{(n - 1)^2h^2}{n^2}\right)$$

Складывая и помня, что

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n - 1)}{2}; \; 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 =$$

$$= \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6},$$

находимъ:

$$r_1^{\ 2} + r_2^{\ 2} + \ldots + r^2_{\ n-1} = \frac{R^2}{(h + x)^2} \cdot \frac{n - 1}{6n}[6nx^2 + 6nhx +$$

$$+ h^2(2n - 1)],$$

что, на основанiи равенствъ (2) даетъ послѣ сокращенiй:

$$r_1^{\ 2} + r_2^{\ 2} + \ldots + r^2_{\ n-1} = \frac{h - 1}{6n}[6nrR + (2n - 1)(R - r)^2].$$

Подставимъ теперь найденное значенiе суммы квадратовъ радiусовъ сѣченiй въ неравенство (1):

$$\pi\frac{h}{n}R^2 > \pi\frac{h}{n}(r^2 + R^2) +$$

$$+ \pi\frac{h}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left[6Rr + \left(2 - \frac{1}{n}\right)(R - r)^2\right] - v > 0 \, . \, . \, (3).$$

По мѣрѣ неограниченнаго возрастанiя n лѣвая часть неравенства безконечно уменьшается, средняя же, представляющая разность величинъ перемѣнной и постоянной (v), остается постоянно > 0 и $<$ величины безконечно малой, а потому

$$v = \text{пред.}\left\{\pi\frac{h}{n}(r^2 + R^2) + \pi\frac{h}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left[6Rr + \left(2 - \frac{1}{n}\right)(R - r)^2\right]\right.,$$

т. е.

$$v = \pi\frac{h}{6}[6Rr + 2(R - r)^2]$$

или

$$v = \pi\frac{h}{3}(R^2 + r^2 - Rr).$$

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 79 (2 сер.). На одной сторонѣ AB треугольника ABC дана еще точка D основанія высоты CD, дѣлящей уголъ C на двѣ части, изъ которыхъ одна, напр. $\angle$BCD, равна суммѣ угловъ A + B. По этимъ даннымъ построить треугольникъ.

Положимъ треугольникъ ABC построенъ и уголъ DCB = $\angle$CBA + $\angle$CAB. Внѣшній $\angle$NCB также равенъ $\angle$CAB + $\angle$CBA. Слѣдовательно CB — биссекторъ угла NCD, внѣшняго относительно $\triangle$ ACD и AB : DB = AC : CD. Если проведемъ въ $\triangle$ ACD внутренній биссекторъ CM, то CM будетъ перпендикуляренъ къ CB и притомъ AM : MD = AC : CD = AB : DB. Вершина C лежитъ на окружности, описанной на MB какъ на діаметрѣ. Построеніе: опредѣляемъ на AB точку M такъ, чтобы AM : MD = AB : BD. На MB описываемъ какъ на діаметрѣ окружность и въ точкѣ D возстановляемъ перпендикуляръ къ AB, пересѣченіе котораго съ окружностью опредѣлитъ третью вершину треугольника.

И. Бискъ, И. Бѣлянкинъ (Кіевъ), *А. Дукельскій* (Кременчугъ), *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 195 (2 сер.). Доказать, что прямая OL, проведенная изъ точки пересѣченія O діагоналей AC и BD гармоническаго четыреугольника ABCD параллельно одной изъ его сторонъ, напр. BC, до пересѣченія съ другой стороной, напр. CD, въ точкѣ L, есть средняя пропорціональная между отрѣзками этой стороны CL и LD.

Изъ подобія $\triangle\triangle$ OLD и BDC находимъ

$$\frac{DL}{OL} = \frac{CD}{BC}.$$

По параллельности прямыхъ OL и BC

$$\frac{DL}{CL} = \frac{OD}{OB}.$$

По свойству гармоническаго четыреугольника

$$\frac{OD}{OB} = \frac{CD^2}{BC^2}.$$

Сравнивая эту пропорцію съ первыми, получимъ

$$\frac{DL^2}{OL^2} = \frac{DL}{CL},$$

откуда

$$OL^2 = DL \,.\, CL,$$

что и требовалось доказать.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *И. Вонсикъ* (Воронежъ).

№ **245** (2 сер.). Данъ уголъ ABC и прямая DE. Найти на прямой DE точку X такъ, чтобы сѣкущая XYZ, проведенная въ извѣстномъ направленіи, дала между X и боками угла отрѣзки ZY и YX, разность которыхъ равна данной величинѣ.

Пусть прямая DE дана внѣ угла ABC со стороны BC. Проведемъ въ заданномъ направленіи, гдѣ нибудь въ углѣ, отрѣзокъ Z_1Y_1 (точка Z_1 лежитъ на сторонѣ AB) и отложимъ внутри угла отрѣзокъ Z_1K_1 равный данной разности; черезъ K_1 проводимъ параллельную сторонѣ AB до пересѣченія въ M со стороною BC, по направленію продолженнаго отрѣзка Z_1Y_1 отложимъ $Y_1X_1 = K_1Y_1$ и точки M и X_1 соединимъ прямою MX_1, которая пересѣчетъ данную прямую DE въ искомой точкѣ X. Проведенная черезъ эту точку сѣкущая XYZ параллельно $X_1Y_1Z_1$ — будетъ требуемая. Доказательство очевидно. — Если нужно, по условію задачи, чтобы $YX > ZY$, то отрѣзокъ Z_1K_1 откладывается внѣ угла.

А. Байковъ (Москва), *В. Костинъ* (Симбирскъ), *П. Писаревъ, К. Щиголевъ, К. Александровъ* (Курскъ), *Б. Липавскій, І. Поляковъ* (Кременчугъ), *М. Гольцманъ* (Винница).

ОПЕЧАТКА.

Въ § 25 статьи г. Мануйлова (см. № 139 стр. 148) вмѣсто курсивныхъ словъ: «*однообразныя нормы логической связи между однородными величинами*» должно быть: «*однообразныя нормы логической связи между однородными и разнородными величинами*».

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса 20 Іюня 1892 года.
Типо-литографія Штаба Одесскаго военнаго Округа. Тираспольская, № 14.

Обложка
ищется

Обложка
ищется