Обложка
ищется

Обложка
пщется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XI Сем. № 130. № 10.

О БЕЗКОНЕЧНЫХЪ ПРОИЗВЕДЕНІЯХЪ.

1. *Опредѣленіе. Безконечнымъ произведеніемъ* называется произведеніе такихъ множителей, которые слѣдуютъ одинъ за другимъ по опредѣленному закону и число которыхъ можетъ быть сдѣлано какъ угодно большимъ.

Безконечныя произведенія бываютъ трехъ родовъ: 1) произведенія, имѣющія предѣломъ безконечно большое число, или, другими словами, произведенія, безпредѣльно увеличивающіяся при неограниченномъ увеличеніи числа множителей; 2) произведенія, имѣющія предѣломъ нуль, или, другими словами, произведенія, безпредѣльно уменьшающіяся, при неограниченномъ увеличеніи числа членовъ; 3) произведенія, стремящіяся къ опредѣленному и конечному предѣлу при неограниченномъ увеличеніи числа членовъ. Наибольшее значеніе въ разныхъ алгебраическихъ вопросахъ имѣютъ безконечныя произведенія послѣдняго рода.

Обозначивъ первые n членовъ безконечнаго произведенія черезъ $t_1, t_2, t_3, \ldots . t_n$ и произведеніе ихъ черезъ p_n, мы получимъ

$$p_n = t_1 t_2 t_3 \ldots . t_n .$$

Величина p_n зависитъ отъ числа членовъ n. Предѣлъ перемѣнной величины p_n при увеличеніи числа членовъ n до безконечности мы будемъ обозначать черезъ p, такъ что

$$p = t_1 t_2 t_3 \ldots . t_n t_{n+1} \ldots .$$

2. *Теорема.* Если члены безконечнаго произведенія, начиная съ нѣкотораго мѣста, увеличиваются, оставаясь всегда болѣе 1, то такое произведеніе безпредѣльно увеличивается при неограниченномъ увеличеніи числа его членовъ.

Положимъ, что члены, начиная съ k-аго, увеличиваются, оставаясь болѣе 1. Тогда мы можемъ написать рядъ неравенствъ

$$1 < t_k < t_{k+1} < t_{k+2} < \ldots . < t_n < t_{n+1} < \ldots .$$

Отсюда мы видимъ, что

$$t_{k+1} > t_k\,, \quad t_{k+2} > t_k\,, \ldots t_n > t_k\,.$$

Перемножая почленно эти $n-k$ неравенствъ, получимъ

$$t_{k+1} t_{k+2} t_{k+3} \ldots . t_n > t_k^{n-k}$$

Умножая обѣ части этого неравенства на $t_1 t_2 t_3 \ldots . t_k$, находимъ

$$t_1 t_2 t_3 \ldots . t_k t_{k+1} t_{k+2} \ldots . t_n > t_1 t_2 t_3 \ldots . t_k t_k^{n-k} \quad \text{или}$$

$$p_n > t_1 t_2 \ldots . t_k t_k^{n-k}$$

Извѣстно, что положительная степень неправильной дроби можетъ быть сдѣлана болѣе какого угодно даннаго числа, если показателю мы дадимъ достаточно большое значеніе. Поэтому t_k^{n-k} безпредѣльно увеличивается при увеличеніи n до ∞. Произведеніе $t_1 t_2 t_3 \ldots . t_k$, состоящее изъ конечнаго числа множителей, имѣетъ опредѣленное и конечное значеніе. Слѣдовательно, произведеніе p_n безпредѣльно увеличивается при увеличеніи n до ∞, такъ какъ оно всегда болѣе $t_1 t_2 \ldots . t_k t_k^{n-k}$.

Теорема. Если члены безконечнаго произведенія, начиная съ нѣкотораго мѣста, уменьшаются, оставаясь всегда менѣе 1, то такое произведеніе имѣетъ предѣломъ 0.

Полагая, что

$$1 > t_k > t_{k+1} > t_{k+2} > \ldots . > t_n\,, \quad \text{находимъ}$$

$$t_{k+1} < t_k,\quad t_{k+2} < t_k, \; . \; . \; . \; . \; t_n < t_k.$$

Перемножая эти $n-k$ неравенствъ почленно, находимъ

$$t_{k+1}\, t_{k+2} \; . \; . \; . \; . \; t_n < t_k^{n-k},$$

откуда $\quad p_n < t_1 t_2 \; . \; . \; . \; . \; t_k\, t_k^{n-k}.$

Извѣстно, что положительная степень правильной дроби можетъ быть сдѣлана менѣе какого угодно даннаго числа, если показателю будетъ дано достаточно большое значеніе. Поэтому t_k^{n-k} при увеличеніи n до ∞ стремится къ нулю. Произведеніе $t_1 t_2 t_3 \; . \; . \; . \; . \; t_k\, t_k^{n-k}$ также стремится къ 0. Слѣдовательно, и меньшее произведеніе p_n должно стремиться къ предѣлу 0 при неограниченномъ увеличеніи n.

Теорема. Если безконечное произведеніе стремится къ опредѣленному и конечному предѣлу, то члены его, начиная съ нѣкотораго мѣста, должны или постоянно увеличиваться, оставаясь всегда менѣе 1, или постоянно уменьшаться, оставаясь всегда болѣе 1.

Это предложеніе непосредственно вытекаетъ изъ двухъ предыдущихъ теоремъ.

Замѣчаніе. Обратная теорема не будетъ справедлива. Если члены безконечнаго произведенія увеличиваются, оставаясь менѣе 1, то предѣлъ его можетъ быть 0. Если члены безконечнаго произведенія уменьшаются, оставаясь болѣе 1, то предѣлъ его можетъ быть безконечность. Примѣры такихъ произведеній мы увидимъ далѣе.

Для удобства мы будемъ обозначать члены безконечныхъ произведеній по порядку черезъ $1+u_1$, $1+u_2$, $1+u_3$, ... , $1+u_n$, ... , такъ что

$$p_n = (1+u_1)(1+u_2)(1+u_3) \; . \; . \; . \; . \; (1+u_n),$$

гдѣ u_1, u_2, u_3, ... u_n обозначаютъ рядъ безпредѣльно уменьшающихся положительныхъ или отрицательныхъ членовъ, слѣдующихъ одинъ за другимъ по опредѣленному закону.

3. *Лемма.* Если рядъ уменьшающихся положительныхъ правильныхъ дробей

$$u_1 + u_2 + u_3 + \; . \; . \; . \; . \; + u_n + u_{n+1} + \; . \; . \; . \; .$$

есть сходящійся, то произведенія

$$a_n = (1 - u_{n+1})(1 - u_{n+2}) \cdot \cdot \cdot (1 - u_{n+m})$$

$$b_n = (1 + u_{n+1})(1 + u_{n+2}) \cdot \cdot \cdot (1 + u_{n+m})$$

при достаточно большомъ значеніи n и при какомъ угодно значеніи m могутъ какъ угодно мало отличаться отъ 1.

Непосредственнымъ умноженіемъ находимъ

$$(1 - u_{n+1})(1 - u_{n+2}) = 1 - u_{n+1} - (1 - u_{n+1})u_{n+2}.$$

Такъ какъ $1 - u_{n+1} < 1$, то

$$(1 - u_{n+1})u_{n+2} < u_{n+2}$$

и слѣдовательно

$$(1 - u_{n+1})(1 - u_{n+2}) > 1 - u_{n+1} - u_{n+2} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Умножая обѣ части этого неравенства на $1 - u_{n+3}$, находимъ

$$(1 - u_{n+1})(1 - u_{n+2})(1 - u_{n+3}) > (1 - u_{n+1} - u_{n+2})(1 - u_{n+3})$$

Какъ и прежде, убѣждаемся, что

$$(1 - u_{n+1} - u_{n+2})(1 - u_{n+3}) > 1 - u_{n+1} - u_{n+2} - u_{n+3}.$$

Слѣдовательно,

$$(1 - u_{n+1})(1 - u_{n+2})(1 - u_{n+3}) > 1 - u_{n+1} - u_{n+2} - u_{n+3} \quad . \quad (2)$$

Продолжая эти разсужденія, дойдемъ до неравенства

$$(1-u_{n+1})(1-u_{n+2}) \cdot \cdot \cdot (1-u_{n+m}) > 1-u_{n+1}-u_{n+2}-\ldots-u_{n+m} \quad . \quad . \quad (m-1)$$

или $$a_n > 1 - (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m}).$$

На основаніи свойства сходящихся рядовъ, сумма $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m}$ при достаточно большомъ значеніи n и при всякомъ значеніи m можетъ быть сдѣлана менѣе какого угодно напередъ заданнаго числа α. Слѣдовательно, при достаточно большомъ n можно достигнуть того, чтобы было $a_n > 1 - \alpha$, гдѣ α есть сколь угодно малое число. Кромѣ того $a_n < 1$, такъ какъ a_n есть произведеніе правильныхъ дробей. Такимъ образомъ

$$1 > a_n > 1 - \alpha,$$

т. е. предѣлъ a_n при увеличеніи n до ∞ и при всякомъ m есть 1.

Такъ какъ $u_k < 1$, то $1 - u^2_k < 1$ или $(1+u_k)(1-u_k) < 1$;

отсюда $1 + u_k < \frac{1}{1-u_k}$. Давая здѣсь значку k значенія $n+1$, $n+2, \ldots . n+m$ и перемножая полученныя такимъ образомъ m неравенствъ, находимъ

$$(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+m}) < \frac{1}{(1-u_{n+1})(1-u_{n+2})\ldots(1-u_{n+m})}$$

или $b_n < \frac{1}{a_n}$. Взявъ вмѣсто a_n меньшую величину $1 - \alpha$, мы и подавно получимъ $b_n < \frac{1}{1-\alpha}$. Кромѣ того $b_n > 1$, такъ какъ b_n есть произведеніе неправильныхъ дробей. Такимъ образомъ

$$1 < b_n < \frac{1}{1-\alpha}.$$

Такъ какъ разность $\frac{1}{1-\alpha} - 1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой, то предѣлъ b_n при увеличеніи n до ∞ и при всякомъ значеніи m есть 1.

Теорема. Если рядъ убывающихъ правильныхъ дробей $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots . + u_n + \ldots .$ есть сходящійся, то произведенія

$$p_{n+m} = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+m})$$

$$q_{n+m} = (1-u_1)(1-u_2)\ldots(1-u_n)(1-u_{n+1})(1-u_{n+2})\ldots(1-u_{n+m}).$$

при увеличеніи m будутъ стремиться къ опредѣленнымъ и конечнымъ предѣламъ.

Произведеніе q_{n+m}, въ которомъ всѣ множители представляютъ правильныя дроби, уменьшается при увеличеніи числа множителей $n + m$. Остается показать, что это произведеніе не уменьшается безпредѣльно.

По предыдущимъ обозначеніямъ можно написать $q_{n+m} = q_n \cdot a_n$. По предыдущей леммѣ $a_n > 1 - \alpha$. Значитъ $q_{n+m} > q_n(1 - \alpha)$. Здѣсь α обозначаетъ какое угодно малое число. Это неравенство показываетъ, что при постоянномъ значеніи n произведеніе q_{n+m} не уменьшается безпредѣльно при увеличеніи m, а остается болѣе постоянной величины q_n, умноженной на нѣкоторую перемѣнную величину $1-\alpha$, отличающуюся отъ 1 такъ мало, какъ пожелаемъ, если число n будетъ взято достаточно велико.

Точно также, замѣчая, что $p_{n+m} = p_n \cdot b_n$, откуда по предыдущей леммѣ $p_{n+m} < \frac{p_n}{1-\alpha}$, находимъ, что p_{n+m} менѣе постоянной величины p_n, дѣленной на перемѣнную величину $1-\alpha$, отличающуюся отъ 1 такъ мало, какъ пожелаемъ, если число n взято достаточно велико. Такимъ образомъ p_{n+m} не превосходитъ нѣкоторой величины при увеличеніи числа членовъ $n+m$. Кромѣ того p_{n+m} увеличивается при увеличеніи m. Ясно, что p_{n+m} стремится къ опредѣленному и конечному предѣлу при увеличеніи m до ∞.

Теорема. Если рядъ уменьшающихся правильныхъ дробей $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ есть расходящійся, то произведеніе

$$p_n = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \ldots (1 + u_n)$$

безпредѣльно увеличивается при неограниченномъ увеличеніи числа членовъ n, а произведеніе

$$q_n = (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3) \ldots (1 - u_n)$$

безпредѣльно уменьшается до нуля при увеличеніи n.

Изъ формулы для умноженія двучленовъ, имѣющихъ одинаковый первый членъ, непосредственно слѣдуетъ, что

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3) \ldots (1+u_n) > 1+u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n .$$

Такъ какъ сумма $1 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ по условію неограниченно увеличивается при увеличеніи n, то и подавно произведеніе p_n также увеличивается и можетъ быть сдѣлано болѣе какого угодно напередъ заданнаго числа, если n взято досадочно большое.

Мы видѣли, что $1 - u_k < \frac{1}{1+u_k}$, если $u_k < 1$. Давая здѣсь значку k значенія 1, 2, 3, ... n, и, перемножая полученныя неравенства, находимъ $q_n < \frac{1}{p_n}$. Такъ какъ p_n стремится къ ∞ при увеличеніи n, то $\frac{1}{p_n}$ стремится къ 0 и слѣдовательно произведеніе q_n также стремится къ предѣлу 0.

Примѣръ. Извѣстно, что рядъ

$$\frac{a}{1^\rho}+\frac{a}{2^\rho}+\frac{a}{3^\rho}+\frac{a}{4^\rho}+\ldots\ldots+\frac{a}{n^\rho}+\ldots\ldots$$

есть сходящійся, если $\rho > 1$, и расходящійся, если $\rho < 1$ или $\rho = 1$.

Такимъ образомъ произведенія

$$p_n = \left(1+\frac{a}{1^\rho}\right)\left(1+\frac{a}{2^\rho}\right)\left(1+\frac{a}{3^\rho}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{a}{n^\rho}\right)$$

$$q_n = \left(1-\frac{a}{1^\rho}\right)\left(1-\frac{a}{2^\rho}\right)\left(1-\frac{a}{3^\rho}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{a}{n^\rho}\right)$$

стремятся къ опредѣленнымъ предѣламъ, если $\rho > 1$. Если же показатель $\rho < 1$ или $\rho = 1$, то p_n стремится къ ∞ и q_n стремится къ 0.

4. *Задача.* Преобразовать сходящійся рядъ

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_{n-1}+u_n+\ldots\ldots$$

въ безконечное произведеніе.

Полагая

$$s_{n+1} = u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_{n-1}+u_n$$

и замѣчая, что

$$s_2 = u_0+u_1 = u_0\left(1+\frac{u_1}{u_0}\right),$$

$$s_3 = u_0+u_1+u_2 = u_0\left(1+\frac{u_1}{u_0}\right)\left(1+\frac{u_2}{u_0+u_1}\right),$$

доходимъ послѣдовательно до тождества

$$s_{n+1}=u_0\left(1+\frac{u_1}{u_0}\right)\left(1+\frac{u_2}{u_0+u_1}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{u_n}{u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_{n-1}}\right).$$

Полагая

$$v_1=\frac{u_1}{u_0},\ v_2=\frac{u_2}{u_0+u_1},\ldots\ldots,\ v_n=\frac{u_n}{u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_{n-1}},$$

находимъ

$$s_{n+1} = p_{n+1} = u_0(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\ldots\ldots(1+v_{n-1})(1+v_n).$$

Обратная задача. Безконечное произведеніе

$$p_n = (1+v_1)(1+v_2)(1+v_3) \dots (1+v_{n-1})(1+v_n)$$

преобразовать въ сходящійся рядъ.

Полагая

$$v_1 = u_1,\ v_2 = \frac{u_2}{1+u_1},\ v_3 = \frac{u_3}{1+u_1+u_2}, \dots,\ v_n = \frac{u_n}{1+u_1+u_2+\dots+u_{n-1}},$$

находимъ

$$p_n = (1+u_1)\left(1+\frac{u_2}{u_1+1}\right)\left(1+\frac{u_3}{1+u_1+u_2}\right)\dots\left(1+\frac{u_n}{1+u_1+u_2+\dots+u_{n-1}}\right)$$

или $\quad s_{n+1} = 1 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n,$

гдѣ $u_1 = v_1,\ u_2 = (1+v_1)v_2,\ u_3 = (1+u_1+u_2)v_3 = [1+v_1+(1+v_1)v_2]v_3$

или $\quad u_3 = (1+v_1)(1+v_2)v_3, \dots,\ u_n = (1+v_1)(1+v_2)\dots(1+v_{n-1})v_n.$

Примѣръ 1. $p_n = (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^{n-1}})$.

Полагая $u_1 = x,\ u_2 = (1+x)x^2,\ u_3 = (1+x)(1+x^2)x^4, \dots$

$$u_n = (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^{n-2}})x^{2^{n-1}},$$

находимъ

$$u_1 = x,\quad u_2 = x^2 + x^3,\quad u_3 = x^4 + x^5 + x^6 + x^7, \dots$$

$$u_n = x^{2^{n-1}} + x^{2^{n-1}+1} + x^{2^{n-1}+2} + \dots + x^{2^n-1} \quad \text{и}$$

$$p_n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2^n-1},\ \text{откуда}\ p = \frac{1}{1-x}.$$

Примѣръ 2. Перемножая тождества

$$\mathrm{Cos}\,a = \frac{\mathrm{Sin}2a}{2\mathrm{Sin}a},\ \mathrm{Cos}\frac{a}{2} = \frac{\mathrm{Sin}a}{2\mathrm{Sin}\frac{a}{2}},\quad \mathrm{Cos}\frac{a}{4} = \frac{\mathrm{Sin}\frac{a}{2}}{2\mathrm{Sin}\frac{a}{4}}, \dots$$

$$\mathrm{Cos}\frac{a}{2^{n-1}} = \frac{\mathrm{Sin}\frac{a}{2^{n-2}}}{2\mathrm{Sin}\frac{a}{2^{n-1}}},\ \text{находимъ}$$

$$p_n = \mathrm{Cos}\, a \,\mathrm{Cos}\frac{a}{2}\,\mathrm{Cos}\frac{a}{4}\,\ldots\,\mathrm{Cos}\frac{a}{2^{n-1}} = \frac{\mathrm{Sin}2a}{2^n\,\mathrm{Sin}\dfrac{a}{2^{n-1}}}.$$

Отсюда
$$p = \frac{\mathrm{Sin}2a}{2a}$$

Полагаемъ $v_1 = \mathrm{Cos}a - 1$, $v_2 = \mathrm{Cos}\frac{a}{2} - 1$, $v_3 = \mathrm{Cos}\frac{a}{4} - 1, \ldots$

$v_n = \mathrm{Cos}\frac{a}{2^{n-1}} - 1$ или $v_1 = -2\mathrm{Sin}^2\frac{a}{2}$, $v_2 = -2\mathrm{Sin}^2\frac{a}{4}, \ldots$

$v_n = -2\mathrm{Sin}^2\frac{a}{2^n}$.

Тогда
$$u_1 = -\frac{2\mathrm{Sin}2a\mathrm{Sin}^2\dfrac{a}{2}}{\mathrm{Sin}2a},\quad u_2 = -\frac{\mathrm{Sin}\,2a\,\mathrm{Sin}^2\dfrac{a}{4}}{\mathrm{Sin}a},$$

$$u_3 = -\frac{\mathrm{Sin}\,2a\,\mathrm{Sin}^2\dfrac{a}{8}}{2\mathrm{Sin}\dfrac{a}{2}},\ \ldots,\ u_n = -\frac{\mathrm{Sin}2a\mathrm{Sin}^2\dfrac{a}{2^n}}{2^{n-2}\mathrm{Sin}\dfrac{a}{2^{n-2}}}.$$

Такъ какъ $p = 1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, то

$$\frac{2\mathrm{Sin}^2\dfrac{a}{2}}{\mathrm{Sin}2a} + \frac{\mathrm{Sin}^2\dfrac{a}{4}}{\mathrm{Sin}a} + \frac{\mathrm{Sin}^2\dfrac{a}{8}}{2\mathrm{Sin}\dfrac{a}{2}} + \ldots + \frac{\mathrm{Sin}^2\dfrac{a}{2^n}}{2^{n-2}\mathrm{Sin}\dfrac{a}{2^{n-2}}} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Sin}2a} - \frac{1}{2a}.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

„Опытъ матеріальной теоріи электричества и магнетизма"

И. Полетики.

С.-Петербургъ 1892. 174 стр.

Какъ уже видно изъ выписаннаго нами заглавія, авторъ изслѣдованія поставилъ своей задачей создать *матеріальную* теорію электричества и магнетизма. Усматривая естественный недостатокъ „въ современномъ ученіи объ электромагнетизмѣ въ отсутствіи *естественной* теоріи, дающей *общепонятное объясненіе всѣхъ* явленій электричества и магнетизма“ (стр.1), авторъ задался цѣлью пополнить этотъ пробѣлъ. Ближайшей задачей на пути къ достиженію намѣченной цѣли является доказательство положенія, что „предложеніе о невѣсомыхъ жидкостяхъ въ настоящее время не представляется болѣе необходимымъ для объясненія явленій электричества и магнетизма“ (стр. 2).

Постараемся—насколько это позволяютъ предѣлы настоящей замѣтки—познакомить читателей съ содержаніемъ этой работы, останавливаясь лишь на развитіи главной мысли.

Въ *первой* главѣ („О теоріи электричества“) авторъ излагаетъ основаніе своихъ воззрѣній и примѣняетъ ихъ къ изслѣдованію процессовъ, происходящихъ въ гальваническихъ парахъ. Существо электрическаго состоянія представляется автору результатомъ молекулярныхъ процессовъ. „Во всѣхъ источникахъ электричества, на поверхности или же и въ массѣ тѣлъ, говоритъ онъ (стр. 3), возбуждается быстрое частичное движеніе, вслѣдствіе временнаго, болѣе или менѣе полнаго, освобожденія простыхъ или сложныхъ по составу частицъ отъ дѣйствія силъ сродства или сцѣпленія.“ Такое движеніе распространяется отъ частицы къ частицѣ до электрическихъ полюсовъ и продолжается по протяженію проводниковъ. Электрическое частичное движеніе есть, по воззрѣніямъ автора, временное возвращеніе матеріальнымъ частицамъ свойственной имъ отъ природы быстроты поперемѣнныхъ движеній. Электрическое движеніе въ проводникахъ и источникахъ электричества происходитъ такимъ образомъ, „что вытѣсняемое этимъ поперемѣннымъ электрическимъ движеніемъ множество другихъ частицъ, не получившихъ прямыхъ толчковъ, стремится занять пустоты, оставшіяся, вслѣдствіе электрическаго движенія, не наполненными“ (стр. 5). Такое замѣщеніе пустотъ можетъ происходить только въ металлѣ, сохраняющемъ общую связь между частицами. „Если же (въ элементѣ Даніэля) отъ значительнаго растворенія въ пластинкѣ цинка произойдутъ большія пустоты, то онѣ перестанутъ заполняться дѣйствіемъ частичнаго притяженія, и сила электрическаго тока постепенно уменьшается“ (стр. 11). Эти частичныя движенія авторъ дѣлитъ на двѣ группы: „поступательныя“ и „возвратныя“. Первыми наз. тѣ, которыя происходятъ вслѣдствіе увеличенія въ объемѣ частицъ или вообще принимаютъ направленія данныхъ частицамъ толчковъ, вторыми—тѣ, которыя совершаются частицами для заполненія происшедшихъ пустотъ.

Вторая глава („Описаніе разныхъ системъ гальваническихъ паръ и опыты профессора Бьеркнеса") посвящена описанію разныхъ системъ гальваническихъ паръ и изложенію опытовъ профессора Бьеркнеса. Авторъ примѣняетъ свою теорію къ парамъ Варенъ-де-Ла-Рю, Лекланше, Бунзена и къ парѣ изъ пластинокъ цинка и платины. Объясненію поляризаціи авторъ мѣста не удѣляетъ, ограничиваясь лишь замѣчаніемъ, что она является результатомъ „неполнаго окисленія водорода и второстепенныхъ химическихъ реакцій, обусловливающихъ, въ свою очередь, такія дѣйствія матеріальныхъ частицъ, которыя несогласны по скоростямъ и направленіямъ возбуждаемыхъ ими движеній съ движеніями, зависящими отъ вліянія главныхъ реакцій" (стр. 28).

Вторая часть второй главы посвящена, какъ уже сказано, изложенію опытовъ Бьеркнеса, собственно говоря, непосредственно не относящихся къ трактуемому вопросу. Впрочемъ, авторъ самъ того же мнѣнія и пользуется этими опытами не для доказательства, а лишь для нѣкотораго уясненія путемъ аналогіи. Находя, что опыты Бьеркнеса имѣютъ больше значенія для гидродинамики, нежели для теоріи электричества, онъ тѣмъ не менѣе находитъ возможнымъ полагать, что эти попытки „служатъ *во всякомъ случаѣ* указаніемъ на то, что гидродинамическія явленія, называемыя Бьеркнесомъ электродинамическими, своимъ сходствомъ съ электромагнитными явленіями *доказываютъ* происхожденіе послѣднихъ отъ частичныхъ движеній въ матеріи" (стр. 37).

Третья глава („Приложеніе нашей теоріи къ электрическимъ явленіямъ") содержитъ нѣкоторые опыты Жерне, Видемана, Максуэлля и др., подтверждающіе, по мнѣнію автора, его взглядъ на происхожденіе электричества. Такое подтвержденіе авторъ думаетъ усмотрѣть и въ опытахъ Крукса надъ лучистой матеріей. Въ заключеніе, говоря о термоэлектричествѣ, авторъ пытается установить различіе между электричествомъ и теплотой. Первое авторъ опредѣляетъ, какъ „временное и притомъ полное или неполное освобожденіе матеріальныхъ частицъ отъ силы сцѣпленія, дѣйствующей на нихъ со стороны окружающей ихъ матеріи" (стр. 52). Что касается теплоты, то на той же стр. авторъ продолжаетъ: „Теплота происходитъ при всякомъ частичномъ движеніи, какъ электрическомъ, такъ и простомъ. Развивающаяся температура зависитъ отъ скорости этого движенія... Теплота (стр. 53) уменьшаетъ силу сцѣпленія, но не уничтожаетъ ее даже на мгновеніе.“ Для лучшаго выясненія различія между этими двумя дѣятелями природы авторъ находитъ необходимымъ отвѣтить на вопросъ: отчего теплота распространяется по всей массѣ металла, а электричество только на поверхности. Отвѣтъ гласитъ (стр. 53): „Это происходитъ оттого, что теплота постепенно, хотя и скоро, распространяется по металлу и постоянно увеличиваетъ скорость его частичныхъ движеній, между тѣмъ электричество распространяется мгновенно отъ дѣйствія химическихъ или механическихъ причинъ на поверхность и не можетъ имѣть постепеннаго дѣйствія отъ частицы къ частицѣ, такъ какъ съ уменьшеніемъ скорости электричество не появляется. Отсюда слѣдуетъ, что электричество можетъ обнаруживаться только въ нѣкоторыхъ предѣлахъ скорости частичныхъ движеній, а теплота такихъ предѣловъ не имѣетъ.“

Четвертая глава („Дѣйствіе электричества на проводники и непроводники. Основанія теоріи электричества, изложенной въ сочиненіи профессора П. Фанъ-деръ-Флита: „Опытъ механической теоріи гальваническаго тока“) дѣлится на двѣ части. Первая представляетъ попытку построить теорію проводниковъ и діэлектриковъ на молекулярныхъ началахъ. Впрочемъ здѣсь авторъ наталкивается на нѣкоторые вопросы, которые онъ—по собственному признанію—не въ состояніи разрѣшить, какъ напр. сильная проводимость кремніевой бронзы и др. сплавовъ (стр. 55). Вторая часть посвящена изложенію извѣстной уже гипотезы Фанъ-деръ-Флита.

Пятая глава („О частичномъ движеніи въ магнитахъ“) представляетъ собой попытку примѣнить изложенную выше теорію къ магнитнымъ явленіямъ. Сначала авторъ излагаетъ теорію Ампэра, при чемъ указываетъ на то, что она не въ силахъ объяснить причины, почему токи принимаютъ въ магнитахъ круговое движеніе. Затѣмъ авторъ переходитъ къ изслѣдованію этой причины, чтобы дополнить, такимъ образомъ, теорію Ампэра. Приведя нѣсколько опытовъ, демонстрированныхъ различными учеными, авторъ высказываетъ положеніе, что „магнитный токъ происходитъ отъ криволинейныхъ, поперемѣнныхъ движеній самыхъ частицъ магнита“ (стр. 80).

Сходство магнитныхъ явленій съ электрическими и взаимное вліяніе этихъ двухъ силъ одной на другую побуждаетъ автора приложить къ объясненіямъ магнитныхъ явленій его теорію частичныхъ движеній. Онъ говоритъ: „Въ желѣзѣ и стали, при ихъ намагничиваніи, возбуждаются частичныя движенія, сходныя съ электрическими, преимущественно тѣмъ, что магниты, какъ и наэлектризованныя тѣла, оказываютъ на нѣкоторыя постороннія вещества и на полюсы другихъ магнитовъ притяженіе или отталкиваніе. Но движенія эти отличаются отъ электрическихъ тѣмъ, что магнетизмъ не распространяется по проводникамъ; что онъ глубже проникаетъ въ массу намагниченныхъ тѣлъ, тогда какъ электричество въ нѣкоторыхъ случаяхъ возбуждается только на поверхности; что магниты не даютъ искръ и что они производятъ явленія, доказывающія существованіе въ нихъ самихъ кругообразныхъ токовъ, которыя мы объясняемъ, какъ безконечно малыя попеременныя частичныя движенія по дугамъ круга или по спиралямъ въ плоскостяхъ поперечныхъ сѣченій“ (стр. 80, 81).

Въ *шестой* главѣ („Описаніе и объясненіе магнитныхъ фигуръ“) сначала предпосылается опредѣленіе магнитнаго поля, магнитныхъ силовыхъ линій и пр. Затѣмъ авторъ переходитъ къ попыткѣ вывести объясненіе линій силы изъ попеременныхъ криволинейныхъ движеній частицъ магнита и движенія окружающаго воздуха.

Седьмая и восьмая главы посвящены изложенію явленій электромагнитной индукціи. Прежде всего авторъ доказываетъ цѣлымъ рядомъ опытовъ участіе воздуха и другихъ діэлектриковъ въ происхожденіи большей части электромагнитныхъ явленій. Далѣе слѣдуетъ изложеніе различныхъ опытовъ, начиная съ опыта Араго надъ магнетизмомъ вращенія и кончая изслѣдованіями Пойнтинга, причемъ авторъ держится современныхъ взглядовъ относительно индукціи, т. е. разсматриваетъ пересѣченіе силовыхъ линій, какъ необходимое условіе появленія наведеннаго тока. Здѣсь, между прочимъ, дается опредѣленіе потенціала, „какъ скорости попеременнаго частичнаго движенія въ связи съ механической работой, производящей эту скорость“ (стр. 116). Вторая часть отдѣла объ электромагнитной индукціи посвящена изложенію выводовъ Китлера относительно дѣйствія магнитовъ на сомкнутые проводники.

Девятая и послѣдняя глава („Отношеніе между предлагаемою нами теоріею электромагнетизма и теоріею свѣта“) посвящена почти цѣликомъ подробному изложенію опытовъ Герца. Но по разсмотрѣніи этихъ послѣднихъ авторъ приходитъ къ убѣжденію, „что волны электричества въ полномъ смыслѣ слова матеріальны и болѣе сходны съ волнами звука, нежели свѣта" (стр. 171). Впрочемъ авторъ самъ, какъ бы чувствуя нѣкоторую смѣлость вывода, спѣшитъ сдѣлать оговорку относительно возможности возраженія по поводу огромнаго различія между скоростями звука и электричества.

Приведеннаго подробнаго изложенія содержанія книжки намъ кажется достаточнымъ, чтобы убѣдить читателей, что сколько нибудь серьезнаго выполненія намѣченной авторомъ задачи она не содержитъ.

Видоизмѣненный и упрощенный способъ опредѣленія поверхности шара.

Сообщеніе, сдѣланное въ засѣданіи математическаго отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей по вопросамъ элементарной математики, — 29 ноября 1891 года.

Разсматривая шаръ какъ тѣло вращенія, образованное обращеніемъ полукруга около діаметра, мы для опредѣленія поверхности сравниваемъ шаръ съ такимъ тѣломъ вращенія, поверхность котораго легко найти, и которое по своему виду наиболѣе подходило бы къ шару. Такъ какъ правильный полумногоугольникъ описанный или вписанный наиболѣе будетъ подходить къ образующему полукругу, то, слѣдуя Архимеду, описываютъ обыкновенно около полукруга половину правильнаго многоугольника съ четнымъ числомъ сторонъ такъ, чтобы на полукругъ приходилось цѣлое число сторонъ, тогда діаметръ будетъ совпадать съ прямой, дѣлящей многоугольникъ пополамъ. Вращая кругъ вмѣстѣ съ полумногоугольникомъ, мы получимъ шаръ и тѣло вращенія, описанное около него, которое будетъ состоять изъ двухъ полныхъ конусовъ и нѣсколькихъ усѣченныхъ, (а иногда и цилиндра, если число сторонъ полупериметра нечетное), а потому полная поверхность этого тѣла будетъ суммою боковыхъ поверхностей двухъ полныхъ конусовъ и нѣсколькихъ усѣченныхъ. Боковая же поверхность каждаго полнаго и усѣченнаго конуса выразится, какъ извѣстно, произведеніемъ окружности большого круга на его высоту, или на проекцію образующей стороны полупериметра, слѣдовательно поверхность всего тѣла вращенія будетъ равна окружности большого круга на сумму высотъ, или, въ этомъ случаѣ, на ось вращенія.

Обозначивъ чрезъ R, h и S радіусъ шара, ось вращенія и поверхность вращенія, получимъ:

$$S = 2\pi Rh.$$

Въ общеупотребительномъ учебникѣ Давидова говорится, что когда будемъ увеличивать число сторонъ полупериметра, то ось вращенія h будетъ *безпредѣльно* стремиться къ діаметру. Во первыхъ это не очевидно и требуетъ доказательства; во вторыхъ, если увеличить число сторонъ чрезъ удвоеніе, то касательныя пройдутъ чрезъ концы діаметра, а слѣдовательно ось вращенія сразу дѣлается равной діаметру, т. е. $h = 2R$. Въ самомъ дѣлѣ: чтобы удвоить число сторонъ правильнаго описаннаго многоугольника, должно каждую дугу раздѣлить пополамъ и чрезъ средины провести касательныя, а для этого слѣдуетъ только провести изъ центра прямыя въ вершины описаннаго многоугольника, эти прямыя раздѣлятъ дугу пополамъ, значитъ и ось вращенія проходитъ чрезъ средины дугъ, которыя суть конечныя точки діаметра образующаго полукруга, а потому при удвоеніи числа сторонъ касательныя пройдутъ черезъ концы діаметра, т. е. діаметръ становится осью вращенія. При дальнѣйшемъ удвоеніи числа сторонъ эта ось, равная діаметру, будетъ сохраняться, потому что прежнія точки прикосновенія остаются, а появляются новыя въ томъ же числѣ. Основываясь на этомъ соображеніи, можно упростить самый выводъ поверхности шара. Для этого, очевидно, слѣдуетъ сразу описать около полукруга половину правильнаго многоугольника съ четнымъ же числомъ сторонъ, но такъ, чтобы крайнія полустороны проходили черезъ концы діаметра *), значитъ надо полуокружность раздѣлить на столько равныхъ частей, сколько въ полупериметрѣ сторонъ и провести касательныя. Обращая вмѣстѣ съ полукругомъ описанный такимъ образомъ полумногоугольникъ, получимъ тѣло вращенія, поверхность котораго будетъ состоять изъ боковыхъ поверхностей нѣсколькихъ усѣченныхъ конусовъ, иногда цилиндра и двухъ равныхъ круговъ, описанныхъ полусторонами, перпендикулярными къ діаметру.

---

*) См. Louis Bertrand. Developpement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, prise dans toute son étendue, tome second. Genève MDCCLXXVIII. Géometrie élémentaire, prop. CXXII p. 328.

Удерживая прежнее обозначеніе и называя чрезъ r радіусы равныхъ круговъ, получимъ слѣдующее выраженіе:

$$S = 2\pi R \,.\, 2R + 2\pi r^2.$$

Съ удвоеніемъ числа сторонъ S будетъ измѣняться уменьшаясь, и будетъ стремиться къ опредѣленному предѣлу. Въ самомъ дѣлѣ: такъ какъ r, т. е. половина стороны правильнаго описаннаго многоугольника, есть величина безконечно малая, потому что съ удвоеніемъ числа сторонъ получается сторона меньше половины стороны даннаго многоугольника, слѣдовательно эта величина r неограниченно стремится къ нулю, значитъ и $2\pi r^2$ есть величина безконечно малая, и потому предѣломъ поверхности S будетъ $2\pi R \,.\, 2R$. Съ другой стороны, такъ какъ предѣломъ для полупериметра будетъ полуокружность образующаго полукруга, то предѣломъ поверхности тѣла вращенія надо считать поверхность, образованную полуокружностью, т. е. поверхность шара, стало быть поверхность шара будетъ равна $2\pi R \,.\, 2R$.

Преп. *К. Ф. Дубискій* (Одесса).

Примѣчаніе. Бертранъ излагаетъ этотъ вопросъ немного подробнѣе, описывая правильный многоугольникъ по указанному способу и вписывая, соединивъ тѣ же точки хордами, слѣдовательно онъ разсматриваетъ двѣ перемѣнныя величины, именно поверхность тѣла вращенія описаннаго и поверхность тѣла вращенія вписаннаго.

Если обозначимъ апоѳему вписаннаго правильнаго многоугольника чрезъ α, то легко вывести, что поверхность тѣла вращенія вписаннаго будетъ равна

$$2\pi\alpha \,.\, 2R$$

или $$2\pi(\alpha + R - R)2R$$

$$2\pi\{R - (R - \alpha)\}2R$$

$$2\pi R \,.\, 2R - 2\pi(R - \alpha)2R$$

$$4\pi R^2 - (2\pi R - 2\pi\alpha) \,.\, 2R$$

Такимъ образомъ онъ находитъ, что поверхность тѣла вращенія описаннаго болѣе $4\pi R^2$ на $(2\pi R - 2\pi\alpha)2R$, т. е. на площадь прямоугольника, основаніе котораго есть разность окружностей радіусовъ R и α, а высота равна діаметру.

Я ограничился одной перемѣнной, имѣя въ виду упрощеніе вывода.

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Казанское Физ.-Мат. Общество. 13-е засѣданіе. 30-го ноября 1891 года.

1. *Д. А. Гольдгаммеръ* сдѣлалъ сообщеніе о дисперсіи и абсорбціи свѣта съ точки зрѣнія электромагнитной теоріи.

2. *А. П. Красновъ* сообщилъ объ окончательныхъ результатахъ нивеллировки, произведенной лѣтомъ 1891 года Каз. Астр. Обсерваторіей—съ цѣлью дополненія нивеллировки прошлаго года; опредѣлены высоты многихъ пунктовъ города и его окрестностей, по связи съ нулемъ водомѣрнаго поста, лежащаго на противоположномъ берегу Волги; приводимъ окончательную высоту марки, вбитой въ стѣнѣ Астр. Обс.: $72^m,538$ надъ уровнемъ Балтійскаго моря.

3. *П. К. Криницынъ* изложилъ употребляемый имъ практическій пріемъ построенія правильныхъ многогранниковъ по данному ребру; докладчикъ изготовляетъ коллекціи деревянныхъ (кромѣ того картонныхъ, стекляныхъ и др.) моделей правильныхъ многогранниковъ и кристалловъ; способъ состоитъ въ слѣдующемъ: изготовляется призма, объемлющая долженствующій быть построеннымъ многогранникъ; отсѣкая отъ этой призмы куски вдоль легко опредѣляемыхъ по положенію плоскостей — изготовляется и самый многогранникъ.

14-е засѣданіе. 29-го декабря 1891 года.

1. Предсѣдатель сообщилъ Обществу о кончинѣ знаменитаго Германскаго математика Кронекера, изложилъ въ краткой рѣчи научныя заслуги покойнаго и предложилъ Обществу почтить память покойнаго вставаніемъ.

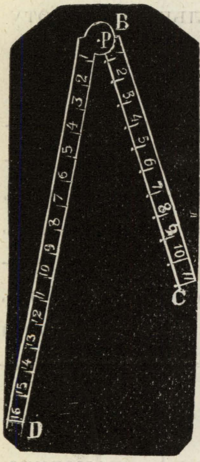
2. *Г. Н. Шебуевъ* сдѣлалъ сообщеніе подъ заглавіемъ: задача объ охлажденіи нагрѣтаго шара въ потокѣ жидкости; авторъ интегрируетъ уравненія задачи для того случая, когда температура жидкости уже на небольшемъ разстояніи отъ поверхности шара равна постоянной температурѣ потока.

3. Секретарь доложилъ сообщеніе *С. Н. Стемпневскаго:* о геометрическомъ значеніи модуля сѣченія при изгибѣ и крученіи. Авторъ даетъ въ этомъ сообщеніи доказательство слѣдующей теоремы изъ элементарной теоріи изгиба балки, теоремы неудовлетворительно доказанной, по мнѣнію автора, въ руководствахъ, употребительныхъ при среднемъ техническомъ преподаваніи: Мо-

дуль сѣченія (частное отъ дѣленія момента инерціи сѣченія балки относительно нейтральной линіи сѣченія на разстояніи отъ нейтральной линіи до наиболѣе напряженнаго волокна) равенъ частному отъ дѣленія суммы моментовъ объемовъ сжатія и удлиненія, взятыхъ относительно нейтральной линіи, на удлиненіе наиболѣе напряженнаго волокна.

Подобную теорему авторъ доказываетъ и для случая крученія балки. *М. Сегель.*

Приборъ для дѣленія остраго угла на три равныя части. *)



Фиг. 25.

Приборъ состоитъ изъ двухъ узкихъ, тонкихъ и прямыхъ шкалъ BC и BD, соединенныхъ между собой шарниромъ (фиг. 25).

Шкала BC должна быть приблизительно вдвое короче шкалы BD. Вообще же ихъ длина совершенно произвольная. Штифтикъ P шарнира расположенъ такъ, что лежитъ на пересѣченіи внутреннихъ сторонъ шкалъ, подъ какимъ бы угломъ ни былъ развернутъ приборъ. Начиная отъ штифтика P, идутъ дѣленія по направленію къ концамъ шкалъ, произвольныя, но равныя между собой. (Полезно сдѣлать соотвѣтствующія дѣленія и на обратной сторонѣ шкалъ). На шкалѣ BC у внутренней стороны должны быть маленькія отверстія, такъ чтобы онѣ лежали на прямой *p*C противъ каждаго дѣленія шкалы. Точность результатовъ вполнѣ зависитъ отъ точнаго и аккуратнаго приготовленія прибора.

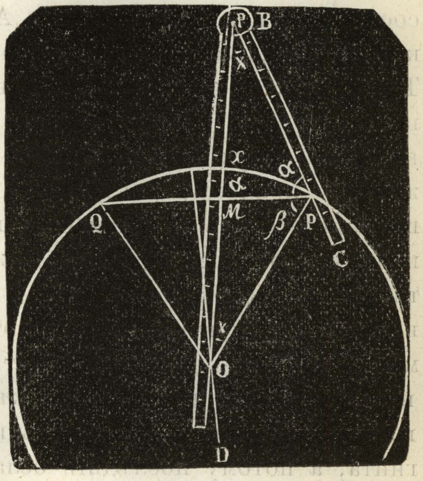
Чтобы раздѣлить любой острый уголъ на три равныя части при помощи этого прибора, надо поступать слѣдующимъ образомъ:

Взявъ данный уголъ, изъ вершины его опишемъ окружность произвольнаго радіуса, но не болѣе стороны BC прибора. Длину этого радіуса отмѣтимъ на обѣихъ сторонахъ прибора, начиная отъ штифтика *p* по направленію къ D и C. (Необходимо брать длину радіуса до тѣхъ дѣленій, гдѣ есть отверстія). Положимъ, что описанная окружность пересѣчетъ стороны угла въ точкахъ

---

*) Доставлено въ редакцію профессоромъ Московскаго Университета Θ. Е. Орловымъ.

P и Q (фиг. 26). Соединяемъ эти точки прямой PQ. Теперь прикладываемъ приборъ стороной BC, тѣмъ отверстіемъ, до котораго взята длина радіуса, къ точкѣ P или Q (положимъ къ точкѣ P), и укрѣпимъ приборъ въ этой точкѣ такъ, чтобы онъ могъ свободно вращаться около нея, какъ центра. Стороной BD прибора, опять той же точкой, до которой взята длина радіуса, ведемъ по хордѣ QP отъ Q по направленію къ P до тѣхъ поръ, пока продолженіе BD не пройдетъ черезъ центръ (фиг. 26). Тогда отмѣчаемъ точку пересѣченія BD съ дугой PQ. Положимъ, эта точка x. Соединяя ее съ центромъ, получимъ уголъ POx, который и будетъ составлять третью часть даннаго угла POQ. Справедливость этого не трудно доказать.



Фиг. 26.

Прямыя pM, pP и OP равны, какъ радіусы. Изъ равнобедреннаго $\triangle$-ка pPO заключаемъ о равенствѣ угловъ OpP и POp, которые назовемъ черезъ x. Изъ равнобедреннаго $\triangle$-ка MpP заключаемъ о равенствѣ угловъ pMP и MPp. Назовемъ ихъ черезъ α.

Уголъ MPO изъ равнобедреннаго $\triangle$-ка OPQ выразится такъ: $\angle MPO = 90 - \frac{y}{2}$ (гдѣ y есть данный уголъ). Обозначимъ уголъ MPO черезъ β.

Уголъ α изъ $\triangle$-ка MpP выразится такъ:

$\alpha = 90 - \frac{x}{2}$. Какъ внѣшній уголъ $\triangle$-ка MPO, уголъ α будетъ равенъ $\beta + x$.

Слѣдоват. $$90 - \frac{x}{2} = \left(90 - \frac{y}{2}\right) + x.$$

Откуда находимъ, что уголъ $y = 3x$ и наконецъ $x = \frac{y}{3}$. Что и требовалось доказать.

Студ. Моск. ун. 3 сем. мат. фак. *Николай Карповъ.*

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Регуляторъ В. Кузнецова для электрическаго свѣта съ неподвижной свѣтящейся точкой. Регуляторъ г. Кузнецова состоитъ изъ двухъ сообщающихся сосудовъ A и A′; въ эти сосуды налита ртуть, на которой плаваютъ два поплавка; къ поплавкамъ придѣлана T-образная проволока, къ среднему отростку которой прикрѣпленъ верхній уголь. Нижній уголь плаваетъ тоже на поплавкѣ въ нижнемъ сосудѣ B. Сосуды A, A′ и B соединены трубкой, снабженной краномъ, такъ что, когда кранъ открытъ, ртуть изъ верхняго сосуда переливается въ нижній и угли сближаются. Съ краномъ соединенъ рычагъ, къ которому придѣланъ якорь, притягиваемый электромагнитомъ. Токъ, идущій къ углямъ, отвѣтвляется къ электромагниту, который притянетъ якорь и тѣмъ самымъ откроетъ кранъ, вслѣдствіе чего угли сблизятся и прикоснутся другъ къ другу; тогда токъ, прежде цѣликомъ устремлявшійся въ электромагнитъ, распредѣлится между углями и обмоткой магнита, а потому послѣдній ослабѣетъ и пружина оттянетъ якорь и кранъ закроется. На рычагѣ лежитъ резиновая подушечка съ ртутью, соединенная съ верхней частью трубки (т. е. надъ краномъ). Когда пружина оттянетъ якорь, рычагъ придавливаетъ подушечку и ртуть гонится въ сосуды A и A′, чѣмъ и достигается раздвиженіе углей.

При надлежащемъ соотношеніи между діаметрами сосудовъ можно достигнуть того, что свѣтящаяся точка будетъ неподвижной.

Копированіе гравюръ посредствомъ фотографіи безъ камеры. Копировать гравюры, конечно, можно обыкновеннымъ образомъ, т. е. снимая помощію фотографическаго аппарата, но такіе снимки требуютъ очень хорошаго объектива и часто не удаются вслѣдствіе искривленія линій. Но можно получать прекрасныя копіи гравюръ, нисколько не портя послѣднихъ и даже не вырывая, напримѣръ, изъ книги. Если обратная сторона гравюры чиста, то броможелатинную пластинку кладутъ въ обыкновенную копирную раму чувствительной стороной къ верху и на нее гравюру лицевой стороной къ пластинкѣ и затѣмъ выносятъ на свѣтъ секундъ на 40—60. Если гравюра (или фотографія) наклеена на картонъ, то экспозиція должна быть болѣе продолжительна.

Съ гравюрами, вклеенными въ книгу, поступаютъ такъ: на лицевую сторону гравюры кладутъ бромо-желатинную пластинку чувствительной стороной и, покрывъ ее черной матовой бумагой, переворачиваютъ рисунокъ. Если бумага очень тонка, то ее покрываютъ матовымъ желтоватымъ стекломъ, а, употребивъ вмѣсто стекла какую нибудь узорчатую матерію, мы получимъ на рисункѣ легкій отпечатокъ матеріи. Помѣщая между оригиналомъ и пластинкой листъ прозрачной бумаги, мы придадимъ отпечатку мягкій колоритъ и особенно изящный видъ.

Когда же на обратной сторонѣ рисунка что нибудь отпечатано, то копировать приходится отраженнымъ свѣтомъ. Подъ обратную сторону рисунка кладутъ черную бумагу, на рисунокъ чувствительную пластинку и сверху все покрывается краснымъ или желтымъ стекломъ. Пластинка при проявленіи вся почернѣетъ, но въ мѣстахъ соприкосновенія съ темными мѣстами рисунка она будетъ прозрачнѣе. При этомъ способѣ экспозиція продолжается отъ 5 до 10 минутъ.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

■ Въ Будапештѣ устраивается общество, имѣющее цѣлью фабрикацію жидкой углекислоты. Общество это будетъ эксплуатировать *естественные источники* углекислоты, существующіе въ Трансильваніи. (Journ. de fabr. de sucre).

■ Въ Колорадо существуетъ частное общество (Colorado Automatic Refrigerating Company), распредѣляющее по жилищамъ холодъ при помощи системы трубъ. Изъ особыхъ разервуаровъ, помѣщенныхъ на центральной станціи, доставляется по трубамъ въ квартиры каждаго подписчика жидкій амміакъ; здѣсь онъ испаряется въ змѣевикѣ и при помощи второй системы трубъ отводится въ видѣ газа обратно на центральную станцію, поглощается тамъ водой, отгоняется изъ нея нагрѣваніемъ и снова сгущается. Кромѣ приводящихъ и отводящихъ трубъ, имѣется еще третья система трубъ, соединенная съ первыми двумя и препятствующая накопленію въ нихъ амміака. Эта система функціонируетъ весьма успѣшно съ 1889 года. Ея преимущество передъ обыкновенными комнатными ледниками — совершенное отсутствіе сырости. (Revue de Chim. Industr.)

— Сплавъ Watter'а изъ 91% олова и 1% мѣди хорошо пристаетъ къ стеклу и поэтому можетъ быть употребляемъ для спаиванія стеклянныхъ трубокъ и т. п. Плавится ок. 360°. Прибавляя къ нему 0,5%—1% свинца или цинка, можно сдѣлать его болѣе или менѣе твердымъ и легкоплавкимъ. Годится для покрыванія металловъ и придаетъ имъ видъ серебра.

(Revue de Chim. Industr.)

— Искусственная іудейская смола получается нагрѣваніемъ камеди съ сѣрой ок. 210°. При этомъ выдѣляется сѣроводородъ и получается почти черное вещество, сходное по многимъ свойствамъ съ іудейской смолой:—нерастворимое въ алькоголѣ, легко растворимое въ хлороформѣ и бензинѣ и чувствительное къ свѣту, такъ что можетъ замѣнить іудейскую смолу въ фотографіи.

(Revue de Chim Industr.)

— Суррогатъ гутта-перчи открытъ въ португальской колоніи Гоа на Индостанѣ. Это сокъ дерева Nivolcantum, безцвѣтный при вытеканіи изъ дерева и принимающій на воздухѣ шоколадный цвѣтъ. Въ водѣ онъ нерастворимъ, затвердѣваетъ на холоду и размягчается при нагрѣваніи. Его можно выливать въ тонкія пленки, можно дѣлать изъ него формы, весьма хорошо сохраняющія самыя тонкія отпечатки. (Monit. scientif.)

ЗАДАЧИ.

№ 274. Найти двузначное число, представляющее произведеніе двухъ множителей, если извѣстно, что сумма его цыфръ есть среднее ариѳметическое его составныхъ множителей.

Ш.

№ 275. Рѣшить систему

$$\frac{4}{y^2}+\frac{4+y}{y}=\frac{8+4y}{x}+\frac{12y^2}{x^2}$$

$$4y^2=x+xy.$$

Я. Тепляковъ (Радомысль).

№ 276. Какую величину надо прибавить къ выраженію

$$(n^2-1)^p\,(n-1)^{p+1}$$

чтобы оно дѣлилось на n? *М. Фридманъ* (Кіевъ).

№ 277. Найти истинную величину выраженія $\dfrac{\operatorname{Sin}x}{x(1-x)}$, при $x=0$. *П. П.* (Одесса).

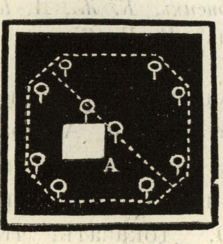
№ 278. Вершина прямого угла A прямоугольнаго треугольника ABC, его центръ тяжести G и центръ O круга въ него вписаннаго образуютъ треугольникъ AGO. Показать, что площадь этого треугольника равна $\frac{b-c}{b}r$, гдѣ b и c — катеты даннаго треугольника и r — радіусъ круга вписаннаго.

Г. Ширинкинъ (Воронежъ).

№ 279. Даны три прямыя и треугольникъ. Построить треугольникъ, равный данному, такъ чтобы его вершины лежали на данныхъ прямыхъ. *И. Александровъ* (Тамбовъ).

ЗАГАДКА.

На квадратномъ участкѣ земли находится болото A (фиг. 27) и 10 дубовъ, изъ которыхъ 8 расположены въ вершинахъ правильнаго восьмиугольника, а 2 на діаметрѣ вписаннаго круга. Требуется раздѣлить участокъ на пять равныхъ частей, соблюдая слѣдующія два условія: 1) въ каждой части должно быть по два дуба; 2) болото должно цѣликомъ отойти къ одной части и не входить въ разсчетъ при дѣленіи.



Фиг. 27.

(Заимств.) *О. Пергаментъ*.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 209 (2 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[3]{(1+x)^2} - \sqrt[3]{(1-x)^2} = \sqrt[3]{1-x^2}.$$

Раздѣливъ обѣ части уравенія на $\sqrt[3]{(1+x)^2}$ и полагая $\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = y$, получимъ $1 - y^2 = y$, откуда найдемъ два значенія для $\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$; рѣшая эти уравненія, найдемъ:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ и } x_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

А. П. (Пенза), *И. Б.* (Кіевъ), *А. Байковъ* (Москва), *О. Озаровская* (Тифлисъ), *А. Даниловъ* (Казань), *К. Ж.* (Воронежъ), *П. Писаревъ*, *П. Степановъ*, *М. Цыбульскій*, *К. Щиголевъ* (Курскъ), *М. Павловъ* (Винница).

№ 214 (2 сер.). Не прибѣгая къ рѣшенію кубическаго уравненія опредѣлить три послѣдовательныя цѣлыя числа, коихъ произведеніе равно 4896.

По условію $x(x+1)(x+2)=4896.$

Очевидно, что

$$x(x+1)(x+2)<(x+1)^3$$

$$x(x+1)(x+2)>x^3$$

слѣдовательно

$$x^3<4896<(x+1)^3$$

$$x<\sqrt[3]{4896}<x+1,$$

откуда $x=16$. Искомыя числа 16, 17, 18.

А. П. (Пенза),, *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *В Россовская, П. Писаревъ, М. Цыбульскій, К. Щиголевъ* (Курскъ), *А. Даниловъ* (Казань), *В. Михаиловъ, П. Андреяновъ* (Москва), *А. Семеновъ, Н. Мазолнъ, И. Вонсикъ, К. Ж., А. К.* (Воронежъ), *Я. Тепляковъ* (Радомысль), *А. Воропай* (Пермь), *И. Б.* (Кіевъ).

№ 224 (2 сер.). Въ треугольникѣ ABC опущенъ перпендикуляръ BD изъ вершины B на сторону AC; изъ точки A возставленъ перпендикуляръ къ сторонѣ AB и на немъ отложенъ отрѣзокъ AN равный отрѣзку DC; точно также изъ C перпендикулярно BC построенъ отрѣзокъ CM равный AD. Доказать, что точки N и M равно удалены отъ вершины треугольника B.

Изъ треугольниковъ ABN и BCM имѣемъ

$$BN^2=AB^2+AN^2=AD^2+BD^2+CD^2$$

$$BM^2=BC^2+CM^2=BD^2+CD^2+AD^2$$

$$\text{отсюда } BN=BM.$$

А. П. (Пенза), *В. Михайловъ* (Москва), *В. Россовская, К. Щиголевъ, М. Цыбульскій, Г. Александровъ, Н. Щекинъ, П. Писаревъ* (Курскъ). *А. Семеновъ, И. Черевковъ, Д. Кирсановъ, Г.* и *М. Ширинкины, К. Ж., И. Вонсикъ* (Воронежъ), *П. Ивановъ* (Одесса), *I. Поляковъ, С. Лисякъ* (Кременчугъ), *В. Арцыховскій* (Житоміръ), *В.* Херувимовъ (Ромны), *Амиръ-бекъ Наримандбековъ* (Тифлисъ), *В. Шидловскій, Зеньковичъ, Смоленскій, Калиновскій* (Полоцкъ), *М. Гольцманъ* (Винница).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 17 Февраля 1892 г.
Типо-литографія Штаба Одесскаго военнаго Округа, Тираспольская, № 14.

Открыта подписка на 1892-й годъ.

Изданіе рекомендовано Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія для фундаментальныхъ библіотекъ реальныхъ, коммерческихъ и промышленныхъ училищъ.

ЕЖЕМѢСЯЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКІЙ ЖУРНАЛЪ

„ЗАПИСКИ"

ИМПЕРАТОРСКАГО РУССКАГО ТЕХНИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

«Записки» издаются съ 1867 г., со времени основанія Императорскаго Русскаго Техническаго Общества, и заключаетъ въ себѣ статьи по разнымъ отраслямъ техники, соотвѣтственно спеціальностямъ отдѣловъ Общества, а именно:

I-й отд. Химическая технологія и металлургія. II-й отд. Механика и механическая технологія. III-й отд. Инженерно-строительное и горное дѣло. IV-й отд. Техника военнаго и морского дѣла. V-й отд. Фотографія и ея примѣненія. VI-й отд. Электротехника. VII-й отд. Воздухоплаваніе. VIII-й отд. Желѣзнодорожное дѣло. IX-й отд. Техническое образованіе.

Главнымъ матеріаломъ для изданія служатъ работы и изслѣдованія по разнымъ вопросамъ техники, докладываемыя Императорскому Русскому Техническому Обществу въ общихъ собраніяхъ, и особенно въ засѣданіяхъ вышеперечисленныхъ девяти спеціальныхъ отдѣловъ Общества (преимущественно же—семи, за исключеніемъ VI-го и VIII-го отдѣловъ, имѣющихъ свои спеціальныя изданія). Кромѣ этихъ статей, редакція располагаетъ цѣннымъ матеріаломъ по организуемымъ Техническимъ Обществомъ съѣздамъ, выставкамъ и т. п., въ видѣ **спеціальныхъ докладовъ на съѣздахъ, отчетовъ о систематическихъ изслѣдованіяхъ, произведенныхъ экспертными комиссіями, а равно объ исполненныхъ въ лабораторіи Общества работахъ, техническихъ отчетовъ** лицъ, командируемыхъ Обществомъ на заграничныя выставки, и другихъ статей спеціально-техническаго содержанія, вызываемыхъ дѣятельностью Общества.

Всѣ вышеозначенные матеріалы, подъ общей рубрикой «Труды Общества», составляютъ главный отдѣлъ «Записокъ». Редакція, не ограничиваясь этимъ матеріаломъ, и имѣя въ виду непрочность частныхъ техническихъ изданій въ Россіи, обусловливающую большіе перерывы въ обзорѣ техническихъ новостей, ведетъ съ 1887 г. отдѣлъ «*Обзора*» важнѣйшихъ явленій въ области техническихъ изобрѣтеній и усовершенствованій. Этотъ отдѣлъ значительно расширяется съ 1892 г. Отдѣлъ «Обзора» дополняется прилагаемымъ къ «Запискамъ» — *Сводомъ привилегій* на изобрѣтенія и усовершенствованія. Всѣ выдаваемыя въ Россіи Департаментомъ торговли и мануфактуръ привилегіи, число коихъ за послѣдніе годы простирается до 250 и болѣе, въ подробномъ описаніи, представляющемъ точную копію подлинныхъ привилегій, и съ объяснительными чертежами, составляютъ нѣсколько книжекъ, отдѣльно прилагаемыхъ. Въ отдѣлѣ «Обзоръ» помѣщается, кромѣ того, указатель испрашиваемыхъ и прекращенныхъ привилегій.

Въ отдѣлѣ «*Дѣйствія Общества*» помѣщаются протоколы засѣданій Совѣта и отдѣловъ Общества.

Лица, желающія ближе познакомиться съ изданіемъ, получаютъ, за пять 7-ми коп. почт. марокъ указатель статей за 1866—88 гг. и примѣрный выпускъ.

Подписная плата на 1892 г.—12 р., съ достав. и перес. въ Россіи и 16 р. за границу; отдѣльные выпуски по **2 р.** Подписка принимается въ Редакціи въ С.-Петербургѣ, Пантелеймоновская ул., 2, и у книгопродавцевъ. Гг. иногородніе благоволятъ обращаться предпочтительно въ Редакцію.

Всѣмъ подписчикамъ по заявленію высылается «Указатель статей», помѣщенныхъ въ «Запискахъ» за года 1867—1888.

Цѣна съ достав. и перес. «Записокъ» за прежніе года съ 1867—87—4 р. за годъ и 1 р. за отдѣльный выпускъ, за 1889—91 г.—8 р. за годъ и 2 р. за отдѣльный выпускъ. За 19 лѣтъ: 1867, 1869—1883, 1886, 1887—70 р., а для школьныхъ библіотекъ, согласно постановленію Совѣта Императорск. Русскаго Технич. Общества,—40 р. За года 1868, 1884, 1885 и 1888 «Записки» всѣ разошлись.

Объявленія принимаются по 10 р. за страницу и 5 р. за полъ-страницы. За *годовыя* объявленія плата значительно понижается, по соглашенію. 3—1

Обложка
ищется

Обложка
ищется